Листок 9. Конечные подгруппы в SL_2, их инварианты и правильные многогранники.

Пусть $G \subseteq SL_2(\mathbf{C})$ - произвольная конечная подгруппа. Можно считать: $G \subseteq SU_2$. Рассмотрим гомоморфизм γ, сопоставляющий элементу $r \in SU_2$ проективное преобразование $\gamma(r)$ проективной прямой $\mathbf{CP}^1 = \mathbf{C} \cup \infty \cong S^2$. Последний изоморфизм - стандартная стереографическая проекция на двумерную сферу.

1. γ индуцирует изоморфизм $PSU_2 = SU_2/\pm E \cong SO_3(\mathbf{R})$.

Таким образом, дело сводится к описанию конечных подгрупп $\gamma(G) \subseteq SO_3$. Пусть $\Gamma \subseteq SO_3$ - конечная группа. Хорошо известно, что каждый нетривиальный элемент $r \in SO_3$ - вращение вокруг некоторой оси, в частности, $(S^2)^r$ состоит из двух диаметрально-противоположных точек. Положим $F = \cup_{r\in\Gamma\setminus e}(S^2)^r$, $\mathcal{O}_1, \cdots, \mathcal{O}_d$ - все различные Γ-орбиты в F, Γ_i - стабилизатор одного из $x \in \mathcal{O}_i$, $c_i = |\Gamma_i|, i = 1, \cdots, d$, $c = |\Gamma|$.

2. $d + 2c^{-1} = 2 + c_1^{-1} + \cdots + c_d^{-1}$. Указание: двумя способами, по $r \in \Gamma \setminus e$ и по $x \in F$, найти сумму $\sum_{r\in\Gamma\setminus e} |(S^2)^r|$.

3. Доказать, что уравнение из задачи **2** имеет в натуральных числах следующие решения (только эти): $d = 2, c_1 = c_2 = c$ или $d = 3, (c, c_1, c_2, c_3) = (2n, 2, 2, n), n \geq 2$, $(12, 2, 3, 3)$, $(24, 2, 3, 4)$, $(60, 2, 3, 5)$.

4. Случай $d = 2, c = c_1 = c_2 = n$. Доказать, что Γ - циклическая группа порядка n. Если $\gamma(G) = \Gamma$, то G - циклическая группа порядка n или $2n$. Считая, что $G = C_m = \mathrm{diag}(e^{2\pi i/m}, e^{-2\pi i/m})$, описать образующие и соотношения для $\mathbf{C}[\mathbf{C}^2]^G$.

5. Если c четно, $\gamma(G) = \Gamma$, то $G = \gamma^{-1}(\Gamma)$, и $G/G' \cong \Gamma/\Gamma'$.

6. Случай $d = 3, (2n, 2, 2, n)$. Доказать, что при $n \geq 3$ Γ - группа вращений n-угольного диэдра, (правильного n-угольника, рассматриваемого как плоский многогранник). Если $\gamma(G) = \Gamma$, то G сопряжена группе $\widetilde{D_n} = C_{2n}\langle r\rangle$, r действует так: $re_1 = ie_2, re_2 = ie_1$. Подгруппа $C_{2n} \subseteq \widetilde{D_n}$ нормальна, следовательно $\mathbf{C}[\mathbf{C}^2]^{\widetilde{D_n}} = (\mathbf{C}[\mathbf{C}^2]^{C_{2n}})^r$. С помощью задачи **4** описать $\mathbf{C}[\mathbf{C}^2]^{\widetilde{D_n}}$.

Многогранник называется правильным, если группа его вращений действует транзитивно на множестве флагов вершина-ребро.

7. Случай $(12, 2, 3, 3)$. Доказать, что Γ - группа T вращений правильного тетраэдра с вершинами $\mathcal{O}_3$, причем $\mathcal{O}_1$ - середины ребер, $\mathcal{O}_2$ - середины граней.

8. Случай $(24, 2, 3, 4)$. Доказать, что Γ - группа вращений правильного октаэдра O с вершинами $\mathcal{O}_3$ или куба с вершинами $\mathcal{O}_2$.

9*. Случай $(60, 2, 3, 5)$. Доказать, что Γ - группа вращений правильного икосаэдра I с вершинами $\mathcal{O}_3$ или додекаэдра с вершинами $\mathcal{O}_2$.

