Задачи о квадриках и грассманианах

Вы, конечно, знаете кое-что об общих свойствах квадрик и грассмановых многообразий. Однако в нижеследующих задачах мы особое внимание уделим *проективным* свойствам этих многообразий, которые менее широко известны.

Напомним, что n-мерной квадрикой называется гиперповерхность в $\mathbb{P}^{n+1}$, заданная однородным многочленом второй степени. Теория квадрик над полем характеристики два весьма специфична, и в дальнейшем мы будем рассматривать квадрики положительной размерности над алгебраически замкнутым полем характеристики большей двух. Впрочем, любопытно решить некоторые из нижеследующих задач (скажем, задачу 2) и для квадрик над полем характеристики два (не случайно, к примеру, конику в характеристике два официально называют *странной* кривой!).

Задача 1.

a) Пусть $Q \subset \mathbb{P}^{n+1}$ — n-мерная квадрика. Тогда множество особых точек Q — линейное подпространство, а Q — конус с вершиной в этом линейном подпространстве.

b) Когда две квадрики изоморфны друг другу? Сколько существует классов n-мерных квадрик с точностью до изоморфизма?

Задача 2. Пусть $Q \subset \mathbb{P}^{n+1}$. Найти двойственное многообразие $Q^* \subset (\mathbb{P}^{n+1})^*$. Как устроено гиперплоское сечение $L \cap Q$ в зависимости от положения точки, соответствующей L, в $(\mathbb{P}^{n+1})^*$?

Задача 3. Пусть $X^n \subset \mathbb{P}^{n+1}$ — неособая гиперповерхность.

a) Доказать, что двойственное многообразие $X^* \subset (\mathbb{P}^{n+1})^*$ является гиперповерхностью.

b) Доказать, что X^* неособо если и только если X — квадрика.

c) Приведите примеры, показывающие, что утверждения a) и b) перестают быть справедливыми, если не предполагать, что X неособа.

Задача 4.

a) Пусть $Q^n \subset \mathbb{P}^{n+1}$ — квадрика, пусть $z \in \mathbb{P}^{n+1}$ — точка, и пусть $\pi_z \colon Q \to \mathbb{P}^n$ — проектирование с центром в z. Исследуйте π_z в зависимости от положения точки z. Как устроены слои π_z, где разветвлён этот морфизм?

b) Докажите, что неприводимая квадрика $Q^n \subset \mathbb{P}^{n+1}$ рациональна и содержит открытое подмножество, изоморфное аффинному пространству $\mathbb{A}^n$.

c) Докажите, что квадрика $Q^n \subset \mathbb{P}^{n+1}$ не изоморфна проективному пространству $\mathbb{P}^n$ (решив задачи 6, 7 и 18 a), вы получите другие решения задачи 4 c)).

Задача 5.

a) Пусть $X^n \subset \mathbb{P}^{n+1}$ — гиперповерхность. Доказать, что X не содержит линейных подпространств размерности большей $\frac{n+\dim \operatorname{Sing} X+1}{2}$, где $\operatorname{Sing} X$ — множество особых точек X.

b) Доказать, что квадрика $Q^n \subset \mathbb{P}^{n+1}$ содержит r-мерные линейные подпространства для всех $0 \le r \le \frac{n+\dim \operatorname{Sing} Q+1}{2}$.

Задача 6. Пусть $Q \subset \mathbb{P}^{n+1}$ — неособая квадрика. Найти группу классов дивизоров на Q относительно линейной эквивалентности.

Задача 7. Пусть $Q \subset \mathbb{P}^{n+1}$ — квадрика. Как устроены гомологии $H_*(Q, \mathbb{Z})$?

Замечание. Разумеется (здесь и в дальнейшем), говоря о гомологиях, мы подразумеваем, что основное поле — поле комплексных чисел.

Теперь перейдем к многообразиям Грассмана. Чтобы набраться опыта, начнём с простейшего случая — грассманианов прямых. Прежде всего, необходимо аккуратно определить грассманиан как проективное многрообразие.

