Основной целью этого цикла задач является исследование (классификация) многообразий с одной очевидной двойной точкой (проблема 1). Этому вопросу посвящен раздел 4. Кроме того, имеются разделы 1, 2 и 3. В них содержатся задачи образовательного характера. Некоторые задачи из раздела 2 полезны при решении задач из раздела 4.

Введем некоторые обозначения. Через v_k мы будем обозначать отображение Веронезе. Через $G(N,m)$ обозначим (Грассманово) многообразие m-мерных подпространств пространства $\mathbb{P}^N$, U — тавтологическое векторное расслоение ранга $m+1$ над $G(N,m)$. Многообразие $G(N,m)$ вкладывается в $\mathbb{P}^{\binom{N+1}{m+1}-1}$ с помощью плюккеровых координат. Точки многообразия $G(N,m)$ мы будем обозначать через $\alpha, \beta, \ldots$, а соответствующие им подпространства в $\mathbb{P}^N$ — через $\mathbb{P}^m_\alpha, \mathbb{P}^m_\beta, \ldots$; наоборот: через α_L мы обозначим точку в $G(N,m)$, соответствующую подпространству $L \subset \mathbb{P}^N$ размерности m. Если $Y \subset \mathbb{P}^N$, то $\mathcal{N}_Y$ — это нормальное расслоение к Y; $Y^* \subset (\mathbb{P}^N)^*$ — проективно двойственное многообразие (замыкание объединения гиперплоскостей, касающихся Y в гладких точках); $\mathcal{T}_Y$ — касательное расслоение к Y. Через $H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{I}_Y(k))$ обозначается пространство однородных многочленов степени k, обращающихся в нуль на Y. В тексте часто встречаются отображения, построенные следующим образом: пусть $L \subset H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{I}_Y(k))$ — некоторое непустое линейное пространство; тогда для общей точки $z \in \mathbb{P}^N$ $H_z = H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{I}_{Y\cap\{z\}}(k)) \cap L$ является гиперплоскостью в L. Получаем отображение $\varphi_L : \mathbb{P}^N \dashrightarrow \mathbb{P}^{\dim L - 1}$ по правилу $\varphi_L(z) = H_z$.

1. Задачи про расслоения

Задача 1. Пусть $Q^3 \subset \mathbb{P}^4$ — неособая трехмерная квадрика. Выделим $S \subset G(4,1)$, $S = \{\alpha | l_\alpha \subset Q^3\}$. Показать, что $S \cong v_2(\mathbb{P}^3)$. Таким образом, на $\mathbb{P}^3$ определено векторное расслоение $v_2^* U$ ранга 2. Найти кривую в $\mathbb{P}^3$, которая является множеством нулей сечения расслоения $(v_2^* U)^*$.

Задача 2. Пусть $Y^{N-1} \subset \mathbb{P}^N$ — некоторая гиперповерхность. Продолжить геометрически (если это возможно) расслоение $\mathcal{N}_Y$ на $\mathbb{P}^N$.

Задача 3. Доказать геометрически следующий факт: пусть Y — локально полное пересечение коразмерности 2 в $\mathbb{P}^N$ и $\omega_Y = \mathcal{O}(k)$, для некоторого $k \in \mathbb{Z}$. Тогда расслоение $\mathcal{N}_Y$ продолжается на $\mathbb{P}^N$.

Задача 4. Пусть $Y \subset \mathbb{P}^N$, $\operatorname{codim} Y = 2$, $N > 5$, доказать, что $\omega_Y = \mathcal{O}(k)$, для некоторого $k \in \mathbb{Z}$ ($\omega_Y = \det \mathcal{T}_Y^*$).

Задача 5. Пусть E — векторное расслоение ранга 2 над $\mathbb{P}^n$, а $\varphi(m) : \mathbb{P}^n \dashrightarrow G(N,1)$ — отображение, задаваемое $H^0(\mathbb{P}^n, E^*(m))$, где $N = \dim H^0(\mathbb{P}^n, E^*(m))$. Показать, что:

1. для больших m $\varphi(m)$ регулярно;
2. для больших m $\varphi(m)$ — вложение;
3. для больших m $\varphi(m)$ — вложение Веронезе.

Вопрос 1. *Пусть $v_k(\mathbb{P}^n) \subset G(N,1)$. Верно ли, что существует функция $n(k)$ такая, что при $n > n(k)$ найдутся скрещивающиеся подпространства $\mathbb{P}^a, \mathbb{P}^b \subset \mathbb{P}^N$, для которых $v_k(\mathbb{P}^n) \subset \{\alpha | l_\alpha \cap \mathbb{P}^a \neq \emptyset, l_\alpha \cap \mathbb{P}^b \neq \emptyset\} \cong \mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^b \subset G(N,1)$.*

Задача 6. Ответить на вопрос 1:

1. для $k = 1$;
2. для $k = 2$.

