Листок 5. Разложение Жордана оператора.
Разрешимые и унипотентные группы

Оператор $A \subseteq L(V)$ называется *полупростым*, если A диагонализуем, *нильпотентным*, если $A^n = 0$ при некотором n, *унипотентным*, если $A - E$ нильпотентен.

1. Совокупности всех нильпотентных и всех унипотентных операторов замкнуты в $L(V)$.

Разложение $A = A_s A_u$ невырожденного оператора называется разложением Жордана, если A_s, A_u коммутируют, A_s полупрост, A_u унипотентен.

2. Доказать, что разложение Жордана единственно.

3. Если X, Y - коммутирующие нильпотентные операторы, A, B - коммутирующие унипотентные операторы, то выполнено:

$$\exp(X+Y) = \exp(X)\exp(Y), \log(AB) = \log(A) + \log(B).$$

4. Каждый элемент конечного порядка в $GL(V)$ полупрост.

Алгебраическая группа $G \subseteq GL(V)$ называется унипотентной, если все ее элементы унипотентны.

5. Каждая унипотентная группа связна.

Тором ранга n называется группа, изоморфная T_n. *Квазитором* называется прямое произведение тора на конечную абелеву группу.

6. Доказать, что каждый регулярный характер группы T_n имеет вид $x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}, m_i \in \mathbf{Z}$.

7. Доказать, что группа регулярных автоморфизмов группы T_n изоморфна $GL_n(\mathbf{Z})$.

8. Множество элементов конечного порядка плотно по Зарисскому в каждом квазиторе.

9. Если $G \subseteq GL(V)$ - алгебраическая группа, $A \in G$ - полупростой (унипотентный) элемент, $\rho : G \to GL(U)$ - линейное представление, то $\rho(A)$ полупрост (унипотентен).

10. Любое семейство коммутирующих полупростых элементов в $L(V)$ приводится одновременно к диагональному виду.

11. Если $G \subseteq GL(V), v_1, \cdots, v_k \in V$ собственные векторы для G различных характеров $\chi_1, \cdots, \chi_k$, то $v_1, \cdots, v_k$ линейно-независимы.

12. Каждая связная абелева алгебраическая группа изоморфна группе ${\mathrm{G_m}}^k \times {\mathrm{G_a}}^l$ для некоторых k, l.

Алгебраическая группа называется разрешимой, если она разрешима как абстрактная группа.

Теорема (Ли-Колчин) Всякая связная разрешимая замкнутая подгруппа $G \subseteq GL(V)$ имеет общий собственный вектор.

13. Если $G \subseteq GL(V)$ связная разрешимая замкнутая подгруппа, то в некотором базисе все операторы из G записываются верхнетреугольными матрицами.

14. Привести пример показывающий, что для несвязных G утверждение задачи **13** неверно.