А. М. Вербовецкий, И. С. Красильщик

ГОМОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
1999

Александр Моисеевич Вербовецкий[1]
Иосиф Семёнович Красильщик[2]

Эти записки основаны на курсе лекций, который читался авторами в Математическом колледже НМУ в 1998–1999 гг., а также на лекциях, прочитанных в августе 1998 г. на Международной летней школе в г. Левоча (Словакия).

Книга включает в себя введение в дифференциальное исчисление в категории модулей над коммутативными алгебрами, алгебраическую модель лагранжева формализма. Изложены основы геометрии бесконечно продолженных уравнений и теория нелокальных симметрий, основанная на теории накрытий в категории дифференциальных уравнений.

Описан гомологический подход (теория $\mathcal{C}$-когомологий) к операторам рекурсии, основанный на теории скобок Фролихера–Нийенхейса, который затем переформулируется в терминах горизонтальных когомологий с коэффициентами в линейном накрытии. Рассмотрение этих когомологий позволяет с единой точки зрения взглянуть на $\mathcal{C}$-когомологии и $\mathcal{C}$-спектральную последовательность Виноградова, член E_1 которой описывает, в частности, лагранжев формализм со связями.

В приложении кратко приводятся необходимые сведения из теории (ко)гомологий и спектральных последовательностей.

[1] *Email*: `verbovet@mail.ecfor.rssi.ru`
[2] *Email*: `josephk@glasnet.ru`

Оглавление

Введение

Попытки обсуждать теорию (ко)гомологий в связи с дифференциальными уравнениями выглядели весьма странно еще 30–40 лет назад: что могло быть общего между преимущественно аналитической, имеющей дело с функциональными пространствами теорией уравнений с частными производными (УрЧП) и абстрактными алгебраическими конструкциями, к которым принадлежит теория когомологий?

Несмотря на это, в работах Д. Спенсера и его учеников ([16, 31]), когомологии впервые были применены к анализу переопределенных систем линейных УрЧП, обобщающему классические работы Э. Картана [10]. Операторы и группы гомологий, введенные Спенсером (и называемые теперь *операторами Спенсера* и *гомологиями Спенсера*) играют основную роль во всех вычислениях, связанных с современными гомологическими приложениями к УрЧП (см. ниже).

Дальнейшие успехи стали возможны в рамках геометрического подхода к УрЧП. Этот подход, берущий начало в классических трудах Ли, Бэклунда, Дарбу, был развит А. М. Виноградовым с соавторами (см. [9, 7]). Рассмотрение дифференциального уравнения как подмногообразия в подходящем расслоении джетов и использование нетривиальной геометрической структуры последнего позволяют применить мощные средства современной дифференциальной геометрии для изучения нелинейных УрЧП общего вида. Более того: перевод на геометрический язык дает возможность выявить глубинные алгебраические структуры, а это приводит к более ясному и глубокому пониманию всей картины [9, Гл. 1] и [4, 41].

А. М. Виноградову принадлежат также первые работы, в которых применение когомологий к УрЧП носят не технический, а концептуальный характер. В [5, 6, 64] он показал, что адекватным языком лагранжева формализма служит некоторая спектральная последовательность (так называемая *$\mathcal{C}$-спектральная последовательность Виноградова*), а также получил, используя этот язык, первые эффективные результаты. Впоследствии оказалось, что область приложений $\mathcal{C}$-спектральной последовательности гораздо более широка и охватывает скалярные дифференциальные инварианты геометрических структур [3], современную теорию поля [22, 23, 20, 24, 32] и т. д. Во многих работах уточняются и обобщаются первоначальные результаты Виноградова (см., например, работы Я. Андерсона [18, 19], Р. Брайанта и П. Гриффитса [26], Д. М. Гесслера [30, 29], М. Марвана [49, 50], Т. Цудзиситы [53, 54, 55], В. М. Тульчиева [56, 57, 58] и др.).

Позже одним из авторов этих заметок (И. К.) было показано, что еще одна теория когомологий ($\mathcal{C}$-когомологии) естественным образом связана с УрЧП [39]. Эта теория построена на том, что бесконечное продолжение любого уравнения естественным образом наделяется плоской связностью (*связностью Картана*), которой можно сопоставить комплекс, основанный на *скобке Фролихера–Нийенхейса* [52, 27]. Группа H^0 этого комплекса совпадает с *алгеброй симметрий* исходного уравнения, группа H^1 состоит из классов эквивалентности *деформаций* структуры уравнения. Деформации специального вида отождествляются с *операторами рекурсии* [14] для симметрий. С другой стороны, эта теория оказывается двойственной члену E_1 $\mathcal{C}$-спектральной последовательности Виноградова, в то время как некоторые цепные отображения, связывающие одну с другой, являются пуассоновыми структурами на уравнении [40].

Другой автор (А. В.) заметил ([62]), что обе теории можно рассматривать как *горизонтальные когомологии* с подходящими коэффициентами. Сочетая это наблюдение с тем фактом, что горизонтальные когомологии де Рама равны когомологиям *комплекса совместности* для оператора универсальной линеаризации, он нашел простое доказательство теоремы о тривиальности члена E_1 («теорема о k строчках») и дал полное описание $\mathcal{C}$-когомологий в «двустрочечной» ситуации.

Наш краткий обзор не будет полным, если мы не упомянем приложения когомологий в теории особенностей решений нелинейных УрЧП, принадлежащие В. В. Лычагину ([48]), хотя эти темы лежат вне сферы, охватываемой данной книгой.

⋆ ⋆ ⋆

Мы попытались описать полную и замкнутую картину, что было не просто при естественных ограничениях на время и объем материала. Для облегчения чтения книги мы включили в нее приложение, содержащее основные сведения и определения из гомологической алгебры. За дальнейшими деталями (в особенности относящимися к геометрии УрЧП) мы отсылаем читателя к книгам [15] и [9]. Для более продвинутого чтения мы рекомендуем сборник [33], где можно найти многие когомологические приложения к современной физике.

Наш приятный долг отметить, что эта работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 97-01-00462) и ИНТАС (грант № 96-0793). Мы также благодарны А. Киселёву, В. Трушкову и Д. Хангуляну, которые помогли нам подготовить русский вариант текста.

