О конгруэнциях прямых порядка 1 в $\mathbb{P}^3$

Ф. Л. Зак, А. В. Иншаков, С. М. Львовский, А. А. Обломков

Введение

В настоящей работе мы уточняем и передоказываем классический результат Куммера — классификацию конгруэнций прямых порядка 1 в трехмерном проективном пространстве. Ранее этот результат был восстановлен Раном [1]; мы надеемся, что доказательства и формулировки основных результатов (теорема 4.7) более геометрически наглядны, чем в статье Рана. Во всяком случае, наши доказательства совершенно отличны от приведенных в статье [1].

1. Обозначения и соглашения

Мы будем считать, что основное поле алгебраически замкнуто и имеет характеристику нуль.

Через $\mathbf{G} = G(1,3)$ мы будем обозначать грассманиан прямых в $\mathbb{P}^3$. Если не оговорено противное, мы будем отождествлять $\mathbf{G}$ с плюккеровой квадрикой в $\mathbb{P}^5$. Если $\alpha \in G$ — точка, то соответствующая прямая будет обозначаться $l_\alpha \subset \mathbb{P}^3$; если $l \subset \mathbb{P}^3$ — прямая, то ей соответствует точка $\alpha_l \in \mathbf{G}$.

Пусть $a \in \mathbb{P}^3$ — точка и $S \subset \mathbb{P}^3$ — плоскость; положим $\mathbb{P}^2(a) = \{\, \alpha \in \mathbf{G} : l_\alpha \ni a \,\}$ и $\mathbb{P}^2(S) = \{\, \alpha \in \mathbf{G} : l_\alpha \subset S \,\}$. Тогда $\mathbb{P}^2(a)$ и $\mathbb{P}^2(S)$ являются плоскостями, лежащими на $\mathbf{G}$, и всякая плоскость, лежащая на $\mathbf{G}$, имеет вид либо $\mathbb{P}^2(a)$, либо $\mathbb{P}^2(S)$; линейные пространства размерности, большей, чем 2, в $\mathbf{G}$ не содержатся. Всякая прямая, лежащая на $\mathbf{G}$, имеет вид $\mathbb{P}^1(a,S) = \mathbb{P}^2(a) \cap \mathbb{P}^2(S)$, где $a \in S$.

Для всякого подмножества $\Sigma \subset \mathbf{G}$ положим $\tilde{\Sigma} = \bigcup_{\alpha\in\Sigma} l_\alpha \subset \mathbb{P}^3$; если $a \in \mathbb{P}^3$, то положим $\Sigma_a = \Sigma \cap \mathbb{P}^2(a)$.

Множество прямых, пересекающих данную прямую $l \subset \mathbb{P}^3$, будем обозначать H_l. Как известно, $H_l = T_{\alpha_l}\mathbf{G} \cap \mathbf{G}$. Будем называть такие линейные сечения грассманиана *специальными линейными комплексами.*

Определение 1.1. *Конгруэнцией прямых* в $\mathbb{P}^3$ называется неприводимая проективная поверхность $\Sigma \subset \mathbf{G}$.

Определение 1.2. Пусть Σ — конгруэнция прямых в $\mathbb{P}^3$. *Порядком* Σ называется количество прямых из Σ, проходящих через общую точку $\mathbb{P}^3$; *классом* Σ называется количество прямых из Σ, лежащих в общей плоскости в $\mathbb{P}^3$. Класс и порядок конгруэнции Σ обозначаются $\mathrm{cl}(\Sigma)$ и $\mathrm{ord}(\Sigma)$ соответственно.

Поскольку классы $[\mathbb{P}^2(a)]$ и $[\mathbb{P}^2(S)]$ являются образующими в группе Чжоу 2-циклов на $\mathbf{G}$ и $[\mathbb{P}^2(a)] + [\mathbb{P}^2(S)]$ есть класс линейного сечения $\mathbf{G}$ коразмерности 2, имеем $\deg \Sigma = \mathrm{ord}(\Sigma) + \mathrm{cl}(\Sigma)$ для всякой конгруэнции $\Sigma \subset \mathbf{G}$.

