Алгебраическая геометрия, листок №1

1. Докажите, что кольцо формальных степенных рядов $k[[X_1,\dots,X_n]]$ является нетеровым (k — поле).

2. Можно ли задать одну из ветвей гиперболы в $\mathbb{R}^2$ алгебраическими уравнениями?

3. Существует ли такой морфизм $\varphi\colon X\to Y$ неприводимых аффинных многообразий, что $\varphi(X)$ не открыто и не замкнуто в Y?

4. Докажите, что следующие пары многообразий неизоморфны:
а) гипербола $\{\,(x,y)\in\mathbb{A}^2 : xy=1\,\}$ и $\mathbb{A}^1$; б) полукубическая парабола $\{\,(x,y)\in\mathbb{A}^2 : y^2=x^3\,\}$ и $\mathbb{A}^1$; в) $\mathbb{A}^1\setminus\{0,1,2\}$ и $\mathbb{A}^1\setminus\{0,1,3\}$; г*) полукубическая парабола из пункта (б) и кривая на плоскости, заданная уравнением $y^2=x^5$.

5. Рассмотрим отображение

$$v_m\colon \mathbb{A}^n\to\mathbb{A}^{\binom{m+n}{m}-1},$$

определенное всеми мономами степени $\leqslant m$, кроме констант. Будет ли его образ замкнутым подмногообразием в $\mathbb{A}^{\binom{m+n}{m}-1}$?

6. Докажите, что подмногообразие в $\mathbb{A}^{n+1}$, заданное уравнением $x_1^2+\dots+x_{n+1}^2=1$, бирационально изоморфно $\mathbb{A}^n$.

7. Докажите, что кривая на аффинной плоскости, заданная уравнением $x^3+y^3=1$, нерациональна.

8. Докажите, что поверхность в $\mathbb{A}^3$, заданная уравнением $x^3+y^3+z^3=1$, рациональна, если основное поле алгебраически замкнуто.

9. Докажите, что произведение неприводимых многообразий неприводимо.

10. Пусть X и Y — неприводимые аффинные многообразия. Докажите, что $\dim X\times Y=\dim X+\dim Y$.

11. Пусть U и V — аффинные открытые подмножества многообразия X. Докажите, что $U\cap V$ тоже аффинно.

12. Докажите, что многообразие $\mathbb{A}^2\setminus\{(0,0)\}$ не является аффинным.

13. Пусть C — кривая $v_3(\mathbb{P}^1)\subset\mathbb{P}^3$. Может ли прямая пересечь кривую C в трех различных точках?

14*. Докажите, что однородный идеал многообразия Сегре

$$\mathbb{P}^m\times\mathbb{P}^n\subset\mathbb{P}^{mn+m+n}$$

порождается своей компонентой степени 2.