А. М. Вербовецкий

И. С. Красильщик

Москва, 1999 г.

1. Дифференциальное исчисление в коммутативных алгебрах

В этой главе мы строим дифференциальное исчисление над некоторой коммутативной алгеброй A над полем $\Bbbk$ характеристики нуль. За дальнейшими деталями мы отсылаем читателя к [9, Гл. 1] и [41].

1.1. **Линейные дифференциальные операторы.**

Рассмотрим два A-модуля P и Q и группу $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(P,Q)$. В ней можно ввести две структуры A-модуля:

$$(a\Delta)(p) = a\Delta(p), \quad (a^+\Delta)(p) = \Delta(ap), \tag{1.1}$$

где $a \in A$, $p \in P$, $\Delta \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(P,Q)$. Положим также

$$\delta_a(\Delta) = a^+\Delta - a\Delta, \quad \delta_{a_0,\dots,a_k} = \delta_{a_0} \circ \dots \circ \delta_{a_k},$$

$a_0,\dots,a_k \in A$. Очевидно, что $\delta_{a,b} = \delta_{b,a}$ и $\delta_{ab} = a^+\delta_b + b\delta_a$ для всех $a,b \in A$.

О п р е д е л е н и е 1.1. $\Bbbk$-гомоморфизм $\Delta\colon P \to Q$ называется *линейным дифференциальным оператором* порядка $\leqslant k$ над алгеброй A, если $\delta_{a_0,\dots,a_k}(\Delta) = 0$ для всех $a_0,\dots,a_k \in A$.

П р е д л о ж е н и е 1.1. *Если M — гладкое многообразие, ξ, ζ — гладкие локально тривиальные векторные расслоения над M, $A = C^\infty(M)$ и $P = \Gamma(\xi)$, $Q = \Gamma(\zeta)$ — модули гладких сечений, то любой линейный дифференциальный оператор, действующий из ξ в ζ, — это оператор в смысле определения* 1.1, *и наоборот.*

У п р а ж н е н и е 1.1. Докажите это.

Очевидно, что множество всех дифференциальных операторов порядка $\leqslant k$, действующих из P в Q, образует подгруппу в $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(P,Q)$, замкнутую относительно обоих умножений (1.1). Таким образом, мы получаем два модуля, обозначаемые $\mathrm{Diff}_k(P,Q)$ и $\mathrm{Diff}_k^+(P,Q)$ соответственно. Так как $a(b^+\Delta) = b^+(a\Delta)$ для любых $a,b \in A$ и $\Delta \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(P,Q)$, эта группа снабжена также структурой A-бимодуля, обозначаемого $\mathrm{Diff}_k^{(+)}(P,Q)$. Очевидно, что $\mathrm{Diff}_0(P,Q) = \mathrm{Diff}_0^+(P,Q) = \mathrm{Hom}_A(P,Q)$.

Из определения 1.1 следует, что любой дифференциальный оператор порядка $\leqslant k$ — это оператор порядка $\leqslant l$ для любого $l \geqslant k$, и, следовательно, мы получаем вложения $\mathrm{Diff}_k^{(+)}(P,Q) \subset \mathrm{Diff}_l^{(+)}(P,Q)$, которые позволяют определить фильтрованный бимодуль $\mathrm{Diff}^{(+)}(P,Q) = \bigcup_{k\geqslant 0} \mathrm{Diff}_k^{(+)}(P,Q)$.

Можно также рассмотреть $\mathbb{Z}$-градуированный модуль, ассоциированный с фильтрованным модулем $\mathrm{Diff}^{(+)}(P,Q)$: $\mathrm{Smbl}(P,Q) = \bigoplus_{k\geqslant 0} \mathrm{Smbl}_k(P,Q)$, где $\mathrm{Smbl}_k(P,Q) = \mathrm{Diff}_k^{(+)}(P,Q)/\mathrm{Diff}_{k-1}^{(+)}(P,Q)$. Он называется *модулем символов*. Элементы модуля $\mathrm{Smbl}(P,Q)$ называются *символами* операторов, действующих из P в Q. Легко видеть, что две структуры модулей, определенные формулами (1.1), совпадают в $\mathrm{Smbl}(P,Q)$.

Следующие свойства линейных дифференциальных операторов следуют непосредственно из определения:

П р е д л о ж е н и е 1.2. *Пусть P, Q и R — A-модули. Тогда*:

1) *Если $\Delta_1 \in \mathrm{Diff}_k(P,Q)$ и $\Delta_2 \in \mathrm{Diff}_l(Q,R)$ — дифференциальные операторы, то их композиция $\Delta_2 \circ \Delta_1$ принадлежит $\mathrm{Diff}_{k+l}(P,R)$.*
2) *Отображения*

$$\mathrm{i}_{\cdot,+}\colon \mathrm{Diff}_k(P,Q) \to \mathrm{Diff}_k^+(P,Q), \ \mathrm{i}_{+,\cdot}\colon \mathrm{Diff}_k^+(P,Q) \to \mathrm{Diff}_k(P,Q),$$

   порожденные тождественным отображением $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(P,Q)$, суть дифференциальные операторы порядка $\leqslant k$.

С л е д с т в и е 1.3. *Имеет место изоморфизм*

$$\mathrm{Diff}^+(P, \mathrm{Diff}^+(Q,R)) = \mathrm{Diff}^+(P, \mathrm{Diff}(Q,R)),$$

порожденный операторами $\mathrm{i}_{\cdot,+}$ и $\mathrm{i}_{+,\cdot}$.

Введем обозначение $\mathrm{Diff}_k^{(+)}(Q) = \mathrm{Diff}_k^{(+)}(A, Q)$ и определим отображение $\mathcal{D}_k\colon \mathrm{Diff}_k^+(Q) \to Q$, положив $\mathcal{D}_k(\Delta) = \Delta(1)$. Очевидно, что $\mathcal{D}_k$ — оператор порядка $\leqslant k$. Пусть также

$$\psi\colon \mathrm{Diff}_k^+(P, Q) \to \mathrm{Hom}_A(P, \mathrm{Diff}_k^+(Q)), \quad \Delta \mapsto \psi_\Delta, \tag{1.2}$$

— отображение, определенное равенством $(\psi_\Delta(p))(a) = \Delta(ap)$, $p \in P$, $a \in A$.