Определение. Пусть E — векторное пространство, $\dim E \geqslant 2$. Внешний квадрат E обозначается $\wedge^2 E$; его элементы называются *бивекторами*, а естественные координаты в $\wedge^2 E$ (определяемые выбором координат в E) — *плюккеровыми координатами*. Бивектор $\omega \in \wedge^2 E$ называется *разложимым*, если $\omega = v \wedge w$, где $v, w \in E$.

Упражнение 1. Поверьте, что $\omega = v \wedge w = 0$ если и только если векторы v и w коллинеарны.

Задача 8. Пусть $\omega_1 = v_1 \wedge w_1$ и $\omega_2 = v_2 \wedge w_2$ — ненулевые разложимые бивекторы. Пусть $\langle v_i, w_i \rangle$ — плоскость, порождённая парой (v_i, w_i), $i = 1, 2$. Докажите, что ω_1 и ω_2 коллинеарны тогда и только тогда, когда $\langle v_1, w_1 \rangle = \langle v_2, w_2 \rangle$.

Задача 9. Докажите, что бивектор ω разложим тогда и только тогда, когда $\omega \wedge \omega = 0$.

Задача 10. Докажите, что множество разложимых бивекторов $\omega \in \wedge^2 E$ задаётся квадратичными уравнениями.

Таким образом, мы установили взаимно однозначное соответствие между плоскостями в E и ненулевыми разложимыми бивекторами в $\wedge^2 E$ по модулю пропорциональности. Теперь проективизируем эту ситуацию. Пусть $\dim E = m + 1$, $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}^m$. Тогда плоскостям (двумерным векторным подпространствам) в E соответствуют прямые в $\mathbb{P}^m$, так что прямые в $\mathbb{P}^m$ параметризуются точками подмножества в $\mathbb{P}(\wedge^2 E) = \mathbb{P}^{\binom{n+1}{2}-1}$, соответствующего разложимым бивекторам. Согласно задаче 10, это подмножество задается квадратичными уравнениями и, стало быть, является проективным алгебраическим многообразием. Оно называется *грассманианом прямых в* $\mathbb{P}^m$ и обозначается $G(m, 1)$ (если исходить из векторной ситуации, с которой мы начали, то же самое многообразие обозначается $\operatorname{Gras}(m+1, 2)$; встречаются и другие обозначения).

Упражнение 2. Проверьте непосредственно, что грассманиан $G(3, 1) \subset \mathbb{P}^5$ — это неособая четырехмерная квадрика.

Положим

$$U = \{(x, l) \in \mathbb{P}^m \times G(m, 1) \mid x \in l\}$$

(мы обозначаем через l как точку многообразия Грассмана, так и соответствующую ей прямую в $\mathbb{P}^m$).

Определение. Многообразие U называется *универсальным семейством прямых* в $\mathbb{P}^m$.

Упражнение 3. Проверьте, что универсальное семейство прямых является алгебраическим многообразием. Как устроены слои его естественных проекций на $\mathbb{P}^m$ и $G(m,1)$?

Задача 11. Докажите, что $G(m,1)$ — неособое неприводимое алгебраическое многообразие. Найдите его размерность.

Задача 12. Докажите, что при $m > 2$ грассманиан $G(m,1)$ не изоморфен проективному пространству.

Упражнение 4. Пусть $L = \mathbb{P}^{m-2} \subset \mathbb{P}^m$ — линейное подпространство. Докажите, что множество $H_L = \{l \in G(m,1) \mid l \cap L \neq \varnothing\}$ — гиперплоское сечение грассманиана $G(m,1)$. Опишите множество $\operatorname{Sing} H_L$.

Напомним, что i-ое многообразие секущих грассманиана $G(m,1)$ определяется формулами:

$$S^0G(m,1) = G(m,1), \qquad S^iG(m,1) = S\big(G(m,1), S^{i-1}G(m,1)\big), \qquad i \geqslant 1,$$

где $S(X,Y)$ обозначает соединение (join) многообразий X и Y, то есть замыкание множества хорд, соединяющих общие точки X с общими точками Y.

