Задачи о высшей нормальности и мультисекущих

Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ — проективное алгебраическое многообразие над алгебраически замкнутым полем K, и пусть $l \subset \mathbb{P}^N$ — прямая.

Определение 1. Прямая l называется *k-секущей* многообразия X, если l пересекает X не менее, чем в k точках (с кратностями). Точнее говоря, ограничения форм из идеала X в $\mathbb{P}^N$ на l задают однородный идеал на l. Ввиду однозначности разложения на множители в кольце многочленов от одного переменного, этот идеал главный. Если этот идеал нулевой или степень его образующей не меньше k, то l — k-секущая.

Пусть

$$M_k^0 = \Big\{(x_1, \dots, x_k; z) \in \underbrace{X \times \dots \times X}_{k \text{ раз}} \times \mathbb{P}^N \mid$$
$$x_i \neq x_j \text{ при } i \neq j, \dim \langle x_1, \dots, x_k \rangle = 1, \text{ и } z \in \langle x_1, \dots, x_k \rangle\Big\},$$

где $\langle A \rangle$ обозначает линейную оболочку множества $A \subset \mathbb{P}^N$. Положим $M_k = \overline{M_k^0}$, где черта обозначает проективное замыкание, и пусть $\varphi_k \colon M_k \to \mathbb{P}^N$ — проекция на последний сомножитель. Далее, пусть

$$\lambda_k^0 \colon M_k^0 \to G(N,1), \ \lambda_k^0 \colon (x_1, \dots, x_k; z) \mapsto \langle x_1, \dots, x_k \rangle$$

— естественное отображение в грассманиан $G(N,1)$ прямых в $\mathbb{P}^N$.

Упражнение 1. Доказать, что λ_k^0 продолжается до регулярного отображения $\lambda_k \colon M_k \to G(N,1)$.

Определение 2. Многообразия $S_k(X) = \varphi_k(M_k) \subset \mathbb{P}^N$ и $\Sigma_k(X) = \lambda(M_k) \subset G(N,1)$ называются *многообразиями k-секущих прямых* многообразия X. Точки многообразия Σ_k называются *k-секущими прямыми* многообразия X. Для точки $z \in \mathbb{P}^N$ многообразие $Y_k^z = \lambda_k(\varphi^{-1}(z))$ называется *многообразием k-секущих, проходящих через z*.

Как видим, с самого начала здесь возникает некоторая терминологическая путаница.

Задача 1. Доказать, что всякая k-секущая прямая в смысле определения 2 является k-секущей прямой в смысле определения 1. Верно ли обратное?

Задача 2. Пусть $C \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^3$ — кривая типа (a,b) на квадрике. Другими словами, если $(t_0 : t_1)$ — однородные координаты на первом, а $(u_0 : u_1)$ — на втором сомножителе $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, то C задаётся однородным уравнением степени a по t_i и степени b по u_j. Ещё можно сказать, что C линейно эквивалентна (или гомологична) дивизору $a \cdot * \times \mathbb{P}^1 + b \cdot \mathbb{P}^1 \times *$, где $*$ обозначает точку. Найдите многообразия $S_k(C)$ и $\Sigma_k(C)$.

Задача 3. Пусть многообразие $X \subset \mathbb{P}^N$ задаётся уравнениями, степени которых меньше k. Докажите, что каждая k-секущая прямая X содержится в X.

Таким образом, мы получаем убывающие фильтрации

$$\mathbb{P}^N = S_0(X) = S_1(X) \supset S_2(X) = SX \supset \dots \supset S_{k+1}(X) = S_\infty(X);$$
$$G(N,1) = \Sigma_0(X) \supset \Sigma_1(X) \supset \dots \supset \Sigma_{k+1}(X) = \Sigma_\infty(X),$$

где k — максимальная степень образующих однородного идеала X. Напомним, что многообразие $\Sigma_\infty(X)$ называется *многообразием Фано* многообразия X; в ряде случаев его структура была исследована в других списках задач.

