ЗАДАЧИ К КУРСУ «ГОМОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ»

МОСКОВСКИЙ НЕЗАВИСИМЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

весна 1999 г.

А. М. Вербовецкий, И. С. Красильщик

Некоторые используемые обозначения:

$\pi\colon E \to M$ — векторное расслоение на n-мерном многообразии M; $\dim E = n + m$;
$x_1, \dots, x_n$ — локальные координаты на M;
$u^1, \dots, u^m$ — координаты в слое расслоения π;
$\varkappa(\pi)$ — модуль производящих функций эволюционных дифференцирований на $J^\infty(\pi)$;
$\mathcal{E}^\infty \subset J^\infty(\pi)$ — некоторое дифференциальное уравнение;
$(E_r^{p,q}, d_r^{p,q})$ — $\mathcal{C}$-спектральная последовательность;
P и Q — некоторые горизонтальные модули на $\mathcal{E}^\infty$.

Задача 1. Для оператора $\bar{\jmath}_k\colon P \to \bar{\mathcal{J}}^k(P)$ постройте и опишите в координатах комплекс совместности, дифференциалы которого суть операторы первого порядка.

Задача 2. Вычислите $\mathcal{C}$-когомологии и $\mathcal{C}$-спектральную последовательность для произвольного скалярного эволюционного уравнения первого порядка

$$u_t = f(t, x, u, u_x), \qquad x = (x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Задача 3. Докажите, что для произвольной системы эволюционных уравнений порядка $\geqslant 2$

$$u^j_t = f^j(t, x, u, u_x, u_{xx}, \dots), \qquad u = (u^1, \dots, u^m), \quad x = (x_1, \dots, x_{n-1}),$$

члены $E_1^{p,n-1}$, $p \geqslant 3$, $\mathcal{C}$-спектральной последовательности и группы $H^{p,0}_{\mathcal{C}}$, $p \geqslant 2$, $\mathcal{C}$-когомологий тривиальны, если линеаризация ℓ_f имеет невырожденный символ.

Задача 4. Для произвольного скалярного линейного эволюционного уравнения с постоянными коэффициентами $u_t = a_0 u + \sum_i a_1^i u_{x_i} + \sum_{i,k} a_2^{ik} u_{x_i x_k} + \dots$, $a_j^\sigma = \mathrm{const}$, вычислите член $E_1^{2,n-1}$ $\mathcal{C}$-спектральной последовательности и группу $H^{1,0}_{\mathcal{C}}$ $\mathcal{C}$-когомологий.

Задача 5. Пусть уравнение обладает оператором рекурсии $\mathcal{R} \in H^{1,0}_{\mathcal{C}}$ и алгеброй классических симметрий $\mathfrak{g}$ с известными коммутационными соотношениями. Опишите структуру алгебры, порождаемой из $\mathfrak{g}$ оператором $\mathcal{R}$. При каких условиях серия $\mathcal{R}^i X$, $X \in \mathfrak{g}$, коммутативна?

Задача 6. Для потенциального уравнения Кортевега – де Фриза $u_t = u_{xxx} + 3u_x^2$ вычислите $(n-1)$-ю строчку $\mathcal{C}$-спектральной последовательности

$$E_1^{0,n-1} \xrightarrow{d_1^{0,n-1}} E_1^{1,n-1} \xrightarrow{d_1^{1,n-1}} E_1^{2,n-1} \xrightarrow{d_1^{2,n-1}} \dots$$

Задача 7. Рассмотрим множество мультииндексов $\mathbb{Z}_+^n \times \mathbb{N}_m$, где $\mathbb{Z}_+ = \{\, i \in \mathbb{Z} \mid i \geqslant 0 \,\}$, $\mathbb{N}_m = \{\, 1, \ldots, m \,\}$. Подмножество $\Sigma \subset \mathbb{Z}_+^n \times \mathbb{N}_m$ назовём *насыщенным*, если для любого мультииндекса $(\sigma, j) \in \Sigma$, где $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, мультииндекс $(\sigma_1, \ldots, \sigma_i - 1, \ldots, \sigma_k + 1, \ldots, \sigma_n, j)$ также принадлежит Σ для всех $i < k$ при условии, что $\sigma_i \neq 0$. Порядок $<$ на множестве $\mathbb{Z}_+^n \times \mathbb{N}_m$ назовём *допустимым*, если