Заметим, что однородная форма f степени n от двух переменных представляется в виде произведения n линейных форм, так что, с точностью до скаляра, f определяется набором n точек $\mathbf{CP}^1$. Для группы $\Gamma = T, O, I$ обозначим через $\varphi, \psi, \chi \in \mathbf{C}[\mathbf{C}^2]$ формы, построенные по наборам вершин, середин ребер и середин граней многогранника, соответственно.

10. φ, ψ, χ - полуинварианты группы $\gamma^{-1}(\Gamma)$.

11. Группа T изоморфна A_4, T/T' имеет порядок 3 и порождена образом вращения на угол $2\pi/3$ вокруг "высоты" тетраэдра. Характеры полуинвариантов φ, ψ, χ равны $\varepsilon, 1, \varepsilon^{-1}$, ε - нетривиальный характер.

12. Пусть $A \subseteq B \subseteq \mathbf{C}[T_1, \cdots, T_n]$ - однородные конечно-порожденные подалгебры, $A_+ \subseteq A, B_+ \subseteq B$ - идеалы многочленов без свободного члена и множества нулей $\mathcal{V}(A_+)$, $\mathcal{V}(B_+)$ совпадают. Тогда любой $g \in B$ цел над A, т.е. удовлетворяет уравнению $g^m + a_1 g^{m-1} + \cdots + a_m = 0, a_i \in A$.

Теорема Безу. Если система уравнений $f_1 = 0, \cdots, f_n = 0, f_1, \cdots, f_n \in \mathbf{C}[T_1, \cdots, T_n]$, имеет конечное число N решений, то $N \leq \deg f_1 \cdots \deg f_n$.

13. $\widetilde{T} = \gamma^{-1}(T)$. Положим: $f_6 = \psi, f_8 = \varphi\chi, f_{12} = \varphi^3$ (здесь и ниже степень f_n равна n), $A = \mathbf{C}[f_6, f_8] \subseteq B = \mathbf{C}[f_6, f_8, f_{12}] \subseteq C = \mathbf{C}[\mathbf{C}^2]^{\widetilde{T}}$.

а) применив задачу **12**, доказать, что C цела над A

б) $f_{12} \notin A$

в) применив теорему Безу к f_6, f_8, вывести, что общее многообразие уровня многочленов f_6, f_8, f_{12} - одна орбита $\widetilde{T}$, откуда $QC = QB$

г) степень уравнения целой зависимости f_{12} над A равна 2

д) соотношение имеет вид: $f_{12}^2 = af_6^2(f_6^2 + cf_{12}) + bf_8^3, a, b \neq 0$

е) B целозамкнуто, следовательно, $C = B$.

14. Группа O изоморфна S_4, O/O' имеет порядок 2 и порождена образом вращения на угол π вокруг прямой, соединяющей середины противолежащих ребер октаэдра. Характеры полуинвариантов φ, ψ, χ равны $\varepsilon, \varepsilon, 1$, соответственно, ε - нетривиальный характер группы $\widetilde{O} = \gamma^{-1}(O)$.

15. Пусть $f_8 = \chi, f_{12} = \varphi^2, f_{18} = \varphi\psi$, $A = \mathbf{C}[f_8, f_{12}], B = \mathbf{C}[f_8, f_{12}, f_{18}]$, $C = \mathbf{C}[\mathbf{C}^2]^{\widetilde{O}}$. Рассуждая как в задаче **13**, доказать: $C = B$ и соотношение между образующими имеет вид: $f_{18}^2 = f_{12}(af_8^3 + bf_{12}^2), a, b \neq 0$.

16*. Группа I изоморфна A_5, $I = I'$.

17. Для группы $\widetilde{I} = \gamma^{-1}(I)$ алгебра $\mathbf{C}[\mathbf{C}^2]^{\widetilde{I}}$ порождена многочленами $f_{12} = \varphi, f_{20} = \psi, f_{30} = \chi$ с соотношением $f_{30}^2 = af_{12}^5 + bf_{20}^3, a, b \neq 0$.

18. Каждый категорный фактор по действию конечной подгруппы $G \in SL_2$ имеет единственную особую точку $\pi_{G,C^2}(0)$. Такие особенности называются: особенностями Клейна, Дю Валя, простыми и т.д.