Граждане сдающие!

Экзамен проходит на дому, с 30 апреля по 15 мая. О желании предъявить результаты сообщить по почте inshakov@mccme.ru. По факту будет выбрана форма сдачи.

Из предлагаемых Вам ниже задач часть (2–10, 11.1, 12.1, 13, 14.1, 15.1, 16.1.1, 16.3.1, 16.4.1, 17.1.1,2, 17.3.1, 17.4.1) — простые; часть (1, 11.2, 12.2, 14.2-3, 15.2-4, 16.1.2, 16.2.1, 16.3.2, 16.4.2, 16.5.1, 17.2.1, 17.3.2, 17.4.2, 17.5.1, 18.1-3) — сложные, но не очень; часть (16.2.2, 16.5.2, 17.2.2, 17.5.2, 18.4) — сложные, некоторые из них — очень. Хотелось бы, чтобы Вы решили много (80%, ибо из них многие были даны на лекциях) простых и немного (20%) сложных. Безусловно, можно решать и больше.

Задачи.

Везде ниже, если нужно, предполагается $k = \mathbb{C}$.

Задача 1. Является ли $\mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$ аффинным многообразием?

Задача 2. Можно ли задать одну из ветвей гиперболы в $\mathbb{R}^2$ алгебраическими уравнениями?

Задача 3. Существует ли такой морфизм $\varphi\colon X \to Y$ неприводимых аффинных многообразий, что $\varphi(X)$ не открыто и не замкнуто в Y?

Задача 4. Докажите, что произведение неприводимых многообразий неприводимо.

Задача 5. Пусть C — кривая $v_3(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^3$. Может ли прямая пересечь кривую C в трех различных точках?

Задача 6. Докажите, что однородный идеал многообразия Сегре $\mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^b \subset \mathbb{P}^{ab+a+b}$ порождается своей компонентой степени 2.

Задача 7. Рассмотрим диагональное отображение $\mathbb{P}^n$ в многообразие Сегре $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}^{n^2+2n}$. Что за подмногообразие в $\mathbb{P}^{n^2+2n}$ будет образом этого отображения?

Задача 8. Докажите, что при $a > b$ не существует непостоянного морфизма $\mathbb{P}^a$ в $\mathbb{P}^b$.

Задача 9. Докажите, что поверхность в $\mathbb{P}^3$, задающаяся уравнением $x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$, бирационально изоморфна $\mathbb{P}^2$.

Задача 10. Известна оценка снизу (точная) для степени невырожденного многообразия $X^m \subset \mathbb{P}^n$ (какая?). Оцените (точно!) снизу степень приводимого невырожденного многообразия $X \subset \mathbb{P}^n$, у которого все компоненты имеют размерность m, если

1. X связно в стандартной топологии;

2. X несвязно там же.

Задача 11. 1. Покажите, что если некоторая гиперплоскость H касается гиперповерхности X вдоль подмногообразия положительной размерности $H \cap X$, то тогда $X \cap H$ содержит особую точку гиперповерхности X.
2. Покажите, что если X — гладкое многообразие, то тогда гиперплоскость H_α, где $\alpha \in X^*$ — общая точка, касается X вдоль линейного подпространства.

Задача 12. Найдите размерность и количество компонент семейства k-мерных линейных подпространств на $Q^n \subset \mathbb{P}^{n+1}$ — n-мерной неособой квадрике для

1. $k = 1$;
2. $k > 1$.

Задача 13. Содержит ли $v_2(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$ прямые?

Задача 14. Опишите Σ_z для $z \in SX$ и

1. $X = v_2(\mathbb{P}^2)$;
2. $X = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$;
3. $X = \mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^b$ для произвольных a и b;

Задача 15. Рассмотрим два линейных подпространства $\mathbb{P}^a, \mathbb{P}^b \subset \mathbb{P}^{a+b+2}$, причем $\mathbb{P}^a \cap \mathbb{P}^b = \emptyset$. Возьмем линейную систему всех квадрик, содержащих данные $\mathbb{P}^a$ и $\mathbb{P}^b$. Найдите образ $\mathbb{P}^{a+b+2}$ при отображении, заданном такой линейной системой, и обратное отображение для:

1. $a = b = 0$;
2. $a = 0$, $b = 1$;
3. $a = b = 1$;
4. произвольных a и b.

Определение. Многообразие

$$S^kX = \overline{\{\langle x_0, \dots, x_k\rangle | x_0, \dots, x_k \in X,\ \dim\langle x_0, \dots, x_k\rangle = k\}}$$

называется *k-тым многообразием секущих многообразия X*.

Задача 16. Для многообразия $X = \mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^b$ найдите:

1. $\deg X$;
2. X^*;
3. $X \cap H$, где H — гиперплоскость, касающаяся X вдоль подмногообразия максимальной возможной размерности;
4. S^kX;
5. $(S^kX)^*$

для

1. $a = b = 2$
2. произвольных a и b.

Задача 17. Для многообразия $X = v_2(\mathbb{P}^n)$ найдите:

1. $\deg X$;
2. X^*;
3. $X \cap H$, где H — гиперплоскость, касающаяся X вдоль подмногообразия максимальной возможной размерности;
4. $S^k X$;
5. $(S^k X)^*$

для

1. $n = 2$
2. произвольного n.

Задача 18. Пусть $C \subset \mathbb{P}^n$ — норм-кривая, т.е. $C = v_n(\mathbb{P}^1)$. Найдите:

1. $\deg C^*$;
2. $\deg C^\vee$;
3. $\deg SC$;
4. $\deg S^k C$ для произвольного k.

По всем вопросам обращаться письменно: inshakov@mccme.ru.

Желаем успехов!