Высший Математический Колледж

Математический анализ 1-й курс 10 марта 1999 года

Контрольная работа

1. Построить кривые

$$\text{(a)}\quad x^4+y^4=x^2y \qquad \text{(b)}\quad \begin{cases} x=\sin 3t \\ y=\sin 5t \end{cases}.$$

2. Найти производную функции $z=\ln(x^2+y^2)$ в точке $M(x_0,y_0)$ в направлении, перпендикулярном к линии уровня, проходящей через эту точку.

3. Пусть функция $u=u(x,y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

и условиям $u(x,2x)=x$; $u'_x(x,2x)=x^2$.
Найти $u''_{xx}(x,2x)$; $u''_{xy}(x,2x)$; $u''_{yy}(x,2x)$.

Занятие

Теорема (принцип сжимающих отображений). *Пусть M — полное метрическое пространство. Пусть отображение $A: M\to M$ удовлетворяет условию $\rho(Ax,Ay)\leqslant\alpha\rho(x,y)$ $\forall x,y$ с некоторой константой $\alpha<1$. Тогда у отображения A существует и единственна неподвижная точка x ($Ax=x$).*

1. Докажите теорему. Покажите, что для любой начальной точки x_0 выполняется оценка $\rho(A^kx_0,x)\leqslant s\dfrac{\alpha^k}{1-\alpha}$, где $s=\rho(Ax_0,x_0)$.

2. Пусть отображение $A: M\to M$ полного метрического пространства M в себя удовлетворяет условию $\rho(Ax,Ay)<\rho(x,y)$ $\forall x,y$. Верно ли, что у отображения A существует неподвижная точка?

3. Докажите, что уравнение $x=x^3+0.001$ имеет корень вблизи нуля. Найдите его первые 5–10 десятичных знаков.

4. Докажите, что система

$$\begin{cases} x=(x^2+y^2)/100 \\ y=(xy^2+0.1)/100 \end{cases}$$

имеет решение вблизи нуля. Найдите это решение с точностью до 10^{-10}.

5. Как переписать уравнение $x^2 = 2$, чтобы для его решения можно было применить принцип сжимающих отображений? Годится ли $x = \dfrac{2}{x}$?

6. Решая уравнение $x^2 - ax + b = 0$, его переписали в виде $x = a - \dfrac{b}{x}$. При каких a, b, x_0 процесс последовательных приближений сходится? К какому из двух корней (если они есть)?

   Для того, чтобы расширить область начальных приближений x_0, при которых итерационный процесс сходится, уравнение переписали в виде $x^2 + cx = (c+a)x - b$ и преобразовали к
$$x = \frac{(c+a)x - b}{x+c}.$$
   Как правильно подобрать число c?

7. Докажите, что всякое непрерывное отображение (a) отрезка $[0,1]$, (b) диска D^2 в себя имеет неподвижную точку.

8. Докажите, что среди решений системы от бесконечного числа переменных
$$x_n = \frac{1}{5}(x_{n+1} + x_{n-1}) + \frac{1}{1+n^2}\ ; \quad n \in \mathbf{Z}$$
   существует и единственно ограниченное.

9. Пусть $\varphi_0(x) = x + \sin x$, $\varphi_1(x) = \varphi_0(\varphi_0(x))$, $\ldots$, $\varphi_n(x) = \varphi_0(\varphi_{n-1}(x))$. Что можно сказать о $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x)$?