Задача 7. Найти подмногообразия $V \subset G(N,1)$ такие, что:

1. $U_G|_V$ разложимо,
2. размерность V максимальна.

Найти $\dim V$.

Задача 8. Пусть N фиксировано. При каких парах (n,k) существуют вложения $v_k(\mathbb{P}^n) \subset G(N,1)$?

Задача 9. При каких N и n существуют регулярные отображения $\mathbb{P}^n$ в $G(N,1)$?

Задача 10. Рассмотрим над $\mathbb{P}^1$ всевозможные расширения $\mathcal{O}(b)$ с помощью $\mathcal{O}(a)$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(a) \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{O}(b) \longrightarrow 0.$$

Они классифицируются элементами модуля $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(b),\mathcal{O}(a)) = H^1(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}(a-b))$. По теореме Гротендика $E = \mathcal{O}(p) \oplus \mathcal{O}(q)$. Будем считать, что $p \le q$. Доказать, что:

1. $a \le p \le q \le b$;
2. расширение расщепляется тогда и только тогда, когда $a = p$ и $b = q$.

Точки пространства $\mathbb{P}(\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(b),\mathcal{O}(a)))$, соответствующие расширениям с одними и теми же p и q, образуют страты. Найти эту стратификацию.

2. Задачи о грассманианах

Задача 11. Пусть $\mathbb{P}^{N-2} \subset \mathbb{P}^N$ — линейное подпространство, $G(N-2,1) \hookrightarrow G(N,1)$. Доказать, что проекция $\pi_{\langle G(N-2,1)\rangle} : G(N,1) \dashrightarrow \mathbb{P}^{2(N-1)}$ является бирациональным изоморфизмом, причем $(\pi_{\langle G(N-2,1)\rangle})^{-1} = \varphi_{H^0(\mathbb{P}^{2(N-1)},\mathcal{I}_Y(2))}$, где $Y = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{N-2} \subset \mathbb{P}^{2(N-2)+1} \subset \mathbb{P}^{2(N-1)}$.

Задача 12. Пусть $\mathbb{P}^{N-3} \subset \mathbb{P}^N$, $W = \{\alpha \,|\, \dim \mathbb{P}^2_\alpha \cap \mathbb{P}^{N-3} > 0\} \subset G(N,2)$. Доказать, что проекция $\pi_{\langle W\rangle} : G(N,2) \dashrightarrow \mathbb{P}^{3(N-2)}$ является бирациональным изоморфизмом, и $(\pi_{\langle W\rangle})^{-1} = \varphi_L$, где $L \subset H^0(\mathbb{P}^{3(N-2)},\mathcal{I}_Y(3))$ — пространство однородных кубических многочленов, обращающихся в нуль с кратностью 2 на $Y = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{N-3} \subset \mathbb{P}^{3(N-2)-1} \subset \mathbb{P}^{3(N-2)}$.

Задача 13. Обобщить конструкции из задач 11, 12 на случай $G(N,m)$ для произвольного $m \ge 3$.

Определение 1. Пусть H — гиперплоскость в $\mathbb{P}^{\binom{N+1}{2}-1}$. Тогда $W_H = H \cap G(N,1)$ называется *комплексом прямых* в $\mathbb{P}^N$.

Определение 2. Точка $z \in \mathbb{P}^N$ называется *центром комплекса прямых* W_H, если W содержит все прямые $l \ni z$.

Задача 14. При каких N каждый комплекс прямых в $\mathbb{P}^N$ имеет центр?

3. Разное

Задача 15. Показать, что общему набору из $k > 2$ подпространств размерности m пространства $\mathbb{P}^{km-m+k-2}$ соответствует единственное многообразие, изоморфное $\mathbb{P}^{k-2} \times \mathbb{P}^m$, содержащее подпространства этого набора в качестве слоев. Общим здесь считается набор, в котором линейная оболочка любых $k-1$ подпространств есть все $\mathbb{P}^{km-m+k-2}$.

Задача 16. Пусть многообразие $S^n \subset \mathbb{P}^N$ содержит $(2n-3)$-мерное семейство прямых. Тогда S является либо квадрикой, либо $S = \bigcup_{\alpha \in C} \mathbb{P}^{m-1}_\alpha$, где $C \subset G(N,n-1)$ — некоторая кривая.

Задача 17. Пусть $C_x(Q^2)$ — конус над неособой квадрикой Q^2 с вершиной в точке x, $l \subset Q^2$ — некоторая прямая. Обозначим через Y результат раздутия $C_x(Q^2)$ вдоль плоскости $\langle x,l\rangle$. Описать Y и исключительный дивизор.

Задача 18. Раздуем конус $C_x(Q^2)$ в вершине x. Получим многообразие $\tilde{X}$, $Q_0^2 \subset \tilde{X}$ — исключительный дивизор. Доказать, что существуют отображения $f_1, f_2 : \tilde{X} \to X_i$, являющиеся изоморфизмами вне $Q_0^2 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ такие, что для $(x_1, x_2) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ $f_i|_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(x_1, x_2) = x_i$. Показать, что X_i изоморфны многообразию Y, описанному в задаче 17.