П р е д л о ж е н и е 1.4. *Отображение* (1.2) *является изоморфизмом A-модулей.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Совместимость отображения ψ со структурой A-модуля очевидна. Для завершения доказательства достаточно показать, что соответствие

$$\mathrm{Hom}_A(P, \mathrm{Diff}_k^+(Q)) \ni \varphi \mapsto \mathcal{D}_k \circ \varphi \in \mathrm{Diff}_k^+(P, Q)$$

является обратным к ψ. □

Гомоморфизм ψ_Δ называется Diff-*ассоциированным* с Δ.

З а м е ч а н и е 1.1. Рассмотрим соответствие $P \Rightarrow \mathrm{Diff}_k^+(P, Q)$ и для любого A-гомоморфизма $f\colon P \to R$ определим гомоморфизм

$$\mathrm{Diff}_k^+(f, Q)\colon \mathrm{Diff}_k^+(R, Q) \to \mathrm{Diff}_k^+(P, Q),$$

положив $\mathrm{Diff}_k^+(f, Q)(\Delta) = \Delta \circ f$. Таким образом, $\mathrm{Diff}_k^+(\cdot\,, Q)$ является контравариантным функтором из категории всех A-модулей в себя. Предложение 1.4 означает, что этот функтор представим и модуль $\mathrm{Diff}_k^+(Q)$ — его представляющий объект. Очевидно, что то же верно и для функтора $\mathrm{Diff}^+(\cdot\,, Q)$ и модуля $\mathrm{Diff}^+(Q)$.

Из предложения 1.4 вытекает также

С л е д с т в и е 1.5. *Существует единственный гомоморфизм*

$$c_{k,l} = c_{k,l}(P)\colon \mathrm{Diff}_k^+(\mathrm{Diff}_l^+(P)) \to \mathrm{Diff}_{k+l}(P),$$

для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Diff}_k^+(\mathrm{Diff}_l^+(P)) \arrow[r, "\mathcal{D}_k"] \arrow[d, "c_{k,l}"'] & \mathrm{Diff}_l^+(P) \arrow[d, "\mathcal{D}_l"] \\
\mathrm{Diff}_{k+l}^+(P) \arrow[r, "\mathcal{D}_{k+l}"] & P
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно воспользоваться тем, что композиция

$$\mathcal{D}_l \circ \mathcal{D}_k : \mathrm{Diff}_k(\mathrm{Diff}_l(P)) \to P$$

является оператором порядка $\leqslant k + l$, и положить $c_{k,l} = \psi_{\mathcal{D}_l \circ \mathcal{D}_k}$. □

Отображение $c_{k,l}$ называется *склеивающим гомоморфизмом.* Из его определения следует, что $(c_{k,l}(\Delta))(a) = (\Delta(a))(1)$, $\Delta \in \mathrm{Diff}_k^+(\mathrm{Diff}_l^+(P))$, $a \in A$.

З а м е ч а н и е 1.2. Соответствие $P \Rightarrow \mathrm{Diff}_k^+(P)$ также становится (ковариантным) функтором, если для гомоморфизма $f\colon P \to Q$ определить гомоморфизм $\mathrm{Diff}_k^+(f)\colon \mathrm{Diff}_k^+(P) \to \mathrm{Diff}_k^+(Q)$ формулой $\mathrm{Diff}_k^+(f)(\Delta) = f \circ \Delta$. Тогда соответствие $P \Rightarrow c_{k,l}(P)$ — естественное преобразование функторов $\mathrm{Diff}_k^+(\mathrm{Diff}_l^+(\cdot))$ и $\mathrm{Diff}_{k+l}^+(\cdot)$ Иными словами, для любого A-гомоморфизма $f\colon P \to Q$ диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Diff}_k^+(\mathrm{Diff}_l^+(P)) \arrow[r, "\mathrm{Diff}_k^+(\mathrm{Diff}_l^+(f))"] \arrow[d, "c_{k,l}(P)"'] & \mathrm{Diff}_k^+(\mathrm{Diff}_l^+(Q)) \arrow[d, "c_{k,l}(Q)"] \\
\mathrm{Diff}_{k+l}^+(P) \arrow[r, "\mathrm{Diff}_{k+l}^+(f)"] & \mathrm{Diff}_{k+l}^+(Q)
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Заметим также, что отображения $c_{k,l}$ совместимы с естественными вложениями $\mathrm{Diff}_k^+(P) \to \mathrm{Diff}_s^+(P)$, $k \leqslant s$, и, следовательно, можно определить склейку $c_{*,*}\colon \mathrm{Diff}^+(\mathrm{Diff}^+(\cdot)) \to \mathrm{Diff}^+(\cdot)$.

1.2. **Полидифференцирования и Diff-комплекс Спенсера.** Рассмотрим тензорное произведение $A^{\otimes k} = A \otimes_{\Bbbk} \ldots \otimes_{\Bbbk} A$ (k сомножителей).

Определение 1.2. $\Bbbk$-линейное отображение $\nabla\colon A^{\otimes k} \to P$ называется *кососимметрическим полидифференцированием* алгебры A со значениями в A-модуле P, если выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned}
&1)\ \nabla(a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_k) + \nabla(a_1, \ldots, a_{i+1}, a_i, \ldots, a_k) = 0,\\
&2)\ \nabla(a_1, \ldots, a_{i-1}, ab, a_{i+1}, \ldots, a_k) =\\
&\quad = a\nabla(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_k) + b\nabla(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_k)
\end{aligned}$$

для всех $a, b, a_1, \ldots, a_k \in A$ и любого i, $1 \leqslant i \leqslant k$.

Множество всех кососимметрических k-дифференцирований образует A-модуль, обозначаемый $\mathrm{D}_k(P)$: для любых $\nabla \in \mathrm{D}_k(P)$ и $a \in A$ положим $(a\nabla)(a_1, \ldots, a_k) = a\nabla(a_1, \ldots, a_k)$. По определению, $\mathrm{D}_0(P) = P$. В частности, элементы модуля $\mathrm{D}_1(P)$ называются *P-значными дифференцированиями* и образуют подмодуль в модуле $\mathrm{Diff}_1(P)$ (но не в модуле $\mathrm{Diff}_1^+(P)$!).