Пример 1. Скрученная кубика $v_3(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^3$, являющаяся пересечением трёх квадрик, и полное пересечение двух квадрик в $\mathbb{P}^3$ дают примеры пространственных кривых, не имеющих трисекущих.

Задача 4. Докажите, что все кривые в $\mathbb{P}^3$, за исключением описанных в примере 1, обладают трисекущими. Более того, для таких кривых $\dim \Sigma_3(C) = 1$.

Задача 5. Пусть S^kX — k-ое многообразие секущих невырожденного многообразия $X \subset \mathbb{P}^N$ (т.е. замыкание многообразия, заметаемого k-мерными линейными подпространствами, натянутыми на $k+1$ общую точку X; не путать с $S_k(X)$!). Докажите, что S^kX не содержится ни в какой гиперповерхности степени, не превышающей $k+1$ (например, SX не содержится ни в какой квадрике). В частности, если $C \subset \mathbb{P}^{2k}$ — невырожденная кривая, то $S^{k-1}C$ — гиперповерхность, степень которой не меньше $k+1$. Попробуйте доказать, что единственная кривая, для которой имеет место равенство, — это нормальная рациональная кривая $C = v_{2k}(\mathbb{P}^1)$.

Задача 6. Пусть $X \subset \mathbb{P}^4$ — проекция поверхности Веронезе $v_2(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$ из точки $z \notin Sv_2(\mathbb{P}^2)$. Докажите, что $\Sigma_3(X)$ — конгруэнция прямых порядка один в $\mathbb{P}^4$.

Задача 7. Пусть $C = v_{2n+1}(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^{2n+1}$, $n \geq 1$ — нормальная рациональная кривая степени $2n+1$, и пусть $S^{n-1}C$ — $(2n-1)$-мерное $(n-1)$-ое многообразие секущих C. Обозначим через $X^n \subset \mathbb{P}^{n+2}$ сечение $S^{n-1}C$ общим линейным подпространством $\mathbb{P}^{n+2} \subset \mathbb{P}^{2n+1}$. Найдите особенности X и докажите, что $\Sigma_{n+1}(X)$ — конгруэнция прямых порядка один.

Задача 8. Пусть $X^n \subset \mathbb{P}^N$ — многообразие, для которого $S_k(X) = \mathbb{P}^N$. Докажите, что через произвольную точку $\mathbb{P}^N$ проходит не менее, чем $kn - (k-1)(N-1)$-мерное семейство k-секущих прямых многообразия X.

Задача 9. Пусть $X^n \subset \mathbb{P}^N$ — проективное многообразие такое, что $kn - (k-1)(N-1) > 0$. Докажите, что для каждой точки $z \in \mathbb{P}^N$ подмногообразие $\Sigma_k(X, z) \subset \Sigma_k(X) \subset G(N, 1)$, параметризующее k-секущие, проходящие через точку z, связно.

Задача 10. Пусть $X \subset \mathbb{P}^4$ — невырожденная поверхность.

a) Найдите все поверхности $X \subset \mathbb{P}^4$, для которых $S_3(X) = S_\infty(X)$.
b) Докажите, что если для поверхности $X \subset \mathbb{P}^4$ выполнено условие $S_3(X) \neq \mathbb{P}^4$, то либо X содержится в некоторой квадрике $Q \subset \mathbb{P}^4$, либо X заметается одномерной системой плоских кривых, степень которых не меньше трёх (этот результат принадлежит Ф. Севери).

Задача 11. Опишите все неприводимые невырожденные поверхности $X \subset \mathbb{P}^4$ такие, что $\Sigma_3(X) \subset G(4, 1)$ — вырожденная конгруэнция прямых в $\mathbb{P}^4$, т.е. $\dim \Sigma_3(X) = 3$ (ср. задачу 10) и $\Sigma_3(X) \subset \mathbb{P}^8$ для некоторой гиперплоскости $\mathbb{P}^8 \subset \mathbb{P}^9$. Какие из них имеют порядок один?

