Листок 1. Алгебраические подмножества и конечно-порожденные алгебры над полем

Всюду $\mathbf{k}$ - алгебраически замкнутое поле характеристики 0.

Теорема Гильберта о базисе идеала. Любой идеал алгебры $A = \mathbf{k}[T_1, \cdots, T_n]$ порожден как идеал конечным числом элементов.

1. Доказать, что любой идеал конечно-порожденной коммутативной алгебры над $\mathbf{k}$ конечно порожден.

Обозначения: если I идеал в $\mathbf{k}[T_1, \cdots, T_n]$, то $\mathcal{V}(I)$ - нули (Nullstelle нем.) идеала, т.е. $\mathcal{V}(I) = \{x \in \mathbf{k}^n | \forall f \in I\ f(x) = 0\}$. Наоборот, для любого подмножества $X \subseteq \mathbf{A}^n$ $I(X) = \{f \in A | \forall x \in X\ f(x) = 0\}$. Алгебраическим подмножеством называется множество нулей любого идеала.

2. а) Если X - алгебраическое подмножество, то $\mathcal{V}(I(X)) = X$

б) $\mathcal{V}(I) \cap \mathcal{V}(J) = \mathcal{V}(I + J)$, $\mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J) = \mathcal{V}(I \cap J) = \mathcal{V}(IJ)$

в) $I(X \cap Y) \supseteq I(X) + I(Y)$, привести пример строгого включения

Радикалом идеала $J \triangleleft A$ называется $\sqrt{J} = \{f \in A | \exists n : f^n \in I\}$. Если $\sqrt{J} = J$, то идеал называется радикальным.

3. Радикал идеала - идеал. $I(X)$ - радикальный.

Nullstellensatz (Теорема Гильберта о нулях). $I(\mathcal{V}(J)) = \sqrt{J}$.

4. Каково условие совместности системы алгебраических уравнений?

5. Для $f \in A$, когда $I(\mathcal{V}(f)) = (f)$?

6. Найти образующие $I(X)$, если X: а) пара точек на плоскости, б) $OX \cup OY \subseteq \mathbf{A}^n$.

7. Найти образующие идеала $I(Y)$ кривой $Y = \{(t^3, t^4, t^5) | t \in \mathbf{k}\} \subseteq \mathbf{A}^3$.

8. Доказать, что идеал $(X_1 - f_1, \cdots, X_m - f_m) \triangleleft \mathbf{k}[T_1, \cdots, T_n, X_1, \cdots, X_m]$ радикален для любых $f_1, \cdots, f_m \in A$.

9. Пусть X - кривая в $\mathbf{A}^2$, $B \in X$. Дать определение касательной к X в B в терминах идеалов.

Далее для алгебраического подмножества X $\mathbf{k}[X]$ обозначает алгебру регулярных функций на X, т.е., $\mathbf{k}[X] = A/I(X)$.

10. Привести пример алгебраического подмножества, на котором имеется непостоянная обратимая регулярная функция.

11. Доказать, что $f \in \mathbf{k}[X]$ обратим тогда и только тогда, когда f не обращается в ноль ни в одной точке X.

12. Доказать, что данная алгебра B изоморфна некоторому $\mathbf{k}[X]$ тогда и только тогда, когда B - конечно-порожденная коммутативная алгебра над $\mathbf{k}$ без нильпотентных элементов. Более того, вложения X находятся в биекции с системами образующих B.

13. Доказать, что $\varphi : x \to \varphi_x : \varphi_x(f) = f(x)$ - естественная биекция X и множества $\mathrm{Spec}(\mathbf{k}[X])$ сюрьективных гомоморфизмов алгебры $\mathbf{k}[X]$ в поле.

14. Доказать, что для любого идеала J существует конечное число минимальных простых идеалов, содержащих J, и их пересечение равно $\sqrt{J}$.

15. Найти неприводимые компоненты $\mathcal{V}(J)$ и минимальные простые идеалы, содержащие $J = (y^2 - xz, z^2 - y^3)$. Радикален ли идеал J?