Имеется еще и другое, функториальное определение модулей $\mathrm{D}_k(P)$. Заметим для начала, что композиция $\gamma_1\colon \mathrm{D}_1(P) \hookrightarrow \mathrm{Diff}_1(P) \xrightarrow{\mathrm{i}_{\cdot,+}} \mathrm{Diff}_1^+(P)$ является мономорфным дифференциальным оператором порядка $\leqslant 1$. Допустим теперь, что мономорфные операторы первого порядка $\gamma_i = \gamma_i(P)\colon \mathrm{D}_i(P) \to \mathrm{D}_{i-1}(\mathrm{Diff}_1^+(P))$ были определены для всех $i \leqslant k$. Предположим также, что все отображения γ_i — это естественные[3] операторы. Рассмотрим композицию

$$\mathrm{D}_k(\mathrm{Diff}_1^+(P)) \xrightarrow{\gamma_k} \mathrm{D}_{k-1}(\mathrm{Diff}_1^+(\mathrm{Diff}_1^+(P))) \xrightarrow{\mathrm{D}_{k-1}(c_{1,1})} \mathrm{D}_{k-1}(\mathrm{Diff}_2^+(P)). \tag{1.3}$$

Предложение 1.6. *Справедливы следующие утверждения*:

1) $\mathrm{D}_{k+1}(P)$ *совпадает с ядром композиции* (1.3).
2) *Вложение* $\gamma_{k+1}\colon \mathrm{D}_{k+1}(P) \hookrightarrow \mathrm{D}_k(\mathrm{Diff}_1^+(P))$ *является дифференциальным оператором первого порядка.*
3) *Оператор* γ_{k+1} — *естественный.*

Доказательство сводится к проверке определений. □

Замечание 1.3. Выше мы видели, что A-модуль $\mathrm{D}_{k+1}(P)$ — это ядро отображения $\mathrm{D}_{k-1}(c_{1,1}) \circ \gamma_k$, которое является не гомоморфизмом A-модулей, а дифференциальным оператором. То же наблюдается в следующей общей ситуации.

Пусть F — функтор, действующий в некоторой полной подкатегории в категории A-модулей и $\Bbbk$-линейных отображений между ними. Будем говорить, что F является *$\Bbbk$-линейным*, если соответствующее отображение $\mathrm{F}_{P,Q} : \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(P, Q) \to \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\mathrm{F}(P), \mathrm{F}(Q))$ линейно над $\Bbbk$ для всех P и Q из нашей подкатегории. Тогда можно ввести новую структуру A-модуля в $\Bbbk$-модуле $\mathrm{F}(P)$, положив $a\dot{}q = (\mathrm{F}(a))(q)$, где $q \in \mathrm{F}(P)$ и $\mathrm{F}(a)\colon \mathrm{F}(P) \to \mathrm{F}(P)$ — гомоморфизм, соответствующий умножению на a: $p \mapsto ap$, $p \in P$. Обозначим полученный таким способом модуль через $\mathrm{F}^{\cdot}(P)$. Рассмотрим два $\Bbbk$-линейных функтора F и G и естественное преобразование $\Delta\colon P \Rightarrow \Delta(P) \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\mathrm{F}(P), \mathrm{G}(P))$.

Упражнение 1.2. Докажите, что естественное преобразование Δ индуцирует естественный гомоморфизм A-модулей $\Delta^{\cdot}\colon \mathrm{F}^{\cdot}(P) \to \mathrm{G}^{\cdot}(P)$ и, таким образом, его ядро всегда является A-модулем.

Из определения 1.2 следует также, что элементы модулей $\mathrm{D}_k(P)$, $k \geqslant 2$, можно рассматривать как дифференцирования $\Delta\colon A \to \mathrm{D}_{k-1}(P)$, удовлетворяющие условию $(\Delta(a))(b) = -(\Delta(b))(a)$. Назовем $\Delta(a)$ *значением* полидифференцирования Δ на элементе $a \in A$. Определим теперь с помощью индукции по $k + l$ операцию $\wedge\colon \mathrm{D}_k(A) \otimes_A \mathrm{D}_l(P) \to \mathrm{D}_{k+l}(P)$, положив

$$a \wedge p = ap, \qquad a \in \mathrm{D}_0(A) = A, \quad p \in \mathrm{D}_0(P) = P,$$

[3]Это означает, что для любого A-гомоморфизма $f\colon P \to Q$ справедливо равенство $\gamma_i(Q) \circ \mathrm{D}_i(f) = \mathrm{D}_{i-1}(\mathrm{Diff}_1^+(f)) \circ \gamma_i(P)$.

и

$$(\Delta \wedge \nabla)(a) = \Delta \wedge \nabla(a) + (-1)^l \Delta(a) \wedge \nabla. \tag{1.4}$$

Используя элементарную индукцию по $k+l$, можно легко доказать следующее

Предложение 1.7. *Операция $\wedge$ корректно определена и обладает следующими свойствами*:

1) $\Delta \wedge (\Delta' \wedge \nabla) = (\Delta \wedge \Delta') \wedge \nabla$,
2) $(a\Delta + a'\Delta') \wedge \nabla = a\Delta \wedge \nabla + a'\Delta' \wedge \nabla$,
3) $\Delta \wedge (a\nabla + a'\nabla') = a\Delta \wedge \nabla + a'\Delta \wedge \nabla'$,
4) $\Delta \wedge \Delta' = (-1)^{kk'}\Delta' \wedge \Delta$

для любых элементов a, $a' \in A$ и полидифференцирований $\Delta \in \mathrm{D}_k(A)$, $\Delta' \in \mathrm{D}_{k'}(A)$, $\nabla \in \mathrm{D}_l(P)$, $\nabla' \in \mathrm{D}_{l'}(P)$.

Таким образом, $\mathrm{D}_*(A) = \bigoplus_{k \geqslant 0} \mathrm{D}_k(A)$ становится $\mathbb{Z}$-градуированной коммутативной алгеброй и $\mathrm{D}_*(P) = \bigoplus_{k \geqslant 0} \mathrm{D}_k(P)$ является градуированным $\mathrm{D}_*(A)$-модулем. Соответствие $P \Rightarrow \mathrm{D}_*(P)$ — функтор из категории A-модулей в категорию градуированных $\mathrm{D}_*(A)$-модулей.

