## Листок 6. Алгебры Ли.

*Алгеброй Ли* называется алгебра над полем $\mathbf{k}$ снабженная бинарной операцией $(\xi, \eta) \to [\xi, \eta]$ со свойствами: $[\xi, \eta] = -[\eta, \xi]$ и $[[\xi, \eta], \mu] + [[\eta, \mu], \xi] + [[\mu, \xi], \eta] = 0$ (тождество Якоби).

Обозначим через $\mathrm{Ad}$ *присоединенное* представление группы $GL(V)$ в пространстве $\mathfrak{gl}(V)$ линейных операторов на $V$: $\mathrm{Ad}(g)(\eta) = g\eta g^{-1}$.

**1.** Дифференциал $\mathrm{ad} = \mathrm{d_E}(\mathrm{Ad})$ имеет вид: $\mathrm{ad}\xi(\eta) = [\xi, \eta] \doteq \xi\eta - \eta\xi$.

**2.** Алгебра $\mathfrak{gl}(V)$ с операцией коммутирования является алгеброй Ли (вывести тождество Якоби из того, что $\mathrm{Ad}GL(V)$ состоит из автоморфизмов алгебры $\mathfrak{gl}(V)$).

**3.** Пусть $G \subseteq GL(V)$ - замкнутая в топологии Зарисского подгруппа, $\mathfrak{g} \doteq \mathrm{T}_E(G)$ - касательное пространство.

а) доказать, что подпространство $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ инвариантно относительно $\mathrm{Ad}G$ (представление группы $G$ в $\mathfrak{g}$ также называется присоединенным).

б) $\mathfrak{g}$ - подалгебра в алгебре Ли $\mathfrak{gl}(V)$ (ее называют *касательной алгеброй* или алгеброй Ли группы $G$).

**4.** Пусть $\rho : G \to GL(U)$ - линейное представление. Тогда $\mathrm{d_E}\rho$ - линейное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$, т.е., гомоморфизм $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{gl}(U)$.

**5.** В условиях предыдущей задачи для любого $u \in U$ стабилизатор $G_u$ - замкнутая подгруппа с алгеброй Ли $\mathfrak{g}_u = \{\xi \in \mathfrak{g} | \mathrm{d_E}\xi(u) = 0\}$.

**6.** Для гомоморфизма $\det : GL(V) \to \mathbf{k}^*$: $\mathrm{d_E}(\det)(\xi) = \mathrm{tr}(\xi)$. Алгебра Ли $\mathfrak{sl}_n$ группы $SL_n$ состоит из матриц со следом ноль.

**7.** Расссмотрим линейное представление $\mathrm{Sq}$ группы $GL_n$ в пространстве матриц $n \times n$ отождествленном с пространством билинейных форм: $\mathrm{Sq}\, g(A) = gAg^\top$. Доказать: $\mathrm{d_E}(\mathrm{Sq})\xi(A) = \xi A + A\xi^\top$.

**8.** Пусть $J$ - невырожденная симметрическая матрица. *Ортогональной* группой $O_n$ называется стабилизатор $(GL_n)_J$ относительно представления $\mathrm{Sq}$. Доказать корректность определения $O_n$, описать явно ее алгебру Ли в случае $J = E$.

**9.** Пусть $J$ - невырожденная кососимметрическая матрица четного размера $n$. *Симплектической* группой $Sp_n$ называется стабилизатор $(GL_n)_J$ относительно представления $\mathrm{Sq}$. Доказать корректность определения $Sp_n$, описать явно ее алгебру Ли в случае, когда $J$ - блочная матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$$

.