1) $i < k \implies (\sigma_1, \ldots, \sigma_i + 1, \ldots, \sigma_n, j) < (\sigma_1, \ldots, \sigma_k + 1, \ldots, \sigma_n, j)$ для всех (σ, j);
2) $(\sigma_1, j_1) < (\sigma_2, j_2) \implies (\sigma_1 + \tau, j_1) < (\sigma_2 + \tau, j_2)$ для всех $\tau \in \mathbb{Z}_+^n$.

Докажите, что уравнение с n независимыми и m зависимыми переменными инволютивно тогда и только тогда, когда в окрестности любой точки уравнения существует такая система координат $(x, u, u_x, \ldots)$ и такое насыщенное множество мультииндексов Σ, снабжённое допустимым порядком, что рассматриваемое уравнение записывается в виде

$$F_\sigma^j = u_\sigma^j - f_\sigma^j(x, u, u_x, \ldots) = 0, \qquad (\sigma, j) \in \Sigma$$

причём функции $f_\sigma^j(x, u, u_x, \ldots)$ не зависит от u_τ^r при $(\sigma, j) \leqslant (\tau, r)$ и для всех таких (σ, j), что $\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_{k-1} = 0$, и всех $i > k$ имеем

$$D_i(F_\sigma^j) = D_k(F_{\sigma'}^j) + \sum_{l,\tau,s} a_{i\sigma l\tau s}^j D_l(F_\tau^s) + \sum_{(\tau,s)\in\Sigma} b_{i\sigma\tau s}^j F_\tau^s$$

где $\sigma' = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k - 1, \ldots, \sigma_i + 1, \ldots, \sigma_n, j)$, $a_{i\sigma l\tau s}^j$ и $b_{i\sigma\tau s}^j$ — гладкие функции от $x, u, u_x, \ldots$ и первое суммирование осуществляется по таким индексам, что $(\tau, s) \in \Sigma$, $\tau_r = 0$ при $r < l$ и $(\tau_1, \ldots, \tau_l + 1, \ldots, \tau_n, s) < (\sigma_1, \ldots, \sigma_i + 1, \ldots, \sigma_n, j)$.

Задача 8. На пространстве джетов $J^\infty(\pi)$, где $\pi\colon E \to M$ — векторное расслоение, $\dim M = n$, рассмотрим тривиальный лагранжиан $\mathcal{L} \in \bar{H}^n(\pi)$ (лагранжиан называется *тривиальным* когда тривиально отвечающее ему уравнение Эйлера – Лагранжа). Докажите, что если $H^n(M) = 0$, то $\omega = \bar{d}\rho$, где $\omega \in \bar{\Lambda}^n(\pi)$, $\mathcal{L} = [\omega]$, и найдите явную формулу выражающую «потенциал» ρ через ω.

Задача 9. Покажите, что n-я строчка $\mathcal{C}$-спектральной последовательности на пространстве джетов $J^\infty(\pi)$, где $\pi\colon E \to M$ — векторное расслоение, $\dim M = n$,

$$E_1^{0,n} \xrightarrow{d_1^{0,n}} E_1^{1,n} \xrightarrow{d_1^{1,n}} E_1^{2,n} \xrightarrow{d_1^{2,n}} \ldots$$

гомотопически тривиальна и найдите явную формулу для оператора гомотопии.

Задача 10. Докажите, что для любого оператора $\Delta \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}_k(P, Q)$ порядка $\leqslant k$ бидифференциальный оператор $\nabla\colon P \times \hat{Q} \to \bar{\Lambda}^{n-1}$ в формуле Грина

$$\langle \Delta(p), \hat{q} \rangle - \langle p, \Delta^*(\hat{q}) \rangle = \bar{d}(\nabla(p, \hat{q}))$$

может быть выбран так, что для всех $p \in P$ и $\hat{q} \in \hat{Q}$ операторы $\nabla_p\colon \hat{Q} \to \bar{\Lambda}^{n-1}$ и $\nabla_{\hat{q}}\colon P \to \bar{\Lambda}^{n-1}$, определяемые равенствами $\nabla_p(\hat{q}) = \nabla_{\hat{q}}(p) = \nabla(p, \hat{q})$, имеют порядок $\leqslant k - 1$.