Пусть теперь $\nabla \in \mathrm{D}_k(\mathrm{Diff}_l^+(P))$ — полидифференцирование. Положим

$$(S(\nabla)(a_1, \ldots, a_{k-1}))(a) = (\nabla(a_1, \ldots, a_{k-1}, a)(1)), \tag{1.5}$$

$a, a_1, \ldots, a_{k-1} \in A$. Тем самым мы получаем отображение

$$S\colon \mathrm{D}_k(\mathrm{Diff}_l^+(P)) \to \mathrm{D}_{k-1}(\mathrm{Diff}_{l+1}^+(P)),$$

которое можно представить как композицию

$$\mathrm{D}_k(\mathrm{Diff}_l^+(P)) \xrightarrow{\gamma_k} \mathrm{D}_{k-1}(\mathrm{Diff}_1^+(\mathrm{Diff}_l^+(P))) \xrightarrow{\mathrm{D}_{k-1}(c_{1,l})} \mathrm{D}_{k-1}(\mathrm{Diff}_{l+1}^+(P)). \tag{1.6}$$

Предложение 1.8. *Отображения*

$$S\colon \mathrm{D}_k(\mathrm{Diff}_l^+(P)) \to \mathrm{D}_{k-1}(\mathrm{Diff}_{l+1}^+(P))$$

обладают следующими свойствами:

1) *S — дифференциальный оператор порядка $\leqslant 1$,*
2) $S \circ S = 0$.

Доказательство. Первое утверждение следует из (1.6), второе — из (1.5). □

Определение 1.3. Оператор S называется Diff-*оператором Спенсера.* Последовательность операторов

$$0 \leftarrow P \xleftarrow{\mathcal{D}} \mathrm{Diff}^+(P) \xleftarrow{S} \mathrm{Diff}^+(P) \xleftarrow{S} \mathrm{D}_2(\mathrm{Diff}^+(P)) \leftarrow \ldots$$

называется Diff-*комплексом Спенсера.*

1.3. **Джеты.** Изучим теперь функторы $Q \Rightarrow \mathrm{Diff}_k(P, Q)$ и исследуем их представимость.

Рассмотрим A-модуль P и тензорное произведение $A \otimes_{\Bbbk} P$. В этом тензорном произведении введем структуру A-модуля, положив

$$a(b \otimes p) = (ab) \otimes p, \qquad a, b \in A, \quad p \in P,$$

и рассмотрим $\Bbbk$-линейное отображение $\epsilon\colon P \to A \otimes_{\Bbbk} P$, определенное формулой $\epsilon(p) = 1 \otimes p$. Обозначим через μ^k подмодуль в $A \otimes_{\Bbbk} P$, порожденный элементами вида $(\delta_{a_0, \ldots, a_k}(\epsilon))(p)$, для всех $a_0, \ldots, a_k \in A$ и $p \in P$.

Определение 1.4. Фактормодуль $(A \otimes_{\Bbbk} P)/\mu^k$ называется *модулем k-джетов* модуля P и обозначается $\mathcal{J}^k(P)$.

Определим также отображение $j_k\colon P \to \mathcal{J}^k(P)$, положив $j_k(p) = \epsilon(p) \bmod \mu^k$. Непосредственно из определения подмодуля μ^k следует, что j_k — дифференциальный оператор порядка $\leqslant k$.

Предложение 1.9. *Существует канонический изоморфизм*
$$\psi\colon \mathrm{Diff}_k(P,Q) \to \mathrm{Hom}_A(\mathcal{J}^k(P),Q), \quad \Delta \mapsto \psi^\Delta, \tag{1.7}$$
определенный равенством $\Delta = \psi^\Delta \circ j_k$. *Гомоморфизм* ψ^Δ *называется* Jet-*ассоциированным с оператором* Δ.

Доказательство. Заметим вначале, что так как модуль $\mathcal{J}^k(P)$ порожден элементами вида $j_k(p)$, $p \in P$, гомоморфизм ψ^Δ, если он определен, является единственным. Чтобы установить существование ψ^Δ, рассмотрим гомоморфизм
$$\eta\colon \mathrm{Hom}_A(A\otimes_{\Bbbk} P,Q) \to \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(P,Q), \quad \eta(\varphi) = \varphi\circ\epsilon.$$
Поскольку φ — A-гомоморфизм, имеем
$$\delta_a(\eta(\varphi)) = \delta_a(\varphi\circ\epsilon) = \varphi\circ\delta_a(\epsilon) = \eta(\delta_a(\varphi)), \quad a \in A.$$
Следовательно, элемент $\eta(\varphi)$ — оператор порядка $\leqslant k$ тогда и только тогда, когда $\varphi(\mu^k) = 0$, т. е. ограничив η на $\mathrm{Diff}_k(P,Q) \subset \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(P,Q)$, мы получим искомый изоморфизм ψ. □

Доказанное предложение означает, что функтор $Q \Rightarrow \mathrm{Diff}_k(P,Q)$ представим и модуль $\mathcal{J}^k(P)$ является его представляющим объектом.

Заметим, что соответствие $P \Rightarrow \mathcal{J}^k(P)$ само есть функтор: если $\varphi\colon P \to Q$ — гомоморфизм A-модулей, то мы можем определить гомоморфизм $\mathcal{J}^k(\varphi)\colon \mathcal{J}^k(P) \to \mathcal{J}^k(Q)$, используя коммутативность диаграммы
$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{j_k} & \mathcal{J}^k(P) \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathcal{J}^k(\varphi)} \\ Q & \xrightarrow{j_k} & \mathcal{J}^k(Q) \end{array}$$

Универсальное свойство оператора j_k позволяет ввести естественное преобразование $c^{k,l}$ функторов $\mathcal{J}^{k+l}(\cdot)$ и $\mathcal{J}^k(\mathcal{J}^l(\cdot))$, определенное коммутативной диаграммой
$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{j_l} & \mathcal{J}^l(P) \\ {\scriptstyle j_{k+l}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j_k} \\ \mathcal{J}^{k+l}(P) & \xrightarrow{c^{k,l}} & \mathcal{J}^k(\mathcal{J}^l(P)) \end{array}$$
Оно называется *ко-склеивающим гомоморфизмом* и двойственно к склеивающему гомоморфизму, обсуждавшемуся в замечании 1.2 на с. 7.

