Высший Математический Колледж

Математический анализ 1-й курс 17 февраля 1999 года

Пусть $x^0 = (x^0_1, \cdots, x^0_n) \in \mathbb{R}^n$ — точка $n-$мерного пространства, $\bar{a}(a_1, \cdots, a_n)$ — вектор, приложенный к точке x^0, а $f(x)$ — функция n переменных, дифференцируемая в точке x^0. Тогда (см. задачу 5 предыдущего занятия)

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{a}}(x^0) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0).$$

Обозначим через $B(x^0, r) \subset \mathbb{R}^n$ шар радиуса r с центром в точке x^0.
Определение 1. *Дифференцированием* в точке $x^0 \in \mathbb{R}^n$ называется линейное отображение D, сопоставляющее каждой дифференцируемой в точке x^0 функции f число $D(f)$ так, что при этом для всех функций f, g выполняется равенство (называемое *тождеством Лейбница*)

$$D(fg) = f(x^0)D(g) + D(f)g(x^0).$$

1. Докажите, что для любого вектора $\bar{a}(a_1, \cdots, a_n)$, приложенного к точке x^0, $\dfrac{\partial}{\partial \bar{a}}$ является дифференцированием в точке x^0.

2. Доказать, что дифференцирование D на $C^\infty(B(x^0, r))$ является дифференцированием по направлению некоторого вектора $\bar{a}$, т.е. $D(f) = \dfrac{\partial f}{\partial \bar{a}}(x^0)$.

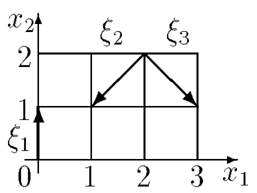
   Указание. (Лемма Адамара) Пусть $f \in C^\infty(B(0, r))$ и $f(0) = 0$. Доказать, что существуют такие функции $g_i \in C^\infty(B(0, r)), i = 1, \ldots, n$, что $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x)$, причем $g_i(0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(0)$.

   Множество всех векторов $\bar{a}$, приложенных к точке x^0, называется *касательным пространством* к $\mathbb{R}^n$ в точке x^0 и обозначается $T_{x^0}\mathbb{R}^n$.

   Дифференциалом $df(x^0)$ функции f в точке x^0 называется линейная функция на касательном пространстве $df : T_{x^0}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, задаваемая формулой

$$df(x^0)\bar{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0).$$

3. Найдите значения дифференциалов dx_1, $dx_1 x_2$, $d(x_1^2 + x_2^2)$ на касательных векторах, изображенных на рисунке.



Пространство линейных функций на $T_{x^0}\mathbb{R}^n$ называется *кокасательным пространством* в точке x^0 и обозначается $T^*_{x^0}\mathbb{R}^n$.

4. Докажите, что дифференциалы координатных функций $dx_1, \dots, dx_n$ образуют базис в этом пространстве. Разложите по этому базису дифференциал произвольной функции. (Ответ: $df = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$).

5. Пусть γ — линия уровня функции $f(x,y)$, проходящая через точку (x_0,y_0). Напишите уравнение касательной к γ в точке (x_0,y_0) с помощью df.

   Если в касательном пространстве $T_{x^0}\mathbb{R}^n$ задано скалярное произведение, то линейной форме df каноническим образом отвечает некоторый вектор из $T_{x^0}\mathbb{R}^n$, называемый *градиентом* f и обозначаемый $\mathrm{grad} f$:
$$\mathrm{grad} f \cdot a = df(a).$$

6. Как вектор $\mathrm{grad} f$ расположен относительно линии уровня γ?

7. Пусть $\gamma(t)$ — гладкая кривая на плоскости, причем $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$, а $\dot\gamma(t_0) = (a,b)$ — касательный вектор к $\gamma(t)$ в точке t_0 ($\dot\gamma(t_0) \in T_{(x_0,y_0)}\mathbb{R}^2$). Пусть $f(x,y)$ — гладкая функция двух переменных. Доказать, что $\dfrac{d}{dt}f(\gamma(t))\Big|_{t=t_0} = df(x_0,y_0)\big(\dot\gamma(t_0)\big)$.

8. Пусть $f = f(r)$, где $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Вычислить
$$df, \quad y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)f.$$

9. Доказать, что если дифференцируемая функция $u = f(x,y)$ удовлетворяет уравнению $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = nu$, то она однородна порядка n (т.е. $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$).