Задача 19. При каких a, b многообразие $\mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^b \subset \mathbb{P}^{ab+a+b}$ содержится в неособой квадрике?

Определение 3. Возьмем набор из $r+1$ линейного подпространства L_i в $\mathbb{P}^{\sum k_i + r}$ $(0 \le i \le r)$ размерности k_i, причем любое из L_i скрещивается с линейной оболочкой остальных. Пусть $\psi_i = v_{k_i} : \mathbb{P}^1 \to L_i$. Тогда многообразие $scroll_{k_0,\ldots,k_r} = \bigcup_{x \in \mathbb{P}^1} \langle \psi_0(x), \ldots, \psi_r(x) \rangle \subset \mathbb{P}^{\sum k_i + r}$ называется *нормальным рациональным скроллом.*

Определение 4. Пусть $Y \subset \mathbb{P}^N$ — многообразие коразмерности a, $L \subset \mathbb{P}^N$ — линейное подпространство. Тогда линейное сечение $L \cap Y$ мы будем называть *правильным*, если $\operatorname{codim} L \cap Y = a$ (в L). В противном случае линейное сечение является *неправильным.*

Задача 20. Любой рациональный нормальный неособый scroll является правильным линейным сечением многообразия $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^N$ при некотором N. Каким scroll'ам соответствуют общие линейные сечения $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^N$, а каким — специальные? Показать, что любое многообразие минимальной степени, отличное от scroll'а, не является правильным сечением никакого неособого многообразия.

Задача 21. Пусть $Q^{2k} \subset \mathbb{P}^{2k+1}$ — невырожденная неособая квадрика. Доказать, что многообразие Фано в этом случае состоит из двух неприводимых (изоморфных) компонент. Обозначим через $F_k \subset G(2k+1, k)$ одну из этих компонент. Показать, что:

1. $\dim F_k = \binom{k+1}{2}$;
2. $F_k = v_2(S_k^{\binom{k+1}{2}})$ для некоторого многообразия $S^{\binom{k+1}{2}}$.

Определение 5. Многообразие $S_k^{\binom{k+1}{2}}$, параметризующее любое из двух семейств $\mathbb{P}^k$ на $2k$-мерной гладкой квадрике, называется *k-тым спинорным многообразием.*

Задача 22. Показать, что многообразие, параметризующее семейство $\mathbb{P}^{k-1}$ на $(2k-1)$-мерной гладкой квадрике, изоморфно многообразию $S_k^{\binom{k+1}{2}}$.

Задача 23. Доказать, что

1. $S_1^1 = \mathbb{P}^1$;
2. $S_2^3 = \mathbb{P}^3$ (сравнить с задачей 1);
3. $S_3^6 = Q^6$;
4. $S_4^{10} = \varphi_{H^0(\mathbb{P}^{10}, \mathcal{I}_Y(2))}$, для $Y = G(4,1) \subset \mathbb{P}^9 \subset \mathbb{P}^{10}$.

Задача 24. Обобщить способ построения многообразия $S^{\binom{k+1}{2}}$, описанный в задаче 23, п. 4, для $k > 4$.

Задача 25. Пусть $Y \subset \mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}^{m+1}$ — это одно из следующих многообразий:

1. $\mathbb{P}^l \cup \mathbb{P}^k$, $m = k + l + 1$;
2. $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^k$, $m = 2k+1$;
3. $G(4,1)$, $m = 9$;
4. Q^{m-1} — квадрика.

Положим $X = \varphi_{H^0(\mathbb{P}^{m+1}, \mathcal{I}_Y(2))}(\mathbb{P}^{m+1}) \subset \mathbb{P}^N$.

1. Описать X.
2. Показать, что существует такое линейное подпространство $L \subset \mathbb{P}^N$, что $(\varphi_{H^0(\mathbb{P}^{m+1}, \mathcal{I}_Y(2))})^{-1} = \pi_L$, $\dim L = N - m - 1$. Найти L.
3. Доказать, что для любой гиперплоскости $H \supset L$ существует гиперплоскость $H' \subset \mathbb{P}^{m+1}$ такая, что $H \cap X = \varphi_{H^0(H', \mathcal{I}_{Y'}(2))}(H')$, где $Y' = Y \cap H'$.
4. Для каких k верно следующее утверждение: для любого линейного подпространства $M \supset L$, $\operatorname{codim} M = k$ существует линейное подпространство $M' \subset \mathbb{P}^{m+1}$, $\operatorname{codim} M' = k$, такое, что $X \cap M = \varphi_{H^0(M', \mathcal{I}_{Y'}(2))}(M')$, где $Y' = M' \cap Y$?

Следующие две задачи представляют интерес в рамках исследования вопроса 3 (в части, касающейся скрученных кубик).