Задача 10 показывает, что для поверхности $X \subset \mathbb{P}^4$ как правило $\dim S_3(X) = 4$. С другой стороны, для невырожденной поверхности $X \subset \mathbb{P}^5$, как правило, $\dim S_3(X) = 3$ (вспомните задачу 9 и поясните смысл слов «как правило»!). Тем не менее, бывают и исключения (которые, по-видимому, можно классифицировать, но эта задача пока не решена).

Задача 12.

a) Пусть $C \subset \mathbb{P}^6$ — невырожденная кривая, и пусть SC — (трёхмерное) многообразие секущих C Обозначим через $X \subset \mathbb{P}^5$ общее гиперплоское сечение SC (ср. задачу 7). Найдите особенности поверхности X и докажите, что $S_3(X)$ — гиперповерхность в $\mathbb{P}^5$.
b) Докажите, что если $C = v_6(\mathbb{P}^1)$ — нормальная рациональная кривая степени шесть, то описанную в a) поверхность можно получить следующим способом (К. Сегре). Рассмотрим (неособую) плоскую конику и выберем на ней шесть точек $a_0, \ldots, a_5$. Пусть T_i — касательная прямая к конике в точке a_i, и пусть $b_{ij} = T_i \cap T_j$, $0 \le i \neq j \le 5$. Тогда X — образ $\mathbb{P}^2$ при отображении, задаваемом линейной системой квинтик (т.е. кривых степени пять), проходящих через точки b_{ij}.
c) Пусть $X = \mathbb{P}^5 \cap Sv_2(\mathbb{P}^3)$, где $Sv_2(\mathbb{P}^3) \subset \mathbb{P}^9$ — многообразие секущих трёхмерного многообразия Веронезе, а $\mathbb{P}^5 \subset \mathbb{P}^9$ — линейное подпространство. Докажите, что X — поверхность (неособая для общего $\mathbb{P}^5 \subset \mathbb{P}^9$), для которой $S_3(X)$ — квартика (т.е. гиперповерхность степени четыре). Интерпретируйте уравнение этой квартики. Докажите, что поверхность из задач a) и b) — частный случай поверхности из

задачи c).

Замечание. Неособые поверхности из задачи 12 c) дают примеры так называемых *поверхностей Энриквеса*, которые, помимо прочего, интересны тем, что имеют фундаментальную группу $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Попробуйте доказать этот факт.

Задача 13. Пусть $a_0, \ldots, a_N \in \mathbb{P}^N$, $\langle a_0, \ldots, a_N \rangle = \mathbb{P}^N$ — набор точек. Рассмотрим две гиперповерхности степени N, имеющие $a_0, \ldots, a_N$ особыми точками кратности $N-1$ (это означает, что если $F = 0$ — уравнение такой гиперповерхности, то все частные производные F порядка, не превышающего $N-2$, обращаются в нуль в точках a_i, $i = 0, \ldots, N$; кстати, что можно сказать о гиперповерхности степени d, имеющей особую точку кратности d или $d+1$?).

a) Докажите, что пересечение двух этих гиперповерхностей H_1 и H_2 содержит $\binom{N+1}{2}$ линейных подпространств коразмерности два, имеющих вид $\mathbb{P}_{i_0 \ldots i_{N-2}} = \langle a_{i_0}, \ldots, a_{i_{N-2}} \rangle$.

b) Пусть $X = H_1 \bigcap H_2 \setminus (\bigcup_{i_0 < \cdots < i_{N-2}} \mathbb{P}_{i_0 \ldots i_{N-2}}) \subset \mathbb{P}^N$ — многообразие коразмерности два и степени $\binom{N}{2}$. Докажите, что ни одно из уравнений X не может иметь степень меньше $N-1$. Опишите систему уравнений X степени $N-1$.

c) Докажите, что $\Sigma_{N-1}(X) \subset G(N, 1)$ — конгруэнция прямых порядка один в $\mathbb{P}^N$ (этот пример придумал Дж. Марлетта).

d) Опишите многообразие $\Sigma_{N-1}(X) \subset G(N, 1)$.

