Листок 8. Орбиты и пространства орбит алгебраических групп.

1. Доказать: $\dim Gx = \dim G - \dim G_x$.

2. Если G - конечная группа действующая на аффинном алгебраическом многообразии X, то оператор Рейнольдса действует так: $f^\natural = |G|^{-1} \sum\limits_{g \in G} gf$.

Теорема Гильберта об инвариантах. Пусть редуктивная группа G действует на аффинном многообразии X. Тогда алгебра *инвариантов* $\mathbf{k}[X]^G$ конечно порождена над $\mathbf{k}$. Обозначение: $X/\!\!/G$ - спектр Spec $\mathbf{k}[X]^G$ (т.е. $\mathbf{k}[X/\!\!/G] = \mathbf{k}[X]^G$) - называется *категорным фактором* действия $G : X$.

3. В условиях задачи **2** доказать: $X/\!\!/G$ изоморфно множеству орбит.

4. Рассмотрим присоединенное действие $GL_n : \mathfrak{gl}_n \ni \xi$.

а) $\xi_s \in \overline{G\xi}$, где $\xi = \xi_s + \xi_n$ - разложение Жордана

б) $(\overline{G\xi} = G\xi) \Leftrightarrow (\xi$ - полупрост$)$

5. Рассмотрим действие группы SL_n на наборах из n векторов из $\mathbf{k}^n$.

а) $SL_n(v_1, \cdots, v_n)$ замкнута $\Leftrightarrow$ векторы $v_1, \cdots, v_n$ линейно-независимы

б) описать орбиты и замыкания орбит для $SL_3 : 3\mathbf{k}^3$.

Рассмотрим линейное действие тора $T : V$. Любой элемент $v \in V$ представляется единственным образом в виде суммы $v = v_{\chi_1} + \cdots + v_{\chi_m}$ собственных векторов группы T попарно различных характеров. Положим $X = \overline{Tv} \subseteq V$. Определим полугруппу $\Delta = \mathbf{Z}_+\chi_1 + \cdots \mathbf{Z}_+\chi_m$ и конус $\mathcal{C} = \mathbf{Q}_+\chi_1 + \cdots \mathbf{Q}_+\chi_m$.

6. Отображение $T \to X, t \to tv$ индуцирует T-изоморфизм:

$\mathbf{k}[X] \cong \bigoplus \mathbf{k}t^{-\chi}, \chi \in \Delta$.

7. I является T-инвариантным простым идеалом в $\mathbf{k}[X]$ тогда и только тогда, когда $I = \bigoplus \mathbf{k}t^{-\chi}, \chi \in \Delta_I$, где $\Delta_I \subseteq \Delta$ - любое подмножество со свойством $(\alpha + \beta \in \Delta_I) \Leftrightarrow (\alpha \in \Delta_I$ или $\beta \in \Delta_I)$.

8. Орбиты в X находятся во взаимно-однозначном соответствии с гранями конуса $\mathcal{C}$, при котором грани F соответствует орбита $\mathcal{O}_F$ вектора $\sum v_{\chi_i}, \chi_i \in F$, причем $\mathcal{O}_{F_1} \subseteq \overline{\mathcal{O}_{F_2}} \Leftrightarrow F_1 \subseteq F_2$.

9. Сформулировать критерий замкнутости орбиты Tv.

10. Каждая орбита унипотентной группы замкнута.

Пусть алгебраическая группа G действует на неприводимом аффинном многообразии X, $Y \subseteq X$ - неприводимое замкнутое подмножество. Положим $Z(Y) = \{g \in G | Y \subseteq X^g\}$, $N(Y) = \{g \in G | gY = Y\}$; $Z(Y)$ - нормальная подгруппа в $N(Y)$, положим $W(Y) = N(Y)/Z(Y)$. Если $Res : \mathbf{k}[X] \to \mathbf{k}[Y]$ - ограничение функций, то $Res(\mathbf{k}[X]^G) \subseteq \mathbf{k}[Y]^{W(Y)}$.

11. Если $\overline{GY} = X$ и существуют $f_1, \cdots, f_n \in \mathbf{k}[X]^G$, такие что $Res(f_1), \cdots, Res(f_n)$ порождают $\mathbf{k}[Y]^{W(Y)}$, то $f_1, \cdots, f_n$ порождают $\mathbf{k}[X]^G$.

12. Применив задачу **11** к случаю $(G, X) = (GL_n, \mathfrak{gl}_n)$, Y - пространство диагональных матриц, доказать, что алгебра $\mathbf{k}[X]^G$ порождена коэффициентами характеристического многочлена.

13. Применив задачу **11**, описать алгебры инвариантов для групп:

а) $G = SL_n, X$ - пространство билинейных симметричных или кососимметричных форм б) $G = SL_n, X = n\mathbf{k}^n$ в) $G = O_n, X = \mathbf{k}^n$.

Пусть H - редуктивная подгруппа алгебраической группы G.

14. Для действия $H : G$ левыми сдвигами $G/\!\!/H \cong G/H$.

15. Пусть H действует на аффинном многообразии F. Обозначим через $X = G *_H F$ категорный фактор для действия $H : G \times F, h(g, f) = (gh^{-1}, hf)$.

а) $g(g', f) = (gg', f)$ корректно определяет действие $G : X$, а $(g, f) \to gH$ - сюрьективный G-эквивариантный морфизм $X \to G/H$

б) наоборот, если $\varphi : \overline{X} \to G/H$ - G-эквивариантный морфизм, то φ сюрьективен и существует G-изоморфизм $\overline{X} \cong G *_H F$, где $F = \varphi^{-1}(eH)$

в) $X/\!\!/G \cong F/\!\!/H$.