Задача 26. Пусть X является образом проективного пространства $\mathbb{P}^n$ при отображении, задаваемом линейной системой

1. квадрик
2. кубик

с базисным множеством Y, задаваемом квадратичными уравнениями. Указать кривые, которые переходят при таком отображении в

1. коники
2. скрученные кубики.

Задача 27. Какова максимальная возможная размерность семейства

1. коник
2. скрученных кубик

содержащихся в невырожденном многообразии размерности n?

4. Задачи о многообразиях с одной очевидной двойной точкой

4.1. **Общие вопросы.**

Определение 6. Многообразие $X^n \subset \mathbb{P}^{2n+1}$ называется *многообразием с одной очевидной двойной точкой*, если через общую точку $w \in \mathbb{P}^{2n+1}$ проходит единственная секущая многообразия X.

Упражнение 1. Проверить, что

1. $v_3(\mathbb{P}^1)$ в $\mathbb{P}^3$;
2. объединение двух скрещивающихся подпространств $\mathbb{P}^n_1$ и $\mathbb{P}^n_2$;
3. объединение квадрики Q^n и подпространства $\mathbb{P}^n$, пересекающего $\langle Q^n \rangle$ по точке, лежащей в Q^n

являются многообразиями с одной очевидной двойной точкой.

Проблема 1. *Описать все многообразия с одной очевидной двойной точкой.*

В основном наши исследования будут посвящены следующему частному случаю:

Проблема 2. *Описать все неособые неприводимые многообразия с одной очевидной двойной точкой.*

Далее везде многообразия с одной очевидной двойной точкой считаются неприводимыми, если не оговорено обратное.

Определение 7. Пусть $E \subset \mathbb{P}^N \times G(N,1)$ — пространство тавтологического расслоения над $G(N,1)$, p и q — проекции на первый и второй сомножители соответственно. Для $X^n \subset \mathbb{P}^N$ положим: $S_X \subset E$,

$$S_X = \overline{\{(\alpha_{\langle x,y \rangle}, z) | (x,y) \in X^{(2)}, x \neq y, z \in \langle x,y \rangle\}},$$

где $X^{(2)}$ — симметрический квадрат многообразия X. Через $\Sigma_X \subset G(N,1)$ обозначим проекцию S_X на $G(N,1)$, через SX — на $\mathbb{P}^N$. Для точки $z \in \mathbb{P}^N$ положим

$$\Sigma_z(X) = \bigcup_{\alpha \in p(q^{-1}(z)) \cap \Sigma_X} l_\alpha \cap X.$$

Пусть теперь $X^n \subset \mathbb{P}^{2n+1}$ обладает одной очевидной двойной точкой. Тогда проекция $p : S_X \longrightarrow \mathbb{P}^{2n+1}$ является бирациональным изоморфизмом. Образ множества ветвления отображения p называется *многообразием подскока* и обозначается через $Z(X)$. Положим

$$W(X) = \overline{\{z | z \in \langle x, y\rangle,\ x, y \in X \setminus \operatorname{Sing} X,\ x \neq y,\ T_x X \cap T_y X \neq \emptyset\}},$$

$$T(X) = \overline{\bigcup_{x,y \in X \setminus \operatorname{Sing} X,\ x \neq y,\ T_x X \cap T_y X \neq \emptyset} T_x X \cap T_y X}.$$

Далее по тексту везде $X^n \subset \mathbb{P}^{2n+1}$ — многообразие с одной очевидной двойной точкой, если не оговорено обратное.

Замечание 1. Если через точку $z \in \mathbb{P}^{2n+1}$ проходят хотя бы две различные обобщенные секущие многообразия X, то $z \in Z(X)$. По основной теореме Зарисского точка z лежит в $Z(X)$ тогда и только тогда, когда $\dim p^{-1}(z) \geq 1$, то есть через точку z проходит как минимум одномерное семейство обобщенных секущих X. (Под обобщенной секущей мы понимаем либо двусекущую X, либо прямую из касательной звезды $T_x X$, $x \in X$, проходящую через x.)

Упражнение 2. Показать, что $S(v_3(\mathbb{P}^1)) = \mathbb{P}^3$, $Z(v_3(\mathbb{P}^1)) = v_3(\mathbb{P}^1)$.

Упражнение 3. Показать, что $W(X) \subset Z(X)$.

Итак, если z — общая точка из $W(X) \subset Z(X)$, то тогда для нее найдутся такие $x, y \in X \setminus \operatorname{Sing} X$, $x \neq y$, $T_x X \cap T_y X \neq \emptyset$, что $z \in \langle x, y\rangle$. С другой стороны, для таких x и y имеем $T_x X \cap T_y X \subset T(X) \subset Z(X)$. Таким образом, мы получаем два различных вида представления точек из $Z(X)$.

