Конгруэнции прямых порядка один и кривые в трёхмерном проективном пространстве

Основной целью этого цикла задач является доказательство теоремы Куммера-Рана (задача 12). Однако продвигаться к этой цели мы будем не торопясь, внимательно осматривая окрестности, с тем, чтобы приобрести опыт и получить удовольствие от путешествия.

Напоминание. Пусть $G(3,1)$ — грассманиан прямых в $\mathbb{P}^3$. Тогда плюккеровы координаты задают вложение $G(3,1) \hookrightarrow \mathbb{P}^5$, отождествляющее $G(3,1)$ с (неособой) четырёхмерной квадрикой (вспомнить это, а также как устроены семейства линейных подпространств на квадрике!).

Определение. *Семейство прямых размерности* $1 \leqslant m \leqslant 4$ в $\mathbb{P}^3$ — это подмногообразие размерности m в $G(3,1)$. В частности, *конгруэнция прямых* в $\mathbb{P}^3$ — это поверхность $\Sigma \subset G(3,1)$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что Σ неприводимо.

Пример. Пусть $C_1, C_2 \subset \mathbb{P}^3$ — две кривые (в частности, C_2 может совпадать с C_1). Тогда замыкание множества прямых в $\mathbb{P}^3$, соединяющих общие точки C_1 с общими точками C_2, образует конгруэнцию прямых в $\mathbb{P}^3$. При $C_1 \neq C_2$ мы будем обозначать эту конгруэнцию через $\Sigma(C_1, C_2) \subset G(3,1) \subset \mathbb{P}^5$, а при $C_1 = C_2 = C$ — через $\Sigma(C) \subset G(3,1) \subset \mathbb{P}^5$.

Задача 1.

a) Найти поверхность $\Sigma(l_1, l_2)$ в случае, когда l_1 и l_2 — скрещивающиеся прямые;
b) Найти поверхность $\Sigma(l, K)$, где l — прямая, трансверсально пересекающая конику K в одной точке, $\langle l, K\rangle = \mathbb{P}^3$;
c) Найти поверхность $\Sigma(C)$ в случае, когда $C = v_3(\mathbb{P}^1)$ — рациональная кубическая кривая в $\mathbb{P}^3$

(все эти поверхности вам хорошо известны).

Задача 2. Предположим, что конгруэнция Σ может быть представлена в виде $\Sigma = \Sigma(C_1, C_2)$? Однозначно ли это представление? Другими словами, что можно сказать о кривых C_1', C_2', если $\Sigma(C_1, C_2) = \Sigma(C_1', C_2')$?

Определение. Пусть $\Sigma \subset G(3,1)$ — конгруэнция прямых. Количество прямых из Σ, проходящих через общую точку $\mathbb{P}^3$, называется *порядком* конгруэнции Σ. Количество прямых из Σ, лежащих в общей плоскости $\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^3$, называется *классом* конгруэнции Σ.

Упражнение 1. Доказать, что класс гомологий Σ в квадрике $G(3,1)$ определяется порядком и классом Σ.

Задача 3. Классифицировать все конгруэнции прямых порядка 0 в $\mathbb{P}^3$. То же для конгруэнций класса 0.

Задача 4. Пусть C_1, C_2, C — неприводимые кривые в $\mathbb{P}^3$, $C_1 \neq C_2$. Вычислить порядок и класс конгруэнции $\Sigma(C_1, C_2)$. Вычислить также класс конгруэнции $\Sigma(C)$, где $C \subset \mathbb{P}^3$ — неприводимая кривая.

Определение. Пусть $\Sigma \subset G(3,1)$ — конгруэнция прямых. Каждой прямой $l \subset \mathbb{P}^3$ соответствует прямая $l^* \subset \mathbb{P}^{3*}$, параметризующая плоскости, проходящие через l. Получаемая таким образом конгруэнция прямых Σ^* в двойственном пространстве $\mathbb{P}^{3*}$ называется *двойственной* конгруэнцией.

Задача 5. Вычислить порядок и класс Σ^*, если известны порядок и класс Σ.

Заметим, что аналогичные понятия можно рассмотреть и в более простой ситуации семейств прямых на плоскости (там конгруэнцией называется одномерное семейство прямых) и в более сложной ситуации семейств прямых в $\mathbb{P}^N$ (там конгруэнция — это $(N-1)$-мерное семейство прямых). Многомерный случай отложим на будущее, а в двумерном всё очень просто.

Упражнение 2. Вспомнить, что такое двойственная конгруэнция, порядок и класс для конгруэнций прямых на плоскости (эти понятия вам хорошо знакомы).

Вернёмся к конгруэнциям прямых в $\mathbb{P}^3$. В первую очередь нас будут интересовать конгруэнции прямых порядка один.

Задача 6.

a) Найти все конгруэнции прямых в $\mathbb{P}^3$ порядка один вида $\Sigma(C) \subset G(3,1)$;

b) То же для конгруэнций вида $\Sigma(C_1, C_2)$.

Существует несколько способов решения задачи 6, и все они по-своему поучительны. Если сразу задача не получится, попробуйте вернуться к ней в конце, перед решением задачи 12.

Определение. Многообразие $X \subset \mathbb{P}^N$ называется *вырожденным уровня* i, если X содержится в некотором линейном подпространстве $\mathbb{P}^{N-i} \subset \mathbb{P}^N$ и не содержится ни в каком линейном подпространстве $\mathbb{P}^{N-i-1} \subset \mathbb{P}^N$.