Если $\Sigma \subset \mathbf{G}$ — конгруэнция, то можно определить *двойственную* конгруэнцию Σ^*, состоящую из прямых в двойственном проективном пространстве $(\mathbb{P}^3)^*$. По определению, $\Sigma^* = \{\, l_\alpha^\perp : \alpha \in \Sigma \,\}$. При переходе к двойственной конгруэнции Σ^* порядок и класс меняются местами: $\mathrm{ord}(\Sigma^*) = \mathrm{cl}(\Sigma)$, $\mathrm{cl}(\Sigma^*) = \mathrm{ord}(\Sigma)$.

В заключение этого раздела опишем конгруэнции порядка 0 и конгруэнции класса 0. Это очень просто:

Лемма 1.3. *Пусть* $\Sigma \subset \mathbf{G}$ *— конгруэнция в* $\mathbb{P}^3$*. Тогда:*

- $\mathrm{cl}(\Sigma) = 0 \Leftrightarrow \Sigma = \mathbb{P}^2(L)$ *для некоторой плоскости* $L \subset \mathbb{P}^3$
- $\mathrm{ord}(\Sigma) = 0 \Leftrightarrow \Sigma = \mathbb{P}^2(x)$ *для некоторой точки* $x \in \mathbb{P}^3$

Доказательство. Если $\mathrm{cl}(\Sigma) = 0$, то $S = \tilde{\Sigma} \subset \mathbb{P}^3$– некоторая поверхность. Поскольку всякая поверхность, содержащая двумерное семейство прямых, является плоскостью (доказательство: через общую точку такой поверхности проходит одномерное семейство прямых, так что поверхность — конус с вершиной в почти любой своей точке, и вложенное касательное пространство Зарисского к поверхности в ее общей точке x совпадает с линейной оболочкой поверхности; выбрав неособую x, получаем все, что требуется), получаем, что S — плоскость и $\Sigma = \mathbb{P}^2(S)$. Этим доказано первое утверждение; второе получается из первого переходом к двойственной конгруэнции. $\square$

2. Конгруэнции, связанные с кривыми

Пусть $C_1, C_2 \subset \mathbb{P}^3$ — две кривые (C_1 может совпадать с C_2). Тогда замыкание множества прямых в $\mathbb{P}^3$, соединяющих общие точки C_1 с общими точками C_2, образует конгруэнцию прямых в $\mathbb{P}^3$. Мы будем обозначать эту конгруэнцию через $\Sigma(C_1, C_2) \subset \mathbf{G}$; будем также писать $\Sigma(C)$ вместо $\Sigma(C, C)$. Класс таких конгруэнций легко вычисляется:

Предложение 2.1. *Если $C_1 \neq C_2$ — две кривые в $\mathbb{P}^3$ и $\deg C_i = d_i$, то $\mathrm{cl}(\Sigma(C_1, C_2)) = d_1 d_2$; если $C \subset \mathbb{P}^3$ — кривая степени d, то $\mathrm{cl}(\Sigma(C)) = d(d-1)/2$.*

Доказательство. Рассмотрим общую плоскость $L \subset \mathbb{P}^3$. Тогда $\#(L \cap C_i) = d_i$. Поэтому $\#(\Sigma \cap \mathbb{P}^2(L)) = d_1 \cdot d_2$, так как любая прямая из Σ, содержащаяся в L_0^2, проходит через одну точку C_1 и одну точку C_2. Аналогично вычисляется $\mathrm{cl}(\Sigma(C))$. □

Чтобы подсчитать порядок $\Sigma(C_1, C_2)$, введем такое

Определение 2.2. Пусть $C_1 \neq C_2$ — две кривые в $\mathbb{P}^3$ и $x \in C_1 \cap C_2$. Тогда *кратностью* x как точки пересечения C_1 и C_2 назовем кратность пересечения кривых $\pi(C_1)$ и $\pi(C_2)$ в точке $\pi(x)$, где π — общая проекция из $\mathbb{P}^3$ в $\mathbb{P}^2$.

Если C_1 и C_2 неособы в точке x, причем $T_x C_1 \neq T_x C_2$, то кратность пересечения C_1 и C_2 в точке x равна, очевидно, единице.