Задача 28. Верно ли, что:

1. $W(X) = Z(X)$,
2. $T(X) = Z(X)$,
3. если $z \in Z(X)$ то $\exists\ x, y \in X$, $x \neq y$: $z \in \langle x, y\rangle$?

Задача 29. Пусть $R \subset X \times X$, $R \supset \Delta$, $R = \{(x,y) | T_x X \cap T_y X \neq \emptyset\}$, $R_x = \{y | (x,y) \in R\}$.

1. Показать, что:
   (a) $\dim R_x \geq n-1$ для $x \in X$;
   (b) $\dim R = 2n-1$ (т. е. все компоненты R имеют размерность $2n-1$).
2. Доказать, что для общих $(x,y) \in R$, $x \neq y$ и $w \in \langle x, y\rangle$, $T_w W(X)$ является гиперплоскостью в $\langle T_x X, T_y X\rangle$.

Задача 30. Пусть $z \in Z(X)$, $z \notin X$, $x \in \Sigma_z(X)$ — общая точка. Найти $T_x \Sigma_z(X)$.

Определение 8. Многообразие $Y \subset \mathbb{P}^N$ называется *линейно нормальным*, если $\dim H^0(Y, \mathcal{O}(1)) = N+1$.

Упражнение 4. Показать, что X линейно нормально.

Если степень линейно нормального многообразия X достаточно мала, то оно является многообразием с одной очевидной двойной точкой.

Упражнение 5. Показать, что $X^n \subset \mathbb{P}^{2n+1}$ — минимальной степени ($\deg X = n+2$), то либо $SX \neq \mathbb{P}^{2n+1}$, либо X — с одной очевидной двойной точкой.

Пусть степень некоторого многообразия $X^n \subset \mathbb{P}^{2n+1}$ не больше $2n+1$. Если через общую точку z пространства $\mathbb{P}^{2n+1}$ проходит более одной секущей многообразия X, то найдется плоскость, $\mathbb{P}^2_z$, $\#(\mathbb{P}^2_z \cap X) \geq 4$. Если мы возьмем $z' \in \mathbb{P}^2_z$, то, взяв линейную оболочку $\mathbb{P}^2_z$ и секущей, проходящей через z', получим $\mathbb{P}^3_z$, $\#(\mathbb{P}^3_z \cap X) \geq 6$. Продолжая в таком духе, мы в конце концов получим $\mathbb{P}^{n+1}_z$, $\#(\mathbb{P}^{n+1}_z \cap X) \geq 2n+2$. Поскольку $\deg X \leq 2n+1$, то такое невозможно за исключением случая, когда $\dim \mathbb{P}^{n+1}_z \cap X \geq 1$.

Задача 31. Доказать, что линейно нормальные поверхности степени 5 в $\mathbb{P}^5$ являются многообразиями с одной очевидной двойной точкой.

Вопрос 2. *Верно ли, что если многообразие $X^n \subset \mathbb{P}^{2n+1}$ линейно нормально, $SX = \mathbb{P}^{2n+1}$ и $deg(X) \leq 2n+1$, то X обладает одной очевидной двойной точкой?*

Теперь рассмотрим некоторые способы построения многообразий с одной очевидной двойной точкой и примеры их использования.

4.2. **Конструкция 1.** Пусть многообразие $Y \subset \mathbb{P}^M$ размерности $m > \frac{M-1}{2}$ обладает следующим свойством: для общей точки $z \in \mathbb{P}^M$ многообразие $\Sigma_z(Y)$ является $(2m+1-M)$-мерной квадрикой. Пусть X^{M-m-1} — неприводимое сечение многообразия Y линейным подпространством коразмерности $2m+1-M$.

Упражнение 6. Проверить, что X обладает одной очевидной двойной точкой.

Задача 32. Рассмотрим многообразие $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n+1} \subset \mathbb{P}^{2n+3}$. Показать, что:

1. если $z \notin \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n+1}$, то $\Sigma_z(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n+1}) = \mathbb{P}^1_z \times \mathbb{P}^1$ для некоторой прямой $\mathbb{P}^1_z \subset \mathbb{P}^{n+1}$;
2. неособое неприводимое пересечение $X = \mathbb{P}^{2n+1} \cap \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n+1}$ есть либо $scroll_{2,2,1,\ldots,1}$, либо $scroll_{3,1,\ldots,1}$ (см. также задачу 20). В силу упражнения 6 $scroll_{2,2,1,\ldots,1}$ и $scroll_{3,1,\ldots,1}$ являются многообразиями с одной очевидной двойной точкой.