Другое естественное преобразование, связанное с функторами $\mathcal{J}^k(\cdot)$, возникает из вложений $\mu^l \hookrightarrow \mu^k$, $l \geqslant k$, которые порождают проекции $\nu_{l,k}\colon \mathcal{J}^l(P) \to \mathcal{J}^k(P)$, двойственные к вложениям $\mathrm{Diff}_k(P,Q) \hookrightarrow \mathrm{Diff}_l(P,Q)$. Легко видеть, что если $f\colon P \to P'$ — гомоморфизм A-модулей, то $\mathcal{J}^k(f)\circ\nu_{l,k} = \nu_{l,k}\circ\mathcal{J}^l(f)$. Таким образом, мы получим последовательность проекций
$$\ldots \to \mathcal{J}^k(P) \xrightarrow{\nu_{k,k-1}} \mathcal{J}^{k-1}(P) \to \ldots \to \mathcal{J}^1(P) \xrightarrow{\nu_{1,0}} \mathcal{J}^0(P) = P$$
и положим $\mathcal{J}^\infty(P) = \varprojlim \mathcal{J}^k(P)$. Так как $\nu_{l,k}\circ j_l = j_k$, мы можем также положить $j_\infty = \varprojlim j_k\colon P \to \mathcal{J}^\infty(P)$.

Пусть $\Delta\colon P \to Q$ — оператор порядка $\leqslant k$. Тогда для любого $l \geqslant 0$ имеется коммутативная диаграмма
$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\Delta} & Q \\ {\scriptstyle j_{k+l}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j_l} \\ \mathcal{J}^{k+l}(P) & \xrightarrow{\psi_l^\Delta} & \mathcal{J}^l(Q) \end{array}$$
где $\psi_l^\Delta = \psi^{j_l\circ\Delta}$. Более того, если $l' \geqslant l$, то $\nu_{l',l}\circ\psi_{l'}^\Delta = \psi_l^\Delta\circ\nu_{k+l',k+l}$ и мы получаем гомоморфизм $\psi_\infty^\Delta\colon \mathcal{J}^\infty(P) \to \mathcal{J}^\infty(Q)$.

Заметим, что ко-склеивающий гомоморфизм является частным случаем описанной выше конструкции: $c^{k,l} = \psi_k^{j_l}$. Так что, переходя к обратным пределам, мы получим ко-склеивающий гомоморфизм $c^{\infty,\infty}$:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{j_\infty} & \mathcal{J}^\infty(P) \\ {\scriptstyle j_\infty}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j_\infty} \\ \mathcal{J}^\infty(P) & \xrightarrow{c^{\infty,\infty}} & \mathcal{J}^\infty(\mathcal{J}^\infty(P)) \end{array}$$

1.4. **Комплекс совместности.** Следующая конструкция будет играть важную роль в дальнейшем изложении.

Рассмотрим дифференциальный оператор $\Delta\colon Q \to Q_1$ порядка $\leqslant k$. Не теряя общности, мы можем считать, что его Jet-ассоциированный гомоморфизм $\psi^\Delta\colon \mathcal{J}^k(Q) \to Q_1$ является эпиморфным. Выберем целое число $k_1 \geqslant 0$ и определим Q_2 как коядро гомоморфизма $\psi^\Delta_{k_1}\colon \mathcal{J}^{k+k_1}(Q) \to \mathcal{J}^k(Q_1)$,

$$0 \to \mathcal{J}^{k+k_1}(Q) \xrightarrow{\psi^\Delta_{k_1}} \mathcal{J}^{k_1}(Q_1) \to Q_2 \to 0.$$

Обозначим композицию оператора $j_{k_1}\colon Q_1 \to \mathcal{J}^{k_1}(Q_1)$ и естественной проекции $\mathcal{J}^{k_1}(Q_1) \to Q_2$ через $\Delta_1\colon Q_1 \to Q_2$. По построению имеем

$$\Delta_1 \circ \Delta = \psi^{\Delta_1} \circ j_{k_1} \circ \Delta = \psi^{\Delta_1} \circ \psi^\Delta_{k_1} \circ j_{k+k_1} = 0.$$

Упражнение 1.3. Докажите, что Δ_1 является оператором совместности для оператора Δ, т. е. что для любого оператора ∇, такого что $\nabla \circ \Delta = 0$ и $\operatorname{ord} \nabla = k_1$, существует такой оператор $\Box$, для которого $\nabla = \Box \circ \Delta_1$.

Теперь мы можем применить описанную процедуру к оператору Δ_1 и некоторому целому числу k_2 и получить $\Delta_2\colon Q_2 \to Q_3$ и т. д. В результате получим комплекс

$$0 \to Q \xrightarrow{\Delta} Q_1 \xrightarrow{\Delta_1} Q_2 \xrightarrow{\Delta_2} \ldots \to Q_i \xrightarrow{\Delta_i} Q_{i+1} \to \ldots,$$

который называется *комплексом совместности* оператора Δ.

1.5. **Дифференциальные формы и комплекс де Рама.** Рассмотрим вложение $\beta\colon A \to \mathcal{J}^1(A)$, заданное равенством $\beta(a) = aj_1(1)$ и определим модуль $\Lambda^1 = \mathcal{J}^1(A)/\operatorname{im}\beta$. Пусть d — композиция j_1 и естественной проекции $\mathcal{J}^1(A) \to \Lambda^1$. Тогда $d\colon A \to \Lambda^1$ — дифференциальный оператор порядка $\leqslant 1$ (более того, он лежит в $\mathrm{D}_1(\Lambda^1)$).

Применим теперь конструкцию предыдущего пункта к оператору d, положив все k_i равными 1 и сохранив обозначение d для операторов d_i. Тогда мы получаем комплекс совместности

$$0 \to A \xrightarrow{d} \Lambda^1 \xrightarrow{d} \Lambda^2 \to \ldots \to \Lambda^k \xrightarrow{d} \Lambda^{k+1} \to \ldots,$$

который называется *комплексом де Рама* алгебры A. Элементы Λ^k называются *k-формами* над A.

