Листок 7. Компактные и редуктивные группы.

Ниже основное поле $\mathbf{k} = \mathbf{C}$ - поле комплексных чисел. Подгруппу $K \subseteq GL(V)$ назовем вещественной подгруппой Ли, если K - замкнутое гладкое вещественное подмногообразие в $GL(V)$. Пусть $\mathfrak{k} = \mathrm{T_E}(K)$.

1. $\mathfrak{k}$ - вещественная алгебра Ли.

Теорема 1. Компактная подгруппа $K \subseteq GL(V)$ является вещественным алгебраическим подмногообразием в $GL(V)$.

2. Компактная подгруппа $K \subseteq GL(V)$ является вещественной подгруппой Ли.

3. Группа U_n унитарных матриц является компактной подгруппой Ли в $GL_n(\mathbf{C})$ с алгеброй Ли $\mathfrak{u}_n$ - алгеброй косоэрмитовых матриц.

Теорема 2. Алгебраическая подгруппа G редуктивна тогда и только тогда, когда существует компактная подгруппа $K \subseteq G$, такая что $\overline{K} = G$.

4. $\mathfrak{u}_n + i\mathfrak{u}_n = \mathfrak{gl}_n$. Вывести, что $GL_n(\mathbf{C})$ редуктивна.

5. Доказать с помощью теоремы 2 редуктивность групп SL_n, O_n, Sp_n.

6. Доказать, что группы SL_n, O_n, Sp_n полупросты, описав их центры.

Полупростая подгруппа L алгебраической группы G называется *подгруппой Леви*, если для радикала $R(G)$ и гомоморфизма $\gamma : G \to G/R(G)$ ограничение γ на L - изоморфизм L на $G/R(G)$.

7. Пусть Q - кососимметрическая матрица максимального ранга размера $n \times n$, n - нечетно. Описать группу $(GL_n)_Q$, найти ее радикал, унипотентный радикал и подгруппу Леви.

8. Описать стабилизаторы произвольных симметрических и кососимметрических матриц относительно представления Sq, их радикалы и подгруппы Леви.