Определение 9. Поверхность $\varphi_{H^0(\mathbb{P}^2,\mathcal{I}_Y(2))}(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$, где $Y \subset \mathbb{P}^2$ — набор из четырех точек такой, что никакие три точки из этого набора не лежат на одной прямой, называется *поверхностью Дель Пеццо.*

Задача 33. Рассмотрим многообразие $G(4,1) \subset \mathbb{P}^9$. Показать, что:

1. если $z \notin G(4,1)$, то $\Sigma_z(G(4,1)) = G(\mathbb{P}^3_z, 1)$ для некоторого $\mathbb{P}^3_z \subset \mathbb{P}^4$;
2. неособое правильное неприводимое пересечение $X = \mathbb{P}^5 \cap G(4,1)$ является поверхностью Дель Пеццо. В силу упражнения 6 поверхность Дель Пеццо является многообразием с одной очевидной двойной точкой.

Задача 34. Рассмотрим многообразие $S^{10} \subset \mathbb{P}^{15}$. Показать, что если $z \notin S^{10}$, то $\Sigma_z(S^{10}) = S^6_z$ для некоторого $Q^6_z \subset Q^8$. Многообразие S^6_z является неособой шестимерной квадрикой (см. Разное, задача 23, п. 3). В силу упражнения 6 неособое неприводимое пересечение $X = \mathbb{P}^9 \cap S^{10}$ является многообразием с одной очевидной двойной точкой.

4.3. **Конструкция 2.** Пусть многообразие $Y \subset \mathbb{P}^{2n+1}$ размерности $m > n$ обладает следующим свойством: для общей точки $z \in \mathbb{P}^{2n+1}$ многообразие $\Sigma_z(Y)$ является $2(m-n)$-мерной квадрикой. Посечем Y квадриками $Q_1, \ldots, Q_{m-n}$, содержащими $V \subset Y$, так, чтобы для общего $z \in \mathbb{P}^M$ многообразие (возможно, приводимое) $U^{m-n}_z = \overline{(\Sigma_z(Y) \cap Q_1 \cap \cdots \cap Q_{m-n}) \setminus V}$ обладало одной очевидной двойной точкой и $X = \overline{(Y \cap Q_1 \cap \cdots \cap Q_{m-n}) \setminus V}$ было неприводимо.

Упражнение 7. Проверить, что X является многообразием с одной очевидной двойной точкой.

Замечание 2. Такие V можно искать, например, исходя из того, чтобы для общего $z \in \mathbb{P}^{2n+1}$ многообразие $U_z^{m-n} \subset \mathbb{P}^{2(m-n)+1}$ было фиксированным известным (возможно, приводимым) многообразием с одной очевидной двойной точкой размерности $m-n$.

Задача 35. Рассмотрим многообразие $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}^{2n+1}$. Для общей $z \in \mathbb{P}^{2n+1}$ $\Sigma_z(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n) = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1_z$ — двумерная квадрика в $\mathbb{P}^3$. Показать, что:

1. если в качестве V взять:
   (a) $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1}$,
   (b) $\{x\} \times \mathbb{P}^n$, $x \in \mathbb{P}^1$,
   (c) $\{x, y\} \times \mathbb{P}^n$, $x, y \in \mathbb{P}^1$, $x \neq y$,
   то $U_z \subset \mathbb{P}^3$ будет кривой с одной очевидной двойной точкой (какой?). X является неприводимым дивизором на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ типа $(2,1)$, $(1,2)$ или $(0,2)$ соответственно. В силу упражнения 7 эти дивизоры являются многообразиями с одной очевидной двойной точкой (последние два примера многообразий были предложены Эджем и носят его имя);
2. других неприводимых дивизоров в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^N$ с одной очевидной двойной точкой нет.

Упражнение 8. Показать, что на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$ неприводимый неособый дивизор типа

1. $(2,1)$ есть $scroll_{3,1,\ldots,1}$;
2. $(1,2)$ есть:
   (a) при $n = 1$ — $v_3(\mathbb{P}^1)$;
   (b) при $n = 2$ — поверхность Дель Пеццо;
3. $(0,2)$ есть $\mathbb{P}^1 \times Q^{n-1}$, где Q^{n-1} — неособая квадрика.

Задача 36. Рассмотрим многообразие $G(4,1)$. Для общей $z \in \mathbb{P}^9$ имеем $\Sigma_z(G(4,1)) = G(\mathbb{P}^3_z, 1)$ — четырехмерная квадрика в $\mathbb{P}^5$. Пусть $U_z \subset G(\mathbb{P}^3_z, 1)$ есть одно из известных многообразий с одной очевидной двойной точкой в $\mathbb{P}^5$:

1. $scroll_{3,1}$,
2. $scroll_{2,2}$,
3. поверхность Дель Пеццо,
4. пара скрещивающихся плоскостей,
5. объединение плоскости и квадрики (см. упражнение 1).

Найти (если это возможно) соответствующее многообразие $V \subset G(4,1)$.

Задача 37. Многообразие $X \subset \mathbb{P}^9$, полученное в результате применения конструкции 2 к многообразию $G(4,1)$ с поверхностью Дель Пеццо в качестве U_z, изоморфно многообразию, полученному в задаче 34.