Задача 13. Пусть $l_1, l_2 \in G(m,1)$.

a) Докажите, что прямая (хорда) $\langle l_1, l_2\rangle \subset G(m,1)$ либо содержится в $G(m,1)$, либо пересекает $G(m,1)$ ровно в двух точках.
b) Для каких пар (l_1, l_2) прямая $\langle l_1, l_2\rangle$ содержится в $G(m,1)$?

Задача 14.

a) Какова размерность многообразия $S^iG(m,1)$?
b) Опишите множество особых точек многообразия $S^iG(m,1)$.

Задача 15. Пусть $l \in G(m,1)$, и пусть $T_l = T_{G(m,1),l}$ — касательное пространство к $G(m,1)$ в точке l.

a) Докажите, что точка $l' \in G(m,1)$ лежит в касательном пространстве T_l тогда и только тогда, когда $\langle l, l'\rangle \subset G(m,1)$ (ср. задачу 12).
b) Опишите пересечение $T_l \cap G(m,1)$ (из a) следует, что это конус; его база — хорошо известное вам многообразие).
c) При каких r многообразие Грассмана $G(m,1)$ содержит r-мерные линейные подпространства? Опишите линейные подпространства максимальной размерности на $G(m,1)$.

Задача 16.

a) Найдите коразмерность двойственного многообразия $G(m,1)^* \subset (\mathbb{P}^N)^*$, $N = \binom{n+1}{2} - 1$.

b) Опишите множество $\operatorname{Sing} H_L$, где H_L — гиперплоское сечение $G(m,1)$, соответствующее общей точке $L \in G(m,1)^*$. Какие могут быть особенности у H_L, если $L \in G(m,1)^*$ — произвольная точка?

c) Постарайтесь описать стратификацию

$$G(m,1)^* \supset \operatorname{Sing} G(m,1)^* \supset \operatorname{Sing}^2 G(m,1)^* \cdots \supset \operatorname{Sing}^k G(m,1)^* \cdots ,$$

где

$$\operatorname{Sing}^0 G(m,1)^* = G(m,1)^*, \quad \operatorname{Sing}^i G(m,1)^* = \operatorname{Sing}\left(\operatorname{Sing}^{i-1} G(m,1)^*\right), \quad i \geqslant 1.$$

d) При каких m многообразие $G(m,1)^*$ неособо?

Задача 17. Пусть $m \geqslant 3$, и пусть $L = \mathbb{P}^{m-2} \subset \mathbb{P}^m$ — линейное подпространство. Вложение $L \hookrightarrow \mathbb{P}^m$ задаёт естественное вложение грассманианов $G(m-2,1) \hookrightarrow G(m,1)$. Пусть $\langle G(m-2,1)\rangle$ — линейная оболочка $G(m-2,1)$, т.е. наименьшее линейное подпространство, содержащее $G(m-2,1)$ при этом вложении, и пусть $\pi\colon G(m,1) \dashrightarrow \mathbb{P}^{2m-2}$ — проектирование с центром в этом линейном подпространстве (проверьте размерности; пунктирной стрелкой мы, как обычно, обозначаем рациональные отображения). Заметим, что $2m-2 = n = \dim G(m,1)$ (см. задачу 11).

a) Исследуйте отображение π, используя упражнение 4. Какие у него точки неопределённости, слои, множества ветвления?

b) Докажите, что $G(m,1)$ — рациональное многообразие, а отображение π — бирациональный изоморфизм (см. однако задачу 12). Проверьте, что $G(m,1)$ содержит открытое подмножество, изоморфное аффинному пространству $\mathbb{A}^n$ (ср. задачу 4).

c) Исследуйте отображение π^{-1} (какие у него точки неопределённости, слои, множества ветвления?). Докажите, что это отображение задаётся линейной системой квадрик на $\mathbb{P}^n$. Каково базисное множество этой системы квадрик?