Предложение 2.3. *Если $C_1 \neq C_2$ — две кривые в $\mathbb{P}^3$ и $\deg C_i = d_i$, то $\mathrm{ord}(\Sigma(C_1, C_2)) = d_1 \cdot d_2 - \#(C_1 \cap C_2)$, где точки пересечения считаются с учетом кратности.*

Доказательство. Пусть $x \in \mathbb{P}^3$ -общая точка и $\pi_x \colon \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$. Тогда каждой прямой из конгруэнции, проходящей через x, соответствует точка пересечения кривых $\tilde{C}_i = \pi_x(C_i)$ ($\deg \tilde{C}_i = d_i$), которая не является проекцией точки пересечения C_1 и C_2 в $\mathbb{P}^3$. Теперь все следует из теоремы Безу. □

Основную роль в наших дальнейших рассуждениях будет играть следующий факт.

Предложение 2.4. *Пусть имеется конгруэнция $\Sigma = \Sigma(C_1, C_2) = \Sigma(C_1', C_2')$, где $C_1, C_2, C_1', C_2' \subset \mathbb{P}^3$ — некоторые кривые, возможно совпадающие. Тогда либо Σ состоит из всех прямых, лежащих в некоторой плоскости $S \subset \mathbb{P}^3$, либо $\{C_1, C_2\} = \{C_1', C_2'\}$.*

Доказательство. Начнем с двух лемм.

Лемма 2.5. *1) Пусть $B_1 \neq B_2 \subset \mathbf{G}$ — два одномерных неприводимых семейства прямых в $\mathbb{P}^3$, обладающие следующим свойством: для общих $\alpha_1 \in B_1, \alpha_2 \in B_2$ имеем $l_{\alpha_1} \cap l_{\alpha_2} \neq \varnothing$. Тогда либо существует точка $p \in \mathbb{P}^3$, через которую проходят все прямые обоих семейств, либо поверхности $S_1 = \overline{\bigcup_{\alpha \in B_1} l_\alpha}$ и $S_2 = \overline{\bigcup_{\alpha \in B_2} l_\alpha}$, заметаемые прямыми обоих семейств, совпадают.*

2) Пусть $B \subset \mathbf{G}$ — одномерное неприводимое семейство прямых в $\mathbb{P}^3$, обладающее следующим свойством: для общих $\alpha_1, \alpha_2 \in B_1$ имеем $l_{\alpha_1} \cap l_{\alpha_2} \neq \varnothing$. Тогда либо существует точка $p \in \mathbb{P}^3$, через которую проходят все прямые семейства, либо существует плоскость $S \subset \mathbb{P}^3$, в которой содержатся все прямые семейства.

Доказательство леммы 2.5. (1) Рассмотрим общую $\alpha \in B_1$. Если точки пересечения $l_\alpha \cap l_\beta$ варьируются при вариации $\beta \in B$, то $l_\alpha \subset S_2$, и $S_1 = S_2$. В противном случае существует точка $p \in l_\alpha$, через которую проходят все прямые l_β для $\beta \in B_2$, так что S_2 — конус с вершиной p. Теперь очевидно, что либо $S_1 = S_2$, либо все прямые семейства B проходят через точку p.

(2) Если $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{G}$, то $l_{\alpha_1} \cap l_{\alpha_2} \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда вся прямая $\overline{\alpha_1, \alpha_2}$ лежит на $\mathbf{G}$. Стало быть, линейная оболочка B содержится в $\mathbf{G}$. Принимая во внимание описание линейных подпространств на $\mathbf{G}$, получаем наше утверждение. □

Лемма 2.6. *Пусть C_1 и C_2 — две кривые в $\mathbb{P}^3$ (не обязательно различные), обладающие следующим свойством: для общих $x \in C_1$ и $y \in C_2$ имеем $T_xC_1 \cap T_yC_2 \neq \varnothing$. Тогда существует плоскость $L \subset \mathbb{P}^3$, содержащая C_1 и C_2.*