Задача 38. Рассмотрим многообразие S^{10}. Для общей $z \in \mathbb{P}^{15}$ $\Sigma_z(S^{10}) = S^6$ — шестимерная квадрика в $\mathbb{P}^7$. Для известных многообразий с одной очевидной двойной точкой в $\mathbb{P}^7$:

1. $scroll_{3,1,1}$,
2. $scroll_{2,2,1}$,
3. $\mathbb{P}^1 \times Q^2$, где Q^2
   (a) неособая квадрика,
   (b) конус над неособой коникой,
4. дивизора типа $(1,2)$ на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$,
5. пара скрещивающихся $\mathbb{P}^3$,
6. объединение $\mathbb{P}^3$ и Q^3 (см. упражнение 1)

найти (если они существуют) соответствующие многообразия $V \subset S^{10}$ и выяснить, какие из них совпадают с уже известными.

4.4. **Конструкция 3.** Для описания еще одной конструкции нам понадобится следующее определение.

Определение 10. Опишем некоторою серию многообразий, называемых *многообразиями Севери.*

Нулевое многообразие этой серии — это 3 точки в общем положении в $\mathbb{P}^2$.

Первое многообразие — это $\varphi_{H^0(\mathbb{P}^2,\mathcal{I}_Y(2))}(\mathbb{P}^2) = v^2(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$.

Второе многообразие — это $\varphi_{H^0(\mathbb{P}^4,\mathcal{I}_Y(2))}(\mathbb{P}^4) = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^8$, где $Y = \mathbb{P}^1 \sqcup \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^4$.

Третье многообразие — это $\varphi_{H^0(\mathbb{P}^8,\mathcal{I}_Y(2))}(\mathbb{P}^8) = G(5,1) \subset \mathbb{P}^{14}$, где $Y = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^7 \subset \mathbb{P}^8$ (смотри задачу 11).

Последнее многообразие — это $\varphi_{H^0(\mathbb{P}^{16},\mathcal{I}_Y(2))}(\mathbb{P}^{16}) = E^{16} \subset \mathbb{P}^{26}$, где $Y = S^{10} \subset \mathbb{P}^{15} \subset \mathbb{P}^{16}$.

Замечание 3. Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ невырождено и $\dim X = n$. Если $N < \frac{3n}{2} + 2$, то X нельзя изоморфно спроектировать в $\mathbb{P}^{N-1}$, если же $N = \frac{3n}{2} + 2$, то это можно сделать тогда и только тогда, когда X — это одно из многообразий Севери.

Конструкция. Пусть $Y^m \subset \mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$ — многообразие Севери ($\mathbb{P}^{n-1} = \langle Y \rangle$). Рассмотрим $L \subset H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{I}_Y(3))$ — линейную подсистему кубик в $\mathbb{P}^n$, обращающихся в 0 на Y^m с кратностью 2 (сравнить с задачами 11–13, 23, 24). Положим $X^n = \varphi_L(\mathbb{P}^n)$.

Задача 39. 1. Показать, что $\dim L = 2n + 2$.

2. Доказать, что:
   (a) если $m = 0$, Y^0 — 3 точки, то $X^3 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^7$;
   (b) если $m = 2$, $Y^m = v^2(\mathbb{P}^2)$, то $X^6 = G^L(5,2) \subset \mathbb{P}^{13}$, где $G^L(5,2)$ — многообразие лагранжевых трехмерных подпространств в $\mathbb{C}^6$ (подпространств, на которых некоторая фиксированная невырожденная 2-форма ω обращается в нуль);
   (c) если $m = 4$, $Y^m = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$, то $X^9 = G(5,2) \subset \mathbb{P}^{19}$;
   (d) если $m = 8$, $Y^m = G(5,1)$, то $X^{15} = S^{15} \subset \mathbb{P}^{31}$;
   (e) если $m = 16$, $Y^m = E^{16}$, то $X^{27} = V^{27} \subset \mathbb{P}^{55}$ — проективизация орбиты старшего вектора представления минимальной размерности группы E_7.
3. Доказать, что все эти многообразия являются многообразиями с одной очевидной двойной точкой.

Упражнение 9. Найти линейное пространство $L^{13} \subset \mathbb{P}^{19}$ такое, что $G^L(5,2) = G(5,2) \cap L$.

4.5. **Общие исследования.** Итак, мы получили достаточно большое количество различных многообразий с одной очевидной двойной точкой. Попробуем сравнить их по некоторым характеристикам. Всюду ниже X — одно из построенных в разделах 4.2–4.4 многообразий.

Задача 40. Найти $\deg X$.

Задача 41. Описать многообразие $Z(X)$. В том числе (отдельно для каждой компоненты связности, если их несколько):

1. найти степень;
2. определить, полиномами какой степени порождается идеал этой компоненты (для $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ эта степень равна 2; для остальных X, полученных в конструкции 4.4, показать, что эта степень — 3);

3. исследовать на самодвойственность (для X, полученных в конструкции 4.4, — показать самодвойственность);
4. описать $\Sigma_z(X)$ для общей точки z из этой компоненты.

