Листок 3. Размерность, простые и особые точки.

Пусть B - коммутативная алгебра над $\mathbf{k}$; элементы $f_1, \cdots, f_n \in B$ называются *алгебраически зависимыми*, если существует $F \in \mathbf{k}[T_1, \cdots, T_n]$, $F \neq 0$: $F(f_1, \cdots, f_n) \equiv 0$.

1. $f_1, \cdots, f_n \in \mathbf{k}[T_1, \cdots, T_n]$ алгебраически зависимы $\Rightarrow \frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(T_1,\cdots,T_n)} \equiv 0$.

Теорема. Все максимальные алгебраически независимые подсистемы B имеют одну и ту же мощность, обозначаемую $\mathrm{tr.deg.}\, B$.

Размерностью неприводимого аффинного многообразия X называется $\dim X = \mathrm{tr.deg.}\, \mathbf{k}[X]$. В общем случае: $\dim(X_1 \cup X_2) = \max(\dim X_1, \dim X_2)$.

2. Если X неприводимо, $Y \subseteq X, Y \neq X$, то $\dim Y < \dim X$.

3. Найти $\dim X$, если $X = \mathcal{V}(F)$ - гиперповерхность в $\mathbf{A}^n$.

4. Если морфизм $\varphi : X \to Y$ доминантный, то $\dim X \geq \dim Y$.

5. Если $\varphi : X \to Y$ - бирациональный изоморфизм, то $\dim X = \dim Y$.

6. Конус Грассмана: $\widetilde{Gr_{n,r}} = \{v_1 \wedge \cdots \wedge v_r | v_1, \cdots, v_r \in \mathbf{k}^n\} \subseteq \bigwedge^r \mathbf{k}^n$.

а) доказать, что $\widetilde{Gr_{n,r}}$ замкнуто в $\bigwedge^r \mathbf{k}^n$

б) доказать, что отображение $\varphi : \mathbf{k}^{r(n-r)+1} \to \widetilde{Gr_{n,r}}$

$(t, (a_{ij})_{i=1,j=r+1}^{r,n}) \to (te_1 + \sum_{j=r+1}^n a_{1j}e_j) \wedge \cdots \wedge (e_r + \sum_{j=r+1}^n a_{rj}e_j)$

является бирациональным изоморфизмом, и $\dim \widetilde{Gr_{n,r}} = r(n-r) + 1$.

Теорема. Пусть $X \subseteq \mathbf{A}^n$ - неприводимо, $I(X) = (f_1, \cdots, f_m)$. Тогда $n - \dim X$ равно рангу функциональной матрицы $J(x) = \frac{\partial(f_1,\cdots,f_m)}{\partial(T_1,\cdots,T_n)}$.

Точка $x \in X$ называется простой если $\mathrm{rk} J(x) = \dim X$. Точка не являющаяся простой, называется особой; X^{sing} обозначает множество особых точек X. Касательным пространством $\mathrm{T}_x(X)$ называется $\cap_{i=1}^m \mathrm{Ker} df_i(x)$.

7. $X \setminus X^{sing}$ - непустое открытое подмножество.

8. $\dim \mathrm{T}_x X \geq \dim X$, и равенство равносильно тому, что x - простая.

9. Если X - конус (т.е. $\forall x \in X, t \in \mathbf{k}$, tx также принадлежит X), и если 0 - простая точка X, то X - линейное подпространство.

10. Описать особые точки гиперповерхности $\mathcal{V}(f)$, $f \in \mathbf{k}[T_1, \cdots, T_n]$.

11. Исследовать особые точки $X = \mathcal{V}(z^2 - F(x_1, \cdots, x_n))$.

Неприводимое многообразие X называется *нормальным*, если алгебра $\mathbf{k}[X]$ *целозамкнута*, т.е. из уравнения $f^n + a_1 f^{n-1} + \cdots + a_n = 0, a_i \in \mathbf{k}[X], f \in \mathbf{k}(X)$ следует $f \in \mathbf{k}[X]$.

12. Если X *факториально* (т.е. в $\mathbf{k}[X]$ имеется однозначное разложение на неприводимые множители), то X нормально.

13. Исследовать вопрос о нормальности для X из задачи 11.

Теорема. Если X - гладко, то X - нормально. Если X - нормально, то $\dim X^{sing} < \dim X - 1$.