Доказательство леммы 2.6. Рассмотрим семейство прямых в двойственном проективном пространстве $(\mathbb{P}^3)^*$, являющееся замыканием семейства прямых вида $(T_xC_1)^\perp$ (соответственно, $(T_yC_2)^\perp$), где x пробегает неособые точки кривой C_1, а y пробегает неособые точки кривой C_2. Заметим, что объединения прямых этих семейств совпадают с $(C_1)^*$ и $(C_2)^*$ соответственно. Из условия следует, что общая прямая первого семейства пересекается с общей прямой второго семейства. Применяя лемму 2.5, получаем, что либо $(C_1)^*$ и $(C_2)^*$ являются конусами с общей вершиной, либо $(C_1)^* = (C_2)^*$. В первом случае теорема о проективной двойственности показывает, что C_1 и C_2 лежат в одной и той же плоскости, что и утверждается леммой, а во втором — что $C_1 = C_2$. В этом случае, применяя еще раз лемму 2.5, получаем, что $(C_1)^*$ содержится в плоскости, откуда имеем, что $C_1 = C_2$ — прямая. Лемма доказана. $\square$

Вернемся теперь к доказательству предложения. Достаточно убедиться, что $\{C_1', C_2'\} \subset \{C_1, C_2\}$. Предположим противное; тогда можно считать, что кривая C_1' отлична как от C_1, так и от C_2. Для общих $x \in C_1$ и $y \in C_2$ имеем $\overline{xy} = \overline{zw}$, где $z \in C_1'$ и $w \in C_2'$. Поскольку $C_1' \notin \{C_1, C_2\}$, получаем, что точка z варьируется при вариации $x \in C_1$ или $y \in C_2$. Следовательно, $C_1' \subset x * C_2$ и $C_1' \subset y * C_1$ для общих $x \in C_1$ и $y \in C_2$. Отсюда

$$T_w C_1' \subset (x * T_y C_1) \cap (y * T_x C_2). \tag{2.1}$$

Если линейное пространство в правой части (2.1) двумерно, то $T_x C_1 \cap T_y C_2 \neq \varnothing$, и лемма 2.6 показывает, что C_1 и C_2 лежат в одной плоскости S, так что конгруэнция $\Sigma(C_1, C_2) = \Sigma(C_1', C_2')$ состоит из всех прямых, лежащих в S. Если же это пространство одномерно, то оно совпадает с прямой $\overline{xy}$, каковая, по доказанному, касается кривой C_1'. Получается, что все прямые из нашей конгруэнции касаются кривой C_1', что невозможно по соображениям размерности. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

3. Примеры конгруэнций порядка 1

Разбирая примеры конгруэнций порядка 1, мы будем отдавать предпочтение геометрическим рассуждениям перед вычислениями в координатах.

Пример 3.1. Пусть l_1 и l_2 — скрещивающиеся прямые. Тогда, очевидно, $\Sigma(l_1, l_2)$ является конгруэнцией порядка и класса 1. Покажем, что поверхность $\Sigma(l_1, l_2) \subset \mathbf{G}$ есть неособая квадрика — сечение $\mathbf{G}$ линейным подпространством коразмерности 2. В самом деле, так как $\Sigma(l_1, l_2) = H_{l_1} \cap H_{l_2}$, то $\Sigma(l_1, l_2)$ лежит в линейном подпространстве коразмерности 2 и, следовательно, является неприводимой квадрикой; эта квадрика не может быть конусом, так как в этом случае в конгруэнции была бы всего одна прямая (а именно, вершина конуса) через каждую точку которой проходило бы одномерное семейство прямых из конгруэнции. Следовательно, квадрика неособа.

Пример 3.2. Рассмотрим конгруэнцию $\Sigma = \Sigma(l, K)$, где K — коника, l — прямая, не лежащая в плоскости этой коники, $K \cap l = z$. Из предложений 2.1 и 2.3 видно, что наша конгруэнция имеет порядок один и класс 2. Покажем, что $\Sigma \subset \mathbf{G} \subset \mathbb{P}^5$ изоморфна (и даже проективно эквивалентна) гладкой линейчатой поверхности степени 3 в $\mathbb{P}^4$.

Выберем любую точку $y \in l \setminus z$ и рассмотрим кривые $K_1, K_2 \subset \mathbf{G}$, определенные следующим образом: $\alpha \in K_1$ тогда и только тогда, когда существует такая точка $x \in K$, что $l_\alpha = \overline{xy}$, в то время как $K_2 = \mathbb{P}^1(z, \langle K \rangle)$. Ясно, что K_1 и K_2 — коника и прямая соответственно, и что $\langle K_1 \rangle \cap K_2 = \varnothing$. Отображение $\varphi\colon K_1 \to K_2$, ставящее в соответствие прямой $\overline{yx}$ прямую $\overline{zx}$, где $x \in K$, является изоморфизмом K_1 на K_2, и

$$\Sigma = \bigcup_{\alpha \in K_1} \overline{\alpha, \varphi(\alpha)} \subset \mathbf{G}. \tag{3.1}$$

Равенство (3.1) как раз и является одним из определений гладкой линейчатой поверхности степени 3 в $\mathbb{P}^4$.