По результатам пункта 3 определить, верно ли, что в $Z(X)$ всегда найдется самодвойственная компонента? Исследовать $\operatorname{Sing} Z(X)$ (для X, полученных в конструкции 4.4, — показать, что $\operatorname{Sing} Z(X) = X$).

Задача 42. Исследовать $TX = \overline{\bigcup_{x \in X \setminus \operatorname{Sing} X} T_x X}$:

1. верно ли, что $X^* \cong TX$ (для X, полученных в конструкции 4.4, — показать изоморфность);
2. верно ли, что $\operatorname{Sing} TX = Z(X)$ (для X, полученных в конструкции 4.4, — показать равенство)?

Теперь рассмотрим вопрос о строении многообразия секущих в грассманиане $G(2n+1, 1)$.

Упражнение 10. Показать, что:

1. $\Sigma_{v_3(\mathbb{P}^1)} = v_2(\mathbb{P}^2) = v_2(\mathbb{P}^{1(2)})$;
2. кривая в $G(3,1)$, описывающая семейство касательных к $v_3(\mathbb{P}^1)$, есть $v_4(\mathbb{P}^1) = v_2(\Delta) \subset v_2(\mathbb{P}^{1(2)})$, причем в данном случае полученное $v_4(\mathbb{P}^1)$ является гиперплоским сечением многообразия $v_2(\mathbb{P}^2)$.

Задача 43. 1. Описать $\Sigma_X \subset G(2n+1, 1)$.

2. Выделим в Σ_X подмножество $\mathcal{T}^{2n-1}X$, точки которого соответствуют прямым в $\mathbb{P}^{2n+1}$, касающимся X: $\mathcal{T}X = \cup_{x \in X^n} G(x, \widetilde{T_x X})$, где $\widetilde{T_x X}$ — касательная звезда к X в точке x, $G(x, C_x)$ есть множество точек, соответствующих прямым, лежащим на конусе $C_x \subset \mathbb{P}^{2n+1}$ и проходящим через его вершину x. Верно ли, что $\mathcal{T}X$ является гиперплоским сечением многообразия Σ_X?

На многих многообразиях с одной очевидной двойной точкой, построенных выше, есть большие семейства скученных кубик $v_3(\mathbb{P}^1)$.

Упражнение 11. Показать, что для X, полученных в конструкции 4.4, через три общие точки проходит $v_3(\mathbb{P}^1)$ (см. также задачу 26).

Упражнение 12. Найти размерность семейства скрученных кубик, содержащихся в $X^2 \subset \mathbb{P}^5$, для:

1. $X = scroll_{3,1}$,
2. $X = scroll_{2,2}$,
3. X — поверхность Дель Пеццо.

(См. также задачу 27).

Встает следующий общий вопрос:

Вопрос 3. *Каким семейством (например, определить размерность) неправильных сечений с одной очевидной двойной точкой должно обладать многообразие $X^n \subset \mathbb{P}^{2n+1}$, чтобы оно само было с одной очевидной двойной точкой?*

В конструкции 4.4 многообразие X строилось как образ проективного пространства при отображении, задаваемом линейной системой кубик.

Задача 44. Возможно ли другие многообразия с одной очевидной двойной точкой также представить как образ проективного пространства при отображении, задаваемом линейной системой кубик (см., например, определение 9 и задачу 33).

4.6. **Конструкция 4.** Также имеется конструкция, позволяющая по известным примерам многообразий с одной очевидной двойной точкой строить новые примеры в больших размерностях. Как правило, в результате ее применения получаются особые многообразия.

Конструкция. Пусть $X_0^n \subset \mathbb{P}^{2n+1}$ — многообразие с одной очевидной двойной точкой. Вложим $\mathbb{P}^{2n+1}$ в $\mathbb{P}^{2(n+k)+1}$ и возьмем скрещивающееся с ним $\mathbb{P}^{2k-1}$. Рассмотрим отображение $\psi : X_0 \dashrightarrow G(2k-1, k-1)$, удовлетворяющее следующему условию на своей области регулярности $\widetilde{X_0}$: $\forall z \in \mathbb{P}^{2k-1}, H \in \mathbb{P}^{2k-1*}$ $\exists x \in \widetilde{X_0}$: $z \notin \mathbb{P}^{k-1}_{\psi(x)}$, $H \not\supset \mathbb{P}^{k-1}_{\psi(x)}$. Положим $X = \overline{\bigcup_{x \in \widetilde{X_0}} \langle x, \mathbb{P}^{k-1}_{\psi(x)} \rangle}$.

Упражнение 13. Проверить, что X — с одной очевидной двойной точкой.

Задача 45. Описать

1. $Z(X)$,
2. $\operatorname{Sing} X$,

в терминах $Z(X_0)$, $\operatorname{Sing} X_0$ и ψ.