Листок 4. Первое знакомство с алгебраическим группами.

Алгебраической группой называется алгебраическое многообразие G обладающее такой структурой группы, что отображения $\mu : G \times G \to G, \mu(x,y) = xy$ и $\iota : G \to G, \iota(x) = x^{-1}$ являются морфизмами.

1. Замкнутая в топологии Зарисского подгруппа в G является алгебраической группой. Замыкание подгруппы является подгруппой.

2. Единица $e \in G$ содержится в единственной неприводимой компоненте G^0 группы G; G^0 - нормальная подгруппа в G, причем неприводимые компоненты G суть смежные классы по G^0.

Обозначения: $\mathrm{G_a}$ и $\mathrm{G_m}$ - аддитивная и мультипликативная группы поля $\mathbf{k}$; GL_n - группа невырожденных матриц $n \times n$.

3. $\mathrm{G_a}, \mathrm{G_m}, GL_n$ - связные алгебраические группы.

Подгруппы в GL_n: SL_n - подгруппа матриц с определителем 1; B_n - подгруппа верхнетреугольных матриц; $U_n \subseteq B_n$ - подгруппа матриц с единицами на диагонали; T_n - подгруппа диагональных матриц; S_n - подгруппа мономиальных матриц.

4. SL_n, B_n, U_n, T_n - связные алгебраические группы.

5. Групповое многообразие не имеет особых точек.

6. Ядро и образ гомоморфизма алгебраических групп - алгебраические.

7. Биективный гомоморфизм связных групп - изоморфизм.

8. Описать все гомоморфизмы между $\mathrm{G_m}$ и $\mathrm{G_a}$.

9. Все гомоморфизмы $\mathrm{G_m}$ в себя суть $\varphi_n : t \to t^n, n \in \mathbf{Z}$.

10. Все гомоморфизмы $\mathrm{G_a}$ в себя суть $\varphi_b : t \to bt, b \in \mathbf{k}$ и $\mathrm{Aut}\mathrm{G_a} \cong \mathrm{G_m}$.

11. Конечная нормальная подгруппа связной группы лежит в центре.

12. Нормализатор $N_G(H)$ и централизатор $Z_G(H)$ замкнутой подгруппы H алгебраической группы G замкнуты в G.

13. Пусть H - подгруппа в $GL(V)$, $U \subseteq V$ - H-инвариантное подпространство, $r \in N_{GL(V)}(H)$. Тогда пространство rU H-инвариантно.

14. Группа T_n - абелева; $Z_{GL_n}(T_n) = T_n$; $N_{GL_n}(T_n) = T_n S_n$.

15. $N_{GL_n}(B_n) = B_n$.

16. Подгруппа, содержащая открытое плотное подмножество своего замыкания, замкнута.

Теорема. Коммутант алгебраической группы G замкнут и связен, если G связна.

17. Подмножество $U_{ij} \subseteq GL_n, i \neq j$, состоящее из матриц с единицами на главной диагонали и нулями на всех остальных местах, кроме ij, - замкнутая подгруппа, изоморфная $\mathrm{G_a}$.

18. U_n порождена подгруппами $U_{ij}, i < j$.

19. Коммутант B_n совпадает с U_n.

20. Группа B_n разрешима.