Можно было бы задать ещё много интересных вопросов о грассманианах прямых, но пора и честь знать. Теория грассманианов подпространств большей размерности во многом аналогична, но сложнее, и мы не будем ей здесь заниматься. Однако само существование грассманианов и универсальных семейств линейных подпространств позволяет ставить и решать некоторые естественные задачи. Вот несколько примеров, в которых $G(m,k)$ обозначает грассманиан k-мерных линейных подпространств в $\mathbb{P}^m$ (который, как и в случае прямых, определяется как проективизация множества разложимых $(k+1)$-векторов; подробности опускаем.

Упражнение 5. Докажите, что многообразия $G(m,k)$ и $G(m,m-k-1)$ изоморфны (в частности, $G(m,1) \simeq G(m,m-2)$). Объясните это при помощи проективной двойственности. Что получается при $k=0$?

В задачах 5 и 15 c) мы видели, что на квадриках и грассманианах прямых лежит много линейных подпространств.

Определение. Пусть $X^n \subset \mathbb{P}^N$ — проективное многообразие, и пусть $r < n$ — натуральное число. Множество точек $L \in G(N,r)$, соответствующих r-мерным линейным подпространствам, содержащимся в X, называется *многообразием Фано* и обозначается $F(X,r)$.

Замечание. Джино Фано (1871–1952) — известный итальянский математик, который успешно исследовал разные классы многообразий. Поэтому неудивительно, что термин «многообразие Фано» употребляется в нескольких значениях).

Приведённое выше определение оправдывается следующим упражнением.

Упражнение 6. Многообразие Фано действительно является проективным алгебраическим многообразием (не обязательно неприводимым).

Задача 18.

a) Сколько компонент и какой размерности имеет многообразие Фано r-мерных линейных подпространств на квадрике?

b) Тот же вопрос для многообразия Фано r-мерных линейных подпространств на грассманиане $G(m, 1)$.

Задача 19. Опишите многообразие $F\big(G(m, 1), m-1\big)$.

Задача 20. Пусть $H_d \subset \mathbb{P}^N$ — общая гиперповерхность.

a) Найдите $\dim F(H_d, r)$.

b) Согласно задаче 5 a), $F(H_d, r) = \varnothing$ при $r \geqslant \dfrac{n}{2}$. Найдите все N и d, при которых $F\left(H_d, \left[\dfrac{n}{2}\right]\right) \neq \varnothing$.

Определение. Пусть Q — неособая n-мерная квадрика, и пусть $r = \left[\dfrac{n}{2}\right]$ (квадратные скобки обозначают целую часть). Неприводимая компонента многообразия $F(Q, r)$ линейных подпространств максимальной размерности называется *спинорным многообразием.*

Эти многообразия играют важную роль, но мы не будем сейчас заниматься ими подробнее.

Задача 21.

a) Пусть Q — неособая квадрика. Докажите, что каждая из неприводимых компонент спинорного многообразия $F(Q^{2k}, k)$ (проективно) изоморфна спинорному многообразию $F(Q^{2k-1}, k-1)$ (и, в частности, последнее многообразие неприводимо, а все компоненты первого изоморфны между собой; ср. задачу 18).

b) Пусть Q^3 — неособая трёхмерная квадрика. Опишите спинорное многообразие $F(Q^3, 1)$.

c) Согласно упражнению 2, $G(3, 1) = Q^4$. В задачах 18 и 19 описаны семейства плоскостей на этом четырёхмерном многообразии. Какие семейства прямых в $\mathbb{P}^3$ соответствуют этим семействам плоскостей?

Задача 22. Пусть Q^{2k} — неособая квадрика, и пусть L_1 и L_2 — два k-мерных линейных подпространства, лежащих на Q. Докажите, что L_1 и L_2 принадлежат к одному семейству k-мерных линейных подпространств на Q тогда и только тогда, когда $\dim(L_1 \cap L_2) \equiv k \pmod 2$ (ср. задачу 18 a); размерность пустого множества равна -1).