Задача 14. Пусть $X^n \subset \mathbb{P}^{n+2}$ — неприводимое многообразие коразмерности два такое, что $S_{n+1}(X) = \mathbb{P}^{n+2}$, и пусть $\Sigma = \Sigma_{n+1}(X)$ — соответствующая конгруэнция прямых.

a) Докажите, что если $\deg X \leq 2n+1$, то Σ — конгруэнция порядка один.

b) Докажите, что существует константа $d = d(n)$ такая, что если Σ — конгруэнция порядка один, то $\deg X \leq d$.

c) Постарайтесь вычислить константу $d = d(n)$ из пункта b). Классифицируйте многообразия X, для которых $\deg X = d$ (или хотя бы приведите соответствующие примеры).

d) Опишите все поверхности $X \subset \mathbb{P}^4$, для которых $\Sigma_3(X)$ — конгруэнция порядка один. Сравните определения 1 и 2 для этих поверхностей (см. задачу 1).

Перейдём к понятиям линейной нормальности и сильной линейной нормальности.

Определение 3. Невырожденное многообразие $X \subset \mathbb{P}^N$ называется *линейно нормальным*, если не существует невырожденного многообразия $\widetilde{X} \subset \mathbb{P}^{N+1}$ и точки $z \in \mathbb{P}^{N+1}$ таких, что проектирование с центром в z индуцирует изоморфизм $\widetilde{X} \xrightarrow{\sim} X$.

Определение 4. Невырожденное многообразие $X \subset \mathbb{P}^N$ называется *сильно линейно нормальным*, если не существует невырожденного многообразия $\widetilde{X} \subset \mathbb{P}^{N+1}$ и точки $z \in \mathbb{P}^{N+1}$ таких, что проектирование с центром в z индуцирует взаимно однозначное отображение $\widetilde{X} \to X$ (другими словами, $z \notin S\widetilde{X}$).

Упражнение 2. Докажите, что конечное множество точек $x_0 \cup \dots \cup x_N$ линейно нормально тогда и только тогда, когда они находятся в общем положении (т.е. $\langle x_0 \cup \dots \cup x_N \rangle = \mathbb{P}^N$).

Упражнение 3. Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ — конус над невырожденным многообразием $Y \subset \mathbb{P}^{N-1}$.

a) Докажите, что многообразие X линейно нормально.
b) Докажите, что если Y не является сильно линейно нормальным, то и X не может быть сильно линейно нормальным.

Упражнение 3 показывает, что понятия линейной нормальности и сильной линейной нормальности, очевидно совпадающие для неособых многообразий, вообще говоря, являются разными.

Задача 15.

a) Пусть $C \subset \mathbb{P}^N$, $3 \leq N \leq 4$ — кривая, не являющаяся сильно линейно нормальной. Докажите, что у C есть трисекущая (ср. задачу 4).
b) Постройте пример кривой $C \subset \mathbb{P}^5$ такой, что C не является линейно нормальной и не имеет трисекущих.

Задача 16.

a) Докажите, что все гиперповерхности в $\mathbb{P}^N$ линейно нормальны.
b) Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ — гиперповерхность (быть может, приводимая). Выясните, когда X сильно линейно нормальна.

Задача 17.

a) Докажите, что все многообразия коразмерности два в $\mathbb{P}^N$, $N \geq 5$ линейно нормальны.
b) Докажите, что проекция поверхности Веронезе $v_2(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$ из точки $z \in \mathbb{P}^5 \setminus Sv_2(\mathbb{P}^2)$ — это единственная поверхность в $\mathbb{P}^4$, не являющаяся линейно нормальной (этот результат принадлежит Ф. Севери).
c) Классифицируйте все многообразия коразмерности два в $\mathbb{P}^N$, $N \geq 4$, не являющиеся сильно линейно нормальными (для неприводимых многообразий эта классификация принадлежит Б. Эдвардсу).