Гиперплоские сечения грассманиана $G(3,1)$ бывают гладкими и особыми. Согласно классической терминологии, особые гиперплоские сечения $G(3,1)$ называются *специальными* (линейными) *комплексами прямых.*

Упражнение 3. Пусть $l \subset \mathbb{P}^3$ — прямая, и пусть $H_l = \{m \in G(3,1) \mid m \cap l \neq \varnothing\}$. Доказать, что H_l — гиперплоское сечение $G(3,1)$ и что гиперплоское сечение $H \subset G(3,1)$ является специальным комплексом прямых тогда и только тогда, когда оно имеет вид $H = H_l$ для некоторой прямой $l \subset \mathbb{P}^3$.

В соответствии с данным выше определением, вырожденные конгруэнции прямых в $\mathbb{P}^3$ могут иметь уровень один, два или три и могут содержаться или не содержаться в специальном комплексе прямых.

Задача 7.

a) Доказать, что каждая вырожденная конгруэнция прямых порядка один в $\mathbb{P}^3$ содержится в специальном линейном комплексе.

b) Доказать, что вырожденные конгруэнции прямых $\Sigma \subset G(3,1)$ уровня один и порядка один бывают одного из следующих двух типов:

   b_1) $\Sigma = \Sigma(C_1, C_2)$ для подходящих кривых C_1 и C_2 (задачи 7 a) и 6 b) дают ответ на вопрос, какими именно должны быть C_1 и C_2!);

   b_2) Σ — конус над невырожденной неособой рациональной кривой в $\mathbb{P}^3$ (согласно задаче a), эта кривая лежит на неособой квадрике и имеет тип $(1, a)$, где $a \geqslant 2$).

c) Описать все вырожденные конгруэнции уровня два и порядка один в $\mathbb{P}^3$.

d) Описать все вырожденные конгруэнции уровня три и порядка один в $\mathbb{P}^3$.

Пусть $\Sigma \subset G(3,1)$ — произвольная конгруэнция прямых порядка один в $\mathbb{P}^3$. Положим

$$\mathcal{S} = \{(x, l) \in \mathbb{P}^3 \times \Sigma \mid x \in l\},$$

и обозначим через p и q проекции $\mathcal{S}$ на $\mathbb{P}^3$ и Σ соответственно. Слоем отображения q над точкой $l \in \Sigma$ является прямая, соответствующая l. С другой стороны, морфизм p бирационален.

Определение. Многообразие

$$Z = Z(\Sigma) = \{x \in \mathbb{P}^3 \mid \dim p^{-1}(x) \geqslant 1\}$$

называется *множеством вырождения* конгруэнции Σ.

Ясно, что $\dim Z \leqslant 1$.

Упражнение 4. Понять, что Z совпадает с множеством точек, в которых p не является изоморфизмом.

Упражнение 5. Доказать, что $Z \neq \varnothing$.

Задача 8. Пусть $\Sigma \subset G(3,1)$ — конгруэнция прямых порядка один. Доказать, что выполнено одно из следующих условий:

a) Многообразие Z — точка (в этом случае конгруэнция Σ описана в задаче 7 d)).

b) Все неприводимые компоненты $Z(\Sigma)$ являются кривыми.

Задача 9. Пусть $\Sigma \subset G(3,1)$ — конгруэнция прямых порядка один. Тогда Σ либо неособо, либо имеет одну особую точку.

a) С точностью до проективной эквивалентности существуют следующие четыре неособые конгруэнции порядка один (по одной для каждого уровня вырожденности):
   a_1) Σ вырождена уровня три (см. задачу 7 d));
   a_2) Σ вырождена уровня два (см. задачу 7 c));
   a_3) Σ вырождена уровня один (см. задачи 7 b_1)) и 1 b));
   a_4) Σ невырождена и имеет вид, описанный в задаче 1 c).

b) Существуют следующие две серии особых конгруэнций порядка один (все такие конгруэнции вырождены):
   b_1) Σ вырождена уровня один и имеет тип b_1) из задачи 7;
   b_2) Σ вырождена уровня один или два и имеет тип b_2) из задачи 7 с $a \geqslant 1$ (см. также задачу 7 c)).

Задача 10. Описать особые точки конгруэнций Σ из задачи 9 b). Найти и интерпретировать геометрически разрешение особенности этих конгруэнций.

Задача 11. Пусть $\Sigma \subset G(3,1)$ — конгруэнция прямых порядка один такая, что $\dim Z(\Sigma) = 1$. Доказать, что кривая $Z(\Sigma)$ может состоять либо из одной, либо из двух неприводимых компонент. В первом случае либо $\Sigma = \Sigma(C)$, где $C = Z$, либо Σ — особая вырожденная конгруэнция, описанная в задаче 9 b_2), а во втором $\Sigma = \Sigma(C_1, C_2)$, где $C_1 \cup C_2 = Z$.

Упражнение 6. Пусть $\Sigma \subset G(3,1)$ — конгруэнция прямых порядка один. Составив табличку возможных случаев, показать, что особость или неособость поверхности Σ определяется структурой множества вырождения $Z(\Sigma)$ (ср. задачи 9–11).

Теперь в вашем распоряжении есть всё необходимое, чтобы решить следующую задачу и, тем самым, доказать теорему Куммера-Рана (и даже несколькими способами!).

Задача 12. Классифицировать все конгруэнции прямых порядка один в $\mathbb{P}^3$ (т.е. описать семейства прямых и соответствующие поверхности $\Sigma \subset G(3,1)$).

Задание. Постарайтесь разобраться, что из сделанного вами переносится на конгруэнции прямых порядка один в $\mathbb{P}^4$ (т.е. трёхмерные семейства прямых в $\mathbb{P}^4$ такие, что через общую точку $\mathbb{P}^4$ проходит единственная прямая из семейства). Постарайтесь привести побольше примеров, получить побольше общих результатов и продвинуться как можно дальше по пути классификации.