Задача 11. Рассмотрим $\mathcal{C}$-спектральную последовательность $E_r^{p,q}$ некоторого ℓ-нормального уравнения $\mathcal{E}$. Постройте точную последовательность

$$0 \longrightarrow E_2^{1,n-1} \longrightarrow H^n(\mathcal{E}^\infty) \longrightarrow E_2^{0,n} \longrightarrow E_2^{2,n-1} \longrightarrow H^{n+1}(\mathcal{E}^\infty) \longrightarrow \ldots$$
$$\ldots \longrightarrow E_2^{p-2,n} \longrightarrow E_2^{p,n-1} \longrightarrow H^{n+p-1}(\mathcal{E}^\infty) \longrightarrow E_2^{p-1,n} \longrightarrow \ldots$$

Задача 12. Пусть $n = m = 1$. Скалярный дифференциальный оператор назовём *невырожденным*, если его старший коэффициент не обращается в нуль ни в одной точке. Классифицируйте все невырожденные гамильтоновы операторы

а) порядка 1;

б) порядка 3;

относительно преобразований Ли.

Задача 13. Пусть $\pi\colon E \to M$ — линейное расслоение, $\dim M = n$. Докажите, что изоморфизм модулей $\Delta\colon \hat{\varkappa}(\pi) \to \varkappa(\pi)$ гамильтонов тогда и только тогда, когда существует такая замкнутая форма $\omega \in \Lambda^{n+2}(E)$, что Δ^{-1} отображает поле $\mathcal{Э}_\varphi$ в элемент $\hat{\varkappa}(\pi)$, порождённый формой $\mathcal{Э}_\varphi \lrcorner\, \omega \in \Lambda^{n+1}(J^\infty(\pi))$.

Задача 14. Кососопряжённый оператор $B \in E_1^{2,n}(\pi) \subset \mathcal{C}\mathrm{Diff}(\varkappa(\pi), \hat{\varkappa}(\pi))$ называется *симплектическим*, если $d_1^{2,n}(B) = 0$. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

1) B — симплектический оператор;
2) $\langle \ell_B(\varphi_1)(\varphi_2), \varphi_3\rangle + \langle \ell_B(\varphi_2)(\varphi_3), \varphi_1\rangle + \langle \ell_B(\varphi_3)(\varphi_1), \varphi_2\rangle = 0$ для всех $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \varkappa(\pi)$;
3) $\ell_{B,\varphi_1}(\varphi_2) - \ell_{B,\varphi_2}(\varphi_1) = \ell^*_{B,\varphi_1}(\varphi_2)$ для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in \varkappa(\pi)$;
4) выражение $\ell_{B,\varphi_1}(\varphi_2) - \frac{1}{2}\ell^*_{B,\varphi_1}(\varphi_2)$ симметрично по $\varphi_1, \varphi_2 \in \varkappa(\pi)$;
5) $\ell_B(\varphi) = \ell_{B,\varphi} - \ell^*_{B,\varphi}$;

где $\langle\,,\rangle$ — естественное спаривание $\varkappa(\pi) \times \hat{\varkappa}(\pi) \to \bar{H}^n(\pi)$ и оператор

$$\ell_{B,\varphi} \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(\varkappa(\pi), \hat{\varkappa}(\pi)), \quad \varphi \in \varkappa(\pi),$$

определяется равенством $\ell_{B,\varphi_1}(\varphi_2) = \ell_B(\varphi_2)(\varphi_1)$.

Эволюционное уравнение $u_t = \varphi$, $\varphi \in \varkappa(\pi)$, называется *гамильтоновым* (относительно симплектического оператора B), если $B(\varphi) = \mathbf{E}(\mathcal{H})$, $\mathbf{E}$ — оператор Эйлера, для некоторого гамильтониана $\mathcal{H} \in \bar{\Lambda}^n(\pi)$. Как связаны симметрии и законы сохранения такого гамильтонова уравнения?

