Алгебраическая геометрия, листок №2

1. В кольце многочленов $k[T_0, \ldots, T_n]$ заданы два однородных идеала I_1 и I_2 такие, что $r(I_1) = I_1$, $r(I_2) = I_2$ (буква r обозначает радикал), и при этом множества нулей I_1 и I_2 в $\mathbb{P}^n$ непусты и совпадают. Следует ли из этого, что $I_1 = I_2$?

2. Пусть C — кривая в $\mathbb{A}^2$, заданная уравнением $y^2 = x^3$. Докажите, что рациональное отображение из C в $\mathbb{P}^1$, заданное формулой $(x, y) \mapsto (x : y)$, не является морфизмом.

3. Рассмотрим диагональное отображение $\mathbb{P}^n$ в многообразие Сегре $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}^{n^2+2n}$. Что за подмногообразие в $\mathbb{P}^{n^2+2n}$ будет образом этого отображения?

4. Пусть X — квазипроективное многобразие. Подмножество вида $V = F \cap U \subset X$, где $F \subset X$ замкнуто, а $U \subset X$ открыто, называется локально замкнутым; конечное объединение локально замкнутых подмножеств называется *конструктивным* множеством (другой вариант определения: конструктивное множество — элемент булевой алгебры подмножеств X, порожденной открытыми подмножествами). Докажите, что при морфизме квазипроективных многообразий образ конструктивного множества конструктивен.

5. Докажите, что $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ неизоморфно $\mathbb{P}^3$.

6. Существуют ли неприводимые многообразия X, Y и Z такие, что $X \subset Z$, $Y \subset Z$, $X \cap Y \neq \varnothing$ и при этом $\dim(X \cap Y) < \dim X + \dim Y - \dim Z$?

7*. Морфизм $f\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$ задается формулой $(x_0 : x_1) \mapsto (x_0^4 : x_0^3 x_1 : x_0 x_1^3 : x_1^4)$. Положим $C = f(\mathbb{P}^1)$. Можно ли задать кривую $C \subset \mathbb{P}^3$ (как подмножество $\mathbb{P}^3$) двумя однородными уравнениями?