Задача 18.

a) Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$, $N > 3$ — неособая невырожденная поверхность, пусть $L \subset \mathbb{P}^N$ — общее линейное подпространство коразмерности четыре, пусть $\pi_L \colon X \to \mathbb{P}^3$ — проектирование с центром в L, пусть $X' = \pi_L(X)$, и пусть $Y' = \operatorname{Sing} X'$ — кривая особенностей. Докажите теорему А. Франкетты: кривая Y' приводима тогда и только тогда, когда X — поверхность Веронезе $v_2(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$ или её изоморфная проекция в $\mathbb{P}^4$ (ср. задачу 17 b)).

b) Сформулируйте и докажите обобщение утверждения a), справедливое и для особых поверхностей $X \subset \mathbb{P}^N$.

Перейдём к понятию высшей нормальности.

Определение 5. Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ — невырожденное многообразие, m — натуральное число, и пусть $X_m = v_m(X) \subset \mathbb{P}^{\binom{N+m}{m}-e_m-1}$, где $v_m \colon \mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^{\binom{N+m}{m}-1}$ — отображение Веронезе, а $e_m = e_m(X)$ — число линейно независимых уравнений X степени m. Многообразие X называется *m-нормальным* (соотв. *сильно m-нормальным*), если многообразие X_m линейно нормально (соотв. сильно линейно нормально).

Определение 6. Невырожденное многообразие $X \subset \mathbb{P}^N$ называется *арифметически* (или *проективно*) *нормальным*, если X m-нормально для всех натуральных чисел m.

Задача 19. Пусть C — кривая типа (a, b) на квадрике $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^3$ (см. задачу 2). Найти все натуральные числа m, для которых C не является (сильно) m-нормальной.

Задача 20. Пусть $X^n \subset \mathbb{P}^{n+1}$, $n > 0$ — (быть может, приводимая) гиперповерхность. Докажите, что X проективно нормальна. Когда X не является сильно m-нормальной (ср. задачу 16)?

Задача 21. Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ — конус над невырожденным многообразием $Y \subset \mathbb{P}^{N-1}$. Докажите, что X проективно нормален. Когда X не является сильно m-нормальным?

Задача 22. Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$, и пусть $Y = H \cap X$, где $H \subset \mathbb{P}^N$ — гиперповерхность степени $l \geq 1$.

a) Предположим, что Y (сильно) m-нормально для некоторого натурального числа $m \leq l$. Тогда X также m-нормально.

b) Предположим, что Y арифметически нормально. Тогда X также арифметически нормально.

c) Покажите на примерах, что утверждение a) неверно для $m > l$ и что из m-нормальности (или арифметической нормальности) X вообще говоря не вытекает соответствующее свойство для Y.

Особенно простой смысл приобретает понятие m-нормальности для многообразий размерности нуль, состоящих из конечного числа точек. Такое многообразие m-нормально если и только если отображение Веронезе v_m переводит эти точки в общее положение.

Задача 23. Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ — m-нормальное многообразие размерности нуль. Тогда X задаётся уравнениями степени $m+1$.

Задача 24. Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ — невырожденное многообразие размерности нуль и степени d.

a) Докажите, что X m-нормально при всех $m \geq d - N$.
b) Опишите все X, не являющиеся $(d-N-1)$-нормальными.
c) Докажите, что если X не имеет 3-секущих, то X m-нормально при всех $m \geq \frac{d-N+1}{2}$.
d) При каких m можно гарантировать m-нормальность X, если X не имеет k-секущих?
e) Что можно сказать об определяющих уравнениях многообразия X, основываясь на a)–e) и задаче 23?

Задача 25. Пусть $l \subset \mathbb{P}^3$ — прямая, и пусть $C \subset \mathbb{P}^3$ — кривая степени $d > 3$, для которой конгруэнция $\Sigma(l, C)$, образованная прямыми, соединяющими точки l с точками C, имеет порядок один (см. список задач о конгруэнциях в $\mathbb{P}^3$).

a) Проверьте, что кривая C не является $(d-3)$-нормальной, но m-нормальна при всех $m \geq d - 2$.
b) Попробуйте доказать, что все остальные пространственные кривые степени d m-нормальны для всех $m \geq d - 3$.
c) Попробуйте доказать, что все кривые степени d в $\mathbb{P}^3$ задаются уравнениями степени не выше $d - 1$. Более того, все кривые степени d в $\mathbb{P}^3$, за исключением описанных в пункте a), задаются уравнениями степени не выше $d - 2$ (ср. задачи 23 и 24).