Предложение 1.10. *При любом $k \geqslant 0$ модуль Λ^k является представляющим объектом для функтора $\mathrm{D}_k(\cdot)$.*

Доказательство. Достаточно сравнить определение модуля Λ^k с описанием $\mathrm{D}_k(P)$, данным в предложении 1.6 на с. 8. $\Box$

Замечание 1.4. В случае $k = 1$ изоморфизм между функторами $\mathrm{Hom}_A(\Lambda^1, \cdot)$ и $\mathrm{D}_1(\cdot)$ можно описать более точно. А именно, из определения оператора $d\colon A \to \Lambda^1$ и из предложения 1.9 на предыдущей странице следует, что любое дифференцирование $\nabla\colon A \to P$ единственным способом представляется в виде композиции $\nabla = \varphi^\nabla \circ d$ для некоторого гомоморфизма $\varphi^\nabla\colon \Lambda^1 \to P$.

Из предложения 1.10 вытекает

Следствие 1.11. *Модуль Λ^k есть k-я внешняя степень модуля Λ^1.*

Упражнение 1.4. Так как $\mathrm{D}_k(P) = \mathrm{Hom}_A(\Lambda^k, P)$, можно определить спаривание $\langle\cdot\,,\cdot\rangle\colon \mathrm{D}_k(P)\otimes\Lambda^k \to P$. Докажите, что операция вычисления значения (см. с. 8) и внешнее произведение взаимно двойственны по отношению к этому спариванию, т. е. что

$$\langle X, da\wedge\omega\rangle = \langle X(a),\omega\rangle$$

для всех $X\in \mathrm{D}_{k+1}(P)$, $\omega\in\Lambda^k$ и $a\in A$.

Следующее предложение устанавливает связь дифференциала де Рама с внешним произведением.

Предложение 1.12 (правило Лейбница). *Для любых $\omega\in\Lambda^k$ и $\theta\in\Lambda^l$ верно равенство*

$$d(\omega\wedge\theta) = d\omega\wedge\theta + (-1)^k\omega\wedge d\theta.$$

Доказательство. Вначале рассмотрим случай $l=0$, т. е. $\theta = a\in A$. Заметим, что внешнее произведение $\wedge\colon \Lambda^k\otimes_A\Lambda^l\to\Lambda^{k+l}$, согласно предложению 1.10 на предыдущей странице, индуцирует естественные вложения модулей $\mathrm{D}_{k+l}(P)\to \mathrm{D}_k(\mathrm{D}_l(P))$. В частности, вложение $\mathrm{D}_{k+1}(P)\to \mathrm{D}_k(\mathrm{D}_1(P))$ может быть представлено как композиция

$$\mathrm{D}_{k+l}(P)\xrightarrow{\gamma_{k+1}} \mathrm{D}_k(\mathrm{Diff}_1^+(P))\xrightarrow{\lambda} \mathrm{D}_k(\mathrm{D}_1(P)),$$

где $(\lambda(\nabla))(a_1,\ldots,a_k) = \nabla(a_1,\ldots,a_k) - (\nabla(a_1,\ldots,a_k))(1)$. Двойственным образом, внешнее произведение представляется в виде

$$\Lambda^k\otimes_A\Lambda^1\xrightarrow{\lambda'} \mathcal{J}^1(\Lambda^k)\xrightarrow{\psi^d}\Lambda^{k+1},$$

где $\lambda'(\omega\otimes da) = (-1)^k(j_1(\omega a) - j_1(\omega)a)$. Тогда

$$(-1)^k\wedge\omega da = (-1)^k\psi^d(\lambda'(\omega\otimes da)) = \psi^d(j_1(\omega a)-j_1(\omega)a) = d(\omega a) - d(\omega)a.$$

В общем случае доказательство вытекает из тождества

$$d(\omega\wedge da) = (-1)^k d(d(\omega a) - d\omega\cdot a) = (-1)^{k+1}d(d\omega\cdot a).$$

□

Вернемся к предложению 1.10 на предшествующей странице и вновь рассмотрим A-билинейное спаривание

$$\langle\cdot\,,\cdot\rangle\colon \mathrm{D}_k(P)\otimes_A\Lambda^k\to P.$$

Рассмотрим форму $\omega\in\Lambda^k$ и дифференцирование $X\in \mathrm{D}_1(A)$. Использовав определение внешнего произведения в $\mathrm{D}_*(P)$ (см. равенство (1.4) на с. 9), мы можем положить

$$\langle\Delta, i_X\omega\rangle = (-1)^{k-1}\langle X\wedge\Delta,\omega\rangle \tag{1.8}$$

для произвольного $\Delta\in \mathrm{D}_{k-1}(P)$.

Определение 1.5. Операция $\mathrm{i}_X:\Lambda^k\to\Lambda^{k-1}$, определенная формулой (1.8), называется *внутренним произведением*, или *подстановкой*.

Предложение 1.13. *Для любых дифференцирований $X, Y\in \mathrm{D}_1(A)$ и форм $\omega\in\Lambda^k$, $\theta\in\Lambda^l$ имеем*

$$1)\ \mathrm{i}_X(\omega\wedge\theta) = \mathrm{i}_X(\omega)\wedge\theta + (-1)^k\omega\wedge \mathrm{i}_X(\theta),$$
$$2)\ \mathrm{i}_X\circ \mathrm{i}_Y = -\mathrm{i}_Y\circ \mathrm{i}_X.$$

Иными словами, внутреннее произведение — это дифференцирование степени -1 $\mathbb{Z}$-градуированной алгебры $\Lambda^* = \bigoplus_{k\geqslant 0}\Lambda^k$ и i_X, i_Y коммутируют как градуированные отображения.

Рассмотрим дифференцирование $X\in \mathrm{D}_1(A)$ и положим

$$\mathrm{L}_X(\omega) = [\mathrm{i}_X, d](\omega) = \mathrm{i}_X(d(\omega)) + d(\mathrm{i}_X(\omega)),\ \omega\in\Lambda^*. \tag{1.9}$$

Определение 1.6. Операция $\mathrm{L}_X:\Lambda^*\to\Lambda^*$, определенная равенством (1.9), называется *производной Ли*.