Задача 15. Рассмотрим последовательность расслоений $\pi^n\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ для всех n. Пусть $\bar{\Lambda}^n(\pi^n)$ — множество горизонтальных n-форм на $J^\infty(\pi^n)$. Определим оператор $\mathrm{đ}_n\colon \bar{\Lambda}^n(\pi^n) \to \bar{\Lambda}^{n+1}(\pi^{n+1})$ формулой

$$\mathrm{đ}_n(L\,dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n) = \sum_{j=1}^{m} u^j_{n+1} \frac{\delta L}{\delta u^j}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n+1},$$

где x_i — координаты на базе, u^j — координаты в слое, L — функция на $J^\infty(\pi^n)$, u^j_{n+1} — координатная функция на $J^\infty(\pi^{n+1})$, отвечающая производной u^j по x_{n+1}, $\delta/\delta u^j$ — вариационная производная, т. е. j-я компонента оператора Эйлера, $\mathbf{E}(L\,dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n) = (\delta L/\delta u^1, \ldots, \delta L/\delta u^m)$. Докажите, что $\mathrm{đ}^2 = 0$, так что последовательность

$$\ldots \xrightarrow{\mathrm{đ}} \bar{\Lambda}^n(\pi^n) \xrightarrow{\mathrm{đ}} \bar{\Lambda}^{n+1}(\pi^{n+1}) \xrightarrow{\mathrm{đ}} \bar{\Lambda}^{n+2}(\pi^{n+2}) \xrightarrow{\mathrm{đ}} \ldots$$

является комплексом.

Задача 16. Пусть $\mathrm{Diff}_k(\bar{\Lambda}^n(\pi), \bar{\Lambda}^n(\pi))$ — множество всех (не только $\mathcal{C}$-дифференциальных) операторов порядка $\leqslant k$. Положим

$$\overline{\mathrm{Diff}}_k(\bar{\Lambda}^n(\pi), \bar{\Lambda}^n(\pi)) = \{\, \Delta \in \mathrm{Diff}_k(\bar{\Lambda}^n(\pi), \bar{\Lambda}^n(\pi)) \mid \Delta(\bar{d}\,\bar{\Lambda}^n(\pi)) \subset \bar{d}\,\bar{\Lambda}^n(\pi) \,\},$$

$$\underline{\mathrm{Diff}}_k(\bar{\Lambda}^n(\pi), \bar{\Lambda}^n(\pi)) = \{\, \Delta \in \mathrm{Diff}_k(\bar{\Lambda}^n(\pi), \bar{\Lambda}^n(\pi)) \mid \Delta(\bar{\Lambda}^n(\pi)) \subset \bar{d}\,\bar{\Lambda}^n(\pi) \,\}.$$

Опишите в координатах фактормодуль $\overline{\mathrm{Diff}}_k(\bar\Lambda^n(\pi),\bar\Lambda^n(\pi))/\underline{\mathrm{Diff}}_k(\bar\Lambda^n(\pi),\bar\Lambda^n(\pi))$. (Элементы этого модуля естественно интерпретируются как «дифференциальные операторы» $\bar H^n(\pi)\to\bar H^n(\pi)$.)

Задача 17 (Схема Магри)**.** Пусть $A_1, A_2\in\mathcal{C}\mathrm{Diff}(\hat\varkappa(\pi),\varkappa(\pi))$ — два таких гамильтоновых оператора, что их сумма A_1+A_2 гамильтонова (гамильтонова пара), а комплекс совместности для оператора A_1 состоит из двух членов:

$$0\longrightarrow\hat\varkappa(\pi)\xrightarrow{A_1}\varkappa(\pi)\longrightarrow 0.$$

Предположим что существуют такие элементы $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2,\ldots\in\bar H^n(\pi)$, что

$$A_1(\mathbf{E}(\mathcal{H}_i))=A_2(\mathbf{E}(\mathcal{H}_{i-1})),\qquad i>0.$$

Докажите, что

а) эволюционные поля с производящими функциями

$$\varphi_i=A_1(\mathbf{E}(\mathcal{H}_i)),\qquad i\geqslant 0,$$

попарно коммутируют: $\{\varphi_k,\varphi_l\}=0$ для всех $k,\,l\geqslant 0$;

