Высший Математический Колледж

Математический анализ 1-й курс 24 февраля 1999 года

1. Под каким углом пересекаются гиперболы $x^2+y^2=a; \quad xy=b$?

2. Вычислить дифференциалы следующих функций:

   (a) $f:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}, \quad f(a,b)=a\cdot b, \quad a,b\in\mathbb{R}^n$ (скалярное произведение);

   (b) $f:\mathbb{R}^{n^2}\to\mathbb{R}, \quad f(A)=\mathrm{trA}$;

   (c) $f:\mathbb{R}^{n^2}\to\mathbb{R}, \quad f(A)=\det A$;

   Теорема. *Если частные производные до второго порядка функции f непрерывны, то ее смешанные частные производные совпадают:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}.$$

3. Приведите пример функции двух переменных, для которой

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}.$$

   Символ $\alpha:=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, состоящий из целых неотрицательных чисел, называется *мультииндексом.* Обозначения:

$$|\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_n; \quad \alpha!=\alpha_1!\dots\alpha_n!;$$

$$a^\alpha=a^{\alpha_1}\dots a^{\alpha_n} \text{ для } a=(a_1,\dots,a_n);$$

$$D^\alpha f(x)=\frac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}(x) \text{ для } f=f(x_1,\dots,x_n).$$

4. Доказать, что если $k\in\mathbb{N}$, то

$$(a_1+\dots+a_n)^k=\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}a^\alpha.$$

5. *Формула Тейлора в мультииндексах.* Докажите, что формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа можно записать в виде

$$f(x+\Delta x)=\sum_{|\alpha|=0}^{m}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(x)\Delta x^\alpha+\sum_{|\alpha|=m+1}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(x+\xi\Delta x)\Delta x^\alpha, \quad \xi\in[0,1].$$

6. Вычислить

$$\frac{\partial^{50}f}{\partial x^{24}\partial y^{26}}(0,0) \text{ для } f=\sin(x^2+y^2).$$

7. Нарисуйте следующие кривые, заданные параметрически:

$$\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos^2 t \end{cases} \quad \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = e^{\pm t}\cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = \cos t \end{cases} \quad \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2t^3 - 3t \\ y = t^4 - t^2 \end{cases}$$

Математический анализ 1-й курс 3 марта 1999 года

Теорема (о неявной функции). *Пусть частные производные функции F двух переменных непрерывны в точке (x_0, y_0) и пусть $F(x_0, y_0) = 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда существует и единственна функция $\varphi(x)$, заданная в некоторой окрестности точки x_0, удовлетворяющая уравнению $F(x, \varphi(x)) = 0$. Более того, функция φ дифференцируема и ее производная выражается формулой*

$$\varphi'(x_0) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

1. Выведите из теоремы о неявной функции теорему об обратной функции: *пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и дифференцируема в точке x_0, причем $f'(x_0) \neq 0$. Тогда f задает взаимно-однозначное соответствие некоторой окрестности точки x_0 на некоторую окрестность точки $y_0 = f(x_0)$, т.е. функция f обладает обратной функцией $f^{-1}(y)$ ($f^{-1}(f(x)) \equiv x$). Обратная функция дифференцируема и ее производная выражается формулой $f^{-1\prime}(y_0) = 1/f'(x_0)$.*

2. Пусть $y = y(x)$ — заданная функция, $y(x_0) = 0$. Выразите константы разложения $x = x(y) = x_0 + Ay + By^2 + o(y^2)$ через производные функции y.

3. Функция $y = \varphi(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$.

   (a) Докажите, что если F бесконечно дифференцируема, то и φ бесконечно дифференцируема.

   (b) Выразите φ'' через частные производные функции F.

4. Нарисуйте следующие кривые. Найдите особые точки, вертикальные и горизонтальные касательные. Найдите несколько членов ряда Тейлора для функций $y(x)$ и $x(y)$ в точке (x_0, y_0).

   (a) $x^2 + xy + y^2 = 1$; $\quad (x_0, y_0) = (0, 1)$;

   (b) $x^3 + y^3 = 2xy$, $x^4 + y^4 = 2xy$; $\quad (x_0, y_0) = (0, 0), (1, 1)$;

   (c) $(x^2 - y^2)^2 + x^2 + y^2 = 100$; $\quad$ г) $(x^2 - y)^3 + x^2 + y^2 = 100$.