Листок 2. Регулярные и рациональные отображения.

Для неприводимого аффинного многообразия X через $\mathbf{k}(X)$ обозначается поле *рациональных* функций $\frac{p}{q}, p, q \in \mathbf{k}[X], q \neq 0$. *Областью определения* называется $D(f) = \{x \in X | f = \frac{p}{q}, q(x) \neq 0\}$. Положим $I_f = \{q \in \mathbf{k}[X] | f = \frac{p}{q}\}$.

1. $I_f \cup 0$ - идеал в $\mathbf{k}[X]$, причем $\mathcal{V}(I_f) = X \setminus D(f)$.

2. Всюду определенная рациональная функция регулярна.

3. Найти область определения функции $(1-y)/x$ на кривой $x^2 + y^2 = 1$.

Если U открыто в X, то через $\mathcal{O}(U)$ обозначается алгебра всех рациональных функций на X, регулярных в каждой точке U. Пусть $f \in \mathbf{k}[X]$; *главным открытым подмножеством* называется $X_f = X \setminus \mathcal{V}(f)$.

4. X_f аффинно, т.е.: а) $\mathcal{O}(X_f) = \mathbf{k}[X][\frac{1}{f}]$ б) Spec $\mathbf{k}[X][\frac{1}{f}] \cong X_f$.

5. Положим $U = \mathbf{A}^2 \setminus (0,0)$. Доказать: $\mathcal{O}(U) = \mathbf{k}[x,y]$. Вывести, что U не аффинно в смысле задачи 5.

Отображение аффинных многообразий $\varphi : X \to Y \subseteq \mathbf{A}^m$ называется *регулярным* (морфизмом), если оно задается функциями из $\mathbf{k}[X]$; φ^* обозначает гомоморфизм $\varphi^* : \mathbf{k}[Y] \to \mathbf{k}[X]$, $\varphi^* f(x) = f(\varphi(x))$; φ называется *доминантным*, если $\varphi(X)$ плотно в Y в топологии Зарисского.

6. Пусть φ - морфизм. а) (φ - доминантный) $\Leftrightarrow$ (φ^* - инъективный)

б) (φ^* - сюръективный) $\Rightarrow$ (φ - инъективный);

в) привести пример, когда обратное к б) неверно.

7. Пусть $Y = \mathcal{V}(x^3 - y^2)$, $\varphi : \mathbf{A}^1 \to Y, \varphi(t) = (t^2, t^3)$. Доказать, что морфизм φ биективен, но не является изоморфизмом.

8. Существует ли а) доминантный морфизм $\mathbf{A}^1$ в $\mathbf{A}^1 \setminus \{0\}$

б) сюрьективный морфизм $\mathbf{A}^1 \setminus \{0\}$ в $\mathbf{A}^1$?

9. ($\varphi = (f_1, \cdots, f_n) : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$ является автоморфизмом) $\Leftrightarrow$ ($f_1, \cdots, f_n$ порождают $\mathbf{k}[T_1, \cdots, T_n]$.) При этом якобиан $J = \frac{\partial(f_1, \cdots, f_n)}{\partial(T_1, \cdots, T_n)} \in \mathbf{k}$.

10. (Абьянкар-Моо). Кривая $X \subseteq \mathbf{A}^2$ тогда и только тогда изоморфна $\mathbf{A}^1$, когда может быть переведена в прямую автоморфизмом $\mathbf{A}^2$.

Теорема. Если $\varphi : X \to Y$ - доминантный, то $\exists\, f \in \mathbf{k}[Y] : Y_f \subseteq \varphi(X)$

11. Перевести эту теорему на алгебраический язык.

12. Описать образ морфизма $\varphi : \mathbf{A}^3 \to \mathbf{A}^3$

а) $(x,y,z) \to (x, xy, xyz)$ б) $(x,y,z) \to (xyz, y^3 z, x^3 z^2)$.

Пусть X, Y - неприводимы; заменяя $\mathbf{k}[X]$ на $\mathbf{k}(X)$, определяются: *рациональное* отображение φ, область определения $D(\varphi)$, доминантность; если существует рациональное φ^{-1}, φ называют *бирациональным изоморфизмом*.

Теорема. Доминантное и инъективное на непустом открытом подмножестве в X отображение является бирациональным изоморфизмом.

13. Пусть $f \in \mathbf{k}[T_1, \cdots, T_n]$ - неприводимый полином, deg $f = 2$, $X = \mathcal{V}(f)$, $O \in X$, $L \not\ni O$ - любая гиперплоскость в $\mathbf{A}^n$. Пусть $x \in X$; положим $\pi(x) = (Ox) \cap L$. Доказать, что отображение $\pi : X \to L$ рационально и найти $D(\varphi)$. При каком условии π будет бирациональным изоморфизмом?

14. Построить явно бирациональный изоморфизм $\varphi : \mathbf{A}^1 \to X$:

а) $X : y^2 = x^2 + x^3$ б) $X : x^2 + y^2 = 5$.