Пример 3.3. Более общим образом, пусть $C \subset \mathbb{P}^3$ — кривая степени n, и пусть прямая $L \subset \mathbb{P}^3$ такова, что сумма кратностей (в смысле определения 2.2) точек пересечения L и C равна $n-1$ (легко видеть, что в этом случае кривая C обязана быть рациональной). Тогда из предложений 2.1 и 2.3 следует, что $\Sigma(C, L)$ — конгруэнция порядка 1 и класса n.

Пример 3.4. Пусть $l \subset \mathbb{P}^3$ – прямая, $\varphi\colon l^\perp \to l$ – произвольный непостоянный морфизм. Положим $\Sigma(l, \varphi) = \bigcup_{\beta \in l^\perp} \mathbb{P}^1(\varphi(\beta), \mathbb{P}^2_\beta)$. Легко видеть, что $\Sigma(l, \varphi)$ — конгруэнция порядка 1 и класса $\deg \varphi$.

Пример 3.5. Пусть $C \subset \mathbb{P}^3$ — нормальная рациональная кривая степени 3. Покажем, что $\Sigma = \Sigma(C)$ — конгруэнция порядка 1 и класса 3.

В самом деле, утверждение относительно класса вытекает из предложения 2.1; что касается порядка, то он равен единице по следующей причине: если l_1 и l_2 — две секущие или касательные кривой C, пересекающиеся в точке $p \notin C$, то индекс пересечения C с плоскостью, натянутой на l_1 и l_2, будет $\geqslant 4$, что невозможно, поскольку $\deg C = 3$.

Покажем теперь, что поверхность $\Sigma \subset \mathbf{G} \subset \mathbb{P}^5$ проективно эквивалентна поверхности Веронезе $v_2(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$.

Чтобы это доказать, заметим для начала, что $\deg \Sigma = \operatorname{ord} \Sigma + \operatorname{cl} \Sigma = 4$.

Далее, покажем, что Σ является образом $\mathbb{P}^2$ при некотором морфизме. В самом деле, линейная система квадрик, содержащих C, двумерна. Обозначим ее через $L \cong \mathbb{P}^2$. Построим отображение φ из L^* в $\mathbf{G}$ следующим образом: всякому $\beta \in L^*$ соответствует одномерная линейная система (pencil) квадрик, содержащих C; базисное множество этой линейной системы есть объединение C и некоторой прямой l_α, где $\alpha \in G$. Положим $\varphi(\beta) = \alpha$. Ясно, что прямые l_α являются секущими или касательными кривой C, так что $\varphi(L^*) \subset \Sigma$. Поскольку для всякой точки $x \in C$ конус $x*C$ является квадратичным конусом, содержащим C, получаем, что для всяких двух различных точек $x, y \in C$ прямая $\overline{xy}$ содержится в пересечении содержащих C квадрик $x*C$ и $y*C$. Следовательно, отображение $\varphi\colon L^* \to \Sigma$ является сюръективным.

Теперь покажем, что $\Sigma \subset \mathbb{P}^5$ не лежит ни в какой гиперплоскости. В самом деле, рассуждая от противного, предположим, что $\Sigma \subset H$, где H — гиперплоскость в $\mathbb{P}^5$. Возьмем общую прямую $l_1 \subset \mathbb{P}^3$; тогда $H_{l_1} \cap H \cap \mathbf{G} = H_{l_1} \cap H_{l_2} \cap \mathbf{G}$ для некоторой прямой $l_2 \subset \mathbb{P}^3$. Выберем еще общую прямую $l_3 \subset \mathbb{P}^3$. Тогда $H_{l_1} \cap H_{l_2} \cap H_{l_3} \cap \Sigma$ есть общее линейное сечение поверхности Σ коразмерности 2; поскольку $\deg \Sigma = 4$, это множество состоит из четырех различных прямых, являющихся касательными или секущими кривой C. С другой стороны, пусть Q — гладкая квадрика в $\mathbb{P}^3$, заметаемая прямыми, пересекающими l_1, l_2 и l_3; покажем, что $C \subset Q$. В самом деле, пусть это не так; поскольку все четыре вышеуказанных прямых лежат на Q, получаем, что индекс пересечения C и Q не меньше, чем $4 \cdot 2 = 8$; так как $\deg C = 3$, это невозможно. С другой стороны, вложение $C \subset Q$ также невозможно по следующей причине: так как $l_1 \subset Q$ и C — нормальная рациональная кривая, имеем $l_1 \cap C \neq \varnothing$; последнее же невозможно ввиду общности выбора l_1.