б) элементы $\mathcal{H}_i$ попарно находятся в инволюции относительно обеих гамильтоновых структур, т. е. $\{\mathcal{H}_k,\mathcal{H}_l\}_{A_1}=\{\mathcal{H}_k,\mathcal{H}_l\}_{A_2}=0$ для всех $k,\,l\geqslant 0$, и являются законами сохранениями для каждой бигамильтоновой системы эволюционных уравнений

$$u_t=A_1(\mathbf{E}(\mathcal{H}_i))=A_2(\mathbf{E}(\mathcal{H}_{i-1})).$$

Задача 18. Пусть $G\subset GL(N)$ — матричная группа Ли, $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{gl}(N)$ — её алгебра Ли и $\omega\in\bar\Lambda^1(\mathcal{E})\otimes_{\mathbb{R}}\mathfrak{g}$ — $\mathfrak{g}$-значная горизонтальная 1-форма удовлетворяющая горизонтальному уравнению Маурера – Картана $\bar d\omega+\frac12[\omega,\omega]=0$ (или, в другой записи, $\bar d\omega+\omega\cdot\omega=0$; точка обозначает матричное умножение).

Покажите, что на модуле Q сечений тривиального векторного расслоения $\mathcal{E}^\infty\times\mathbb{R}^N\to\mathcal{E}^\infty$ формула

$$\nabla_X(q)_a=X(q)_a+\omega(X)q_a,$$

где $X\in\mathcal{C}\mathrm{D}(\mathcal{E})$, $q\in Q$, $a\in\mathcal{E}^\infty$, а $X(q)$ обозначает покомпонентное действие, задаёт структуру $\mathcal{C}$-модуля. Такой $\mathcal{C}$-модуль называется *представлением нулевой кривизны* рассматриваемого уравнения. Представление нулевой кривизны называется *тривиальным*, если существует такая G-значная функция h на $\mathcal{E}^\infty$, что $\omega=-\bar dh\cdot h^{-1}$ (т. е. ω совпадает с канонической $\mathfrak{g}$-значной формой на G, перенесённой с помощью h на $\mathcal{E}^\infty$).

Докажите, что если рассматриваемое уравнение $\mathcal{E}^\infty$ удовлетворяет условиям теоремы о k строчках (т. е. в комплексе совместности оператора линеаризации не более k ненулевых членов), причём $k<n$, и $H^1(\mathcal{E}^\infty)=0$, то все представления нулевой кривизны тривиальны.

Задача 19. На $\mathbb{Z}$-градуированном модуле

$$\bigoplus_{k=0}^{\infty}\mathcal{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{alt}}_{(k)}(\hat\varkappa(\pi),\varkappa(\pi))$$

постройте такую скобку $[\![\,,]\!]$, которая превращала бы этот модуль в градуированную алгебру Ли, являлась бы продолжением скобки Якоби на модуле $\varkappa(\pi)$ и позволяла бы

записать условие гамильтоновости кососопряжённого оператора A в виде $[\![A,A]\!]=0$. Можете ли Вы построить такую скобку на произвольном уравнении $\mathcal{E}^\infty\subset J^\infty(\pi)$?

Задача 20. Пусть π — расслоение римановых метрик на многообразии M. Псевдогруппа $\mathrm{Diffeo}(M)$ диффеоморфизмов многообразия M естественным образом действует на пространстве $J^\infty(\pi)$. Рассмотрим в нём подпространство $J^\infty_{\mathrm{reg}}(\pi)\subset J^\infty(\pi)$, состоящее из таких точек $\theta\in J^\infty(\pi)$, в которых ограничение дифференциала естественной проекции $p\colon J^\infty(\pi)\to J^\infty(\pi)/\mathrm{Diffeo}(M)$ на картановскую плоскость невырождено: $\operatorname{rk} dp_\theta|_{\mathcal{C}_\theta}=n$. Вычислите $\mathcal{C}$-спектральную последовательность для