Задача 26. Пусть Σ — конгруэнция прямых в $\mathbb{P}^N$, соответствующая пересечению грассманиана $G(N, 1)$ с общим линейным подпространством $\mathbb{P}^{\binom{N+1}{2}-1}$ коразмерности $N - 1$.

a) Докажите, что Σ — конгруэнция порядка один, образованная $(N-1)$-секущими некоторого многообразия $X \subset \mathbb{P}^N$ коразмерности два.

b) При каких N многообразие X неособо? Как выглядит X при $N = 2$, $N = 3$ и $N = 4$? Что можно сказать о структуре X при $N = 5$?

c) Выпишите уравнения X (это миноры некоторой матрицы). Какова их степень? Какова степень многообразия X?

d) Пусть $z \in \mathbb{P}^N$ — общая точка. Из a) следует, что Y^z_{N-1} состоит из одной точки. А как выглядит Y^z_{N-2}?

e) Докажите, что многообразие X сильно m-нормально при $m < N - 3$, но не является таковым при $m = N - 3$ (при $N = 4$ этот результат вам хорошо знаком).

f) Сформулируйте и попробуйте доказать результат, аналогичный теореме Франкетты из задачи 18, для проекций n-мерных многообразий в $\mathbb{P}^{n+2}$.

Следующую задачу уместнее было бы поместить в разделе о мультисекущих; она оказалась здесь потому, что непосредственно связана с предыдущей задачей.

Задача 27. Пусть $L \subset \mathbb{P}^N$ — линейное подпространство коразмерности два, и пусть $H_L = \{l \in G(N, 1) \mid l \cap L \neq \varnothing\}$ — соответствующее гиперплоское сечение грассманиана (см. упражнение 4 в списке задач о квадриках и грассманианах; традиционно H_L называется *специальным линейным комплексом,* соответствующим L). Пусть Σ — конгруэнция прямых, соответствующая пересечению H_L с общим линейным подпространством $\mathbb{P}^{\binom{N+1}{2}-1}$ коразмерности $N-2$ (ср. задачу 26). Наконец, пусть $M \supset L$ — произвольная гиперплоскость, и пусть $\Sigma_M = \Sigma \cap G(M, 1) = \{l \in \Sigma \mid l \subset M\}$.

a) Докажите, что Σ — конгруэнция прямых порядка один, образованная $(N-2)$-секущими некоторого многообразия $X \subset \mathbb{P}^N$, $\operatorname{codim}_{\mathbb{P}^N} X = 2$, пересекающими L.

b) Выпишите уравнения X (это миноры некоторой матрицы). Какова их степень?

c) Докажите, что Σ_M — конгруэнция прямых порядка один в $\mathbb{P}^{N-1} = M$, образованная $(N-2)$-секущими многообразия $X \cap M \subset \mathbb{P}^{N-1}$.

d) Что за многообразие X получается при $N = 3$, $N = 4$, $N = 5$, в общем случае (вы встречались с ним в этом списке задач)?

e) Какие конгруэнции получатся, если положить $\Sigma = H_{L_1} \cap \cdots \cap H_{L_r} \cap \mathbb{P}^{\binom{N+1}{2}-(N-r)}$, где $L_1, \ldots, L_r$ — линейные подпространства коразмерности два в $\mathbb{P}^N$, а $\mathbb{P}^{\binom{N+1}{2}-(N-r)} \subset \mathbb{P}^{\binom{N+1}{2}-1}$ — общее линейное подпространство? Исследуйте их многообразия подскока. Выпишите уравнения компонент коразмерности два. Приведите примеры при малых N.