Итак, $\Sigma \subset \mathbb{P}^5$ — поверхность степени 4, не лежащая в гиперплоскости и являющаяся образом $\mathbb{P}^2$ при некотором морфизме. Следовательно, Σ — поверхность Веронезе.

Заметим, что из всех описанных в этом разделе конгруэнций только $\Sigma(C)$, где C — нормальная рациональная кривая степени 3, соответствует поверхности в $\mathbb{P}^5$, не лежащей в гиперплоскости.

4. Классификация конгруэнций порядка 1

Покажем, что все конгруэнции порядка 1 в $\mathbb{P}^3$ исчерпываются перечисленными в предыдущем разделе.

Для начала введем следующее определение.

Определение 4.1. Пусть $\Sigma \subset \mathbf{G}$ — конгруэнция в $\mathbb{P}^3$; точка $x \in \mathbb{P}^3$ называется *точкой подскока,* если $\dim \mathbb{P}^2(x) \cap \Sigma > 0$. Множество всех точек подскока называется *многообразием подскока.*

Замечание 4.2. Если Σ — конгруэнция порядка один и если через точку $p \in \mathbb{P}^3$ проходит более одной прямой из конгруэнции, то из основной теоремы Зарисского следует, что точка p принадлежит многообразию подскока конгруэнции Σ.

Предложение 4.3. *Если Σ — конгруэнция порядка один, тогда её многообразие подскока Z не пусто.*

Доказательство. Выберем произвольную точку $\alpha \in \Sigma$ и кривую $K \subset \Sigma$ таким образом, что $\alpha \notin K$. Тогда непустое множество $(\bigcup_{\beta \in K} l_\beta) \cap l_\alpha$ входит в многообразие подскока. $\square$

Какими могут быть неприводимые компоненты многообразия подскока конгруэнции порядка 1?

Лемма 4.4. *Пусть Σ — конгруэнция порядка 1 и Z — ее многообразие подскока. Тогда:*

1) *Если $\dim Z = 0$, то $\Sigma = \mathbb{P}^2(x)$ для некоторой точки $x \in \mathbb{P}^3$*

2) *Если $\dim Z = 1$, то либо $Z = C$ либо $Z = C_1 \cup C_2$, где $C, C_1, C_2 \subset \mathbb{P}^3$ — неприводимые кривые*

3) *Если $Z = C_1 \cup C_2$ (C_i — неприводимые кривые), то $\Sigma = \Sigma(C_1, C_2)$.*

4) *Если $Z = C$, где C — неприводимая кривая, не являющаяся прямой, то $\Sigma = \Sigma(C)$*

5) *Если Z совпадает с некоторой прямой l, то $\Sigma = \Sigma(l, \varphi)$, где $\varphi\colon l^\perp \to l$ — некоторый морфизм.*

Доказательство. Введем следующее обозначение: для всякой точки $p \in \mathbb{P}^2$ положим $S(p) = \bigcup_{\alpha \in \Sigma, l_\alpha \ni p} l_\alpha$.

Очевидно, многообразие Z не может содержать двумерных компонент. Покажем, что Z не может иметь нульмерных и одномерных компонент одновременно. В самом деле, рассуждая от противного, пусть среди компонент Z есть кривая K и точка a. Тогда в силу неприводимости Σ любая прямая из Σ пересекает K. Пусть b и c — две различные общие точки кривой K. В силу двумерности $S(a)$ в Σ есть прямые $\overline{ab}$ и $\overline{ac}$. Тогда множество $S(b) \cap S(c)$ одномерно, содержится в Z и содержит a — противоречие.