$$J^\infty_{\mathrm{reg}}(\pi)/\mathrm{Diffeo}(M).$$

Задача 21. Пусть M — псевдоримановo многообразие и π — прямая сумма нескольких расслоений, каждое из которых является внешней степенью кокасательного расслоения, т. е. $\Gamma(\pi)=\Lambda^{p_1}(M)\oplus\ldots\oplus\Lambda^{p_N}(M)$. Предположим, что $1\leqslant p_i<n-1$. Пусть $A_k\in\bar\Lambda^{p_k}(\pi)$ — горизонтальные формы, однозначно определяемые требованием $j^*_\infty(\omega)(A_k)=\omega_k$, где $\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_N)\in\Gamma(\pi)$, $\omega_i\in\Lambda^{p_i}(M)$. Вычислите члены $E_1^{p,q}(\mathcal{E})$, $q\leqslant n-2$, $\mathcal{C}$-спектральной последовательности уравнения $\mathcal{E}=\{\,\bar d{*}\bar dA_1=0,\ldots,\bar d{*}\bar dA_N=0\,\}$, где $*$ — оператор Ходжа.

Задача 22. В условиях предыдущей задачи имеется изоморфизм $\varkappa(\pi)=\bar\Lambda^{p_1}(\pi)\oplus\ldots\oplus\bar\Lambda^{p_N}(\pi)$. Горизонтальный оператор де Рама (действующий покомпонентно)

$$\bar d\colon\bar\Lambda^{p_1-1}(\pi)\oplus\ldots\oplus\bar\Lambda^{p_N-1}(\pi)\to\varkappa(\pi)$$

задаёт калибровочнуй симметрию уравнения $\mathcal{E}$. Найдите калибровочно инвариантные горизонтальные когомологии де Рама уравнения $\mathcal{E}$ в размерности $\leqslant n-2$, т. е. когомологии комплекса

$$0\longrightarrow\bar\Lambda^0_{\mathrm{inv}}(\mathcal{E})\xrightarrow{\bar d}\bar\Lambda^1_{\mathrm{inv}}(\mathcal{E})\xrightarrow{\bar d}\ldots\xrightarrow{\bar d}\bar\Lambda^{n-1}_{\mathrm{inv}}(\mathcal{E}),$$

где $\bar\Lambda^i_{\mathrm{inv}}(\mathcal{E})\subset\bar\Lambda^i(\mathcal{E})$ — подмножество калибровочно инвариантных горизонтальных форм (т. е. таких горизонтальных форм ω, что $\mathcal{Y}_{\bar d\eta}(\omega)=0$).

Задача 23. Рассмотрим ℓ-нормальную систему уравнений $F_1=0,\ldots,F_k=0$. Пусть $\alpha\colon M\times\mathbb{R}^{n|k}\to M$ — расслоение, слоем которого служит линейное суперпространство чётной размерности n и нечётной размерности k (k — число уравнений). Рассмотрим на $J^\infty(\alpha)$ нечётное эволюционное поле $\mathcal{Y}_\varphi$ с производящей функцией $\varphi=(0,\ldots,0,F_1,\ldots,F_k)$ (на всех чётных местах стоят нули). Докажите, что $\mathcal{Y}^2_\varphi=0$ и вычислите когомологии алгебры гладких функций на $J^\infty(\alpha)$ относительно $\mathcal{Y}_\varphi$.

Задача 24. Пусть $\omega\in\varkappa(\pi)\otimes_{\mathcal{F}(\pi)}\mathcal{C}^p\Lambda(\pi)=\mathcal{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{alt}}_{(p)}(\varkappa(\pi),\varkappa(\pi))$ и $\theta\in\varkappa(\pi)\otimes_{\mathcal{F}(\pi)}\mathcal{C}^r\Lambda(\pi)=\mathcal{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{alt}}_{(r)}(\varkappa(\pi),\varkappa(\pi))$ — производящии функции эволюционных супердифференцирований. Вычислите значение суперскобки Якоби $\{\omega,\theta\}\in\varkappa(\pi)\otimes_{\mathcal{F}(\pi)}\mathcal{C}^{p+r}\Lambda(\pi)=\mathcal{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{alt}}_{(p+r)}(\varkappa(\pi),\varkappa(\pi))$

$$\{\omega,\theta\}(\chi_1,\ldots,\chi_{p+r})=?$$

на элементах $\chi_i\in\varkappa(\pi)$.