Если $Z(\Sigma)$ состоит из конечного числа точек, то тогда хотя бы через одну из них (a) проходит двумерное семейство прямых из Σ. Откуда $\Sigma = \mathbb{P}^2(a)$, $Z = \{a\}$, что доказывает утверждение (1).

Пусть теперь $\dim Z = 1$. Тогда все неприводимые компоненты $K_i \subset Z$ являются кривыми, и для любого i выполнено равенство $\Sigma = \bigcup\limits_{x \in K_i} (\mathbb{P}^2(x) \cap \Sigma)$.

Стало быть, если $i > 1$, то $\Sigma = \Sigma(K_{i_1}, K_{i_2})$ для любых $i_1 \neq i_2$; предложение 2.4 показывает тогда, что Z состоит ровно из двух компонент K_1 и K_2 и $\Sigma = \Sigma(K_1, K_2)$. Тем самым доказаны утверждения (2) и (3).

Осталось рассмотреть случай, когда Z — неприводимая кривая. Пусть $x_1, x_2 \in Z$ и $x_1 \neq x_2$. Покажем, что $\alpha_{\overline{x_1, x_2}} \in \Sigma$. В самом деле, $S(x_1) \cap S(x_2)$ — кривая, содержащаяся в Z. Поскольку Z неприводимо, эта кривая совпадает с Z, так что $x_2 \in S(x_1)$, что и утверждалось.

Если Z не является прямой, то из доказанного немедленно вытекает, что $\Sigma = \Sigma(Z)$. Тем самым доказано утверждение (4).

Пусть, наконец, Z – прямая, и пусть $L \supset Z$ — некоторая плоскость. Тогда все прямые из Σ, содержащиеся в L, пересекаются только в точках Z, то есть все проходят через одну и ту же точку $a_L \in Z$. Таким образом, любой плоскости, содержащей Z, соответствует единственная точка из Z. Откуда $\Sigma = \Sigma(Z, \varphi)$, где $\varphi \colon Z^{\perp} \to Z$ – морфизм, определенный по правилу $\beta \mapsto a_{L_\beta}$. Это доказывает утверждение (5) и всю лемму. $\square$

Лемма 4.5. *Если кривая C такова, что $\operatorname{ord}(\Sigma(C)) = 1$, то $\deg(C) = 3$.*

Доказательство. Рассуждая от противного, предположим, что $\deg C > 3$. Тогда общее плоское сечение кривой C содержит четыре точки, никакие три из которых не коллинеарны. Следовательно, это сечение содержит такие четыре точки a, b, c, d, что точка $p = \overline{ac} \cap \overline{bd}$ не лежит на C. Имеем $p \in Z$; по лемме 4.4 получаем, что $\Sigma(C) = \Sigma(C, C')$, где $C' \neq C$; это противоречит предложению 2.4. $\square$

Лемма 4.6. *Если кривые $C_1, C_2 \subset \mathbb{P}^3$ таковы, что $\operatorname{ord}(\Sigma(C_1, C_2)) = 1$, то одна из кривых C_1, C_2 является прямой.*

Доказательство. Рассуждая от противного, предположим, что $\deg C_i > 1$ для $i = 1, 2$. Пусть $L \subset \mathbb{P}^3$ — общая плоскость, и положим $L \cap C_i = M_i$. Тогда, очевидно, $M_1 \cap M_2 = \varnothing$, и существуют точки $a, b \in M_1$ и $c, d \in M_2$ такие, что точка $p = \overline{ac} \cap \overline{bd}$ не лежит в $M_1 \cap M_2$. Следовательно, точка p лежит в многообразии подскока конгруэнции $\Sigma(C_1, C_2)$; это противоречит лемме 4.4. $\square$

Объединяя результаты этого раздела, получаем основной результат:

Теорема 4.7. *Всякая конгруэнция порядка* 1 *в* $\mathbb{P}^3$ *является либо множеством всех прямых, проходящих через данную точку, либо множеством всех касательных и секущих нормальной рациональной кривой степени* 3*, либо получается одной из конструкций, описанных в примерах 3.3 и 3.4.*

Литература

[1] Z. Ran. Surfaces of order 1 in Grassmannians. *J. Reine Angew. Math.*, Bd. 368, SS. 119–126, 1986.