Непосредственно из определения вытекают следующие свойства производных Ли:

П р е д л о ж е н и е 1.14. *Пусть* X, $Y \in \mathrm{D}_1(A)$, $\omega, \theta \in \Lambda^*$, $a \in A$, α, $\beta \in \Bbbk$. *Тогда верны следующие тождества*:

$$
\begin{aligned}
&1)\ \mathrm{L}_{\alpha X+\beta Y} = \alpha \mathrm{L}_X + \beta \mathrm{L}_Y,\\
&2)\ \mathrm{L}_{aX} = a\mathrm{L}_X + da \wedge \mathrm{i}_X,\\
&3)\ \mathrm{L}_X(\omega \wedge \theta) = \mathrm{L}_X(\omega) \wedge \theta + \omega \wedge \mathrm{L}_X(\theta),\\
&4)\ [d, \mathrm{L}_X] = d \circ \mathrm{L}_X - \mathrm{L}_X \circ d = 0,\\
&5)\ \mathrm{L}_{[X,Y]} = [\mathrm{L}_X, \mathrm{L}_Y],\ \text{где } [X,Y] = X \circ Y - Y \circ X,\\
&6)\ \mathrm{i}_{[X,Y]} = [\mathrm{L}_X, \mathrm{i}_Y] = [\mathrm{i}_X, \mathrm{L}_Y].
\end{aligned}
$$

Дадим в завершение другое описание Diff-комплекса Спенсера. Вспомним замечание 1.3 на с. 8 и введем структуру «с точками» в модули $\mathrm{D}_k(\mathrm{Diff}_l^+(P))$, а затем заметим, что $\mathrm{Diff}_l^+(P)^{\cdot} = \mathrm{Diff}_l(P)$. Определим изоморфизм

$$\zeta\colon (\mathrm{D}_k(\mathrm{Diff}^+))^{\cdot}(P) = \mathrm{Hom}_A(\Lambda^k, \mathrm{Diff}^+)^{\cdot} = \mathrm{Diff}^+(\Lambda^k, P)^{\cdot} = \mathrm{Diff}(\Lambda^k, P).$$

Тем самым мы имеем

П р е д л о ж е н и е 1.15. *Определенное выше отображение* ζ *порождает изоморфизм комплексов*

$$
\begin{array}{ccccccc}
\dots \longleftarrow & (\mathrm{D}_{k-1}(\mathrm{Diff}^+))^{\cdot}(P) & \xleftarrow{S^{\cdot}} & (\mathrm{D}_k(\mathrm{Diff}^+))^{\cdot}(P) & \longleftarrow & \dots\\
& \zeta\big\downarrow & & \zeta\big\downarrow & & \\
\dots \longleftarrow & \mathrm{Diff}(\Lambda^{k-1}, P) & \xleftarrow{v} & \mathrm{Diff}(\Lambda^k, P) & \longleftarrow & \dots,
\end{array}
$$

где $S^{\cdot}$ — *оператор, индуцированный на модулях «с точками»* Diff-*оператором Спенсера, а* $v(\nabla) = \nabla \circ d$.

1.6. **Левые и правые дифференциальные модули.** С этого момента и до конца текущей главы мы будем предполагать, что все рассматриваемые модули проективны.

О п р е д е л е н и е 1.7. A-модуль P называется *левым дифференциальным модулем*, если существует гомоморфизм A-модулей $\lambda\colon P \to \mathcal{J}^\infty(P)$, удовлетворяющий условию $\nu_{\infty,0} \circ \lambda = \mathrm{id}_P$ и такой, что диаграмма

$$
\begin{array}{ccc}
P & \xrightarrow{\lambda} & \mathcal{J}^\infty(P)\\
\lambda\big\downarrow & & \big\downarrow \mathcal{J}^\infty(\lambda)\\
\mathcal{J}^\infty(P) & \xrightarrow{c^{\infty,\infty}} & \mathcal{J}^\infty(\mathcal{J}^\infty(P))
\end{array}
$$

коммутативна.

Л е м м а 1.16. *Пусть P — левый дифференциальный модуль. Тогда для любого дифференциального оператора* $\Delta\colon Q_1 \to Q_2$ *существует оператор* $\Delta_P\colon Q_1 \otimes_A P \to Q_2 \otimes_A P$, *удовлетворяющий условиям* $(\mathrm{id}_Q)_P = \mathrm{id}_{Q \otimes_A P}$ *при* $Q = Q_1 = Q_2$ *и*

$$(\Delta_2 \circ \Delta_1)_P = (\Delta_2)_P \circ (\Delta_1)_P$$

для любых операторов $\Delta_1\colon Q_1 \to Q_2$, $\Delta_2\colon Q_2 \to Q_3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим отображение

$$\overline{\Delta}\colon Q_1 \otimes_A (A \otimes_{\Bbbk} P) \to Q_2 \otimes_A P, \quad q \otimes a \otimes p \mapsto \Delta(aq) \otimes p.$$

Поскольку

$$\overline{\Delta}(q \otimes \delta_a(\epsilon)(p)) = \overline{\delta_a \Delta}(q \otimes 1 \otimes p), \quad p \in P, \quad q \in Q_1, \quad a \in A,$$

отображение

$$\xi_P(\Delta)\colon Q_1 \otimes_A \mathcal{J}^\infty(P) \to Q_2 \otimes_A P$$

определено корректно. Пусть теперь оператор Δ_P равен композиции

$$Q_1 \otimes_A P \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\lambda} Q_1 \otimes_A \mathcal{J}^\infty(P) \xrightarrow{\xi_P(\Delta)} Q_2 \otimes_A P,$$

которая очевидным образом дает дифференциальный оператор k-го порядка. Очевидно, что $(\mathrm{id}_Q)_P = \mathrm{id}_{Q\otimes_A P}$.

Далее,

$$(\Delta_2 \circ \Delta_1)_P = \xi_P(\Delta_2 \circ \Delta_1) \circ (\mathrm{id} \otimes \lambda) = \xi_P(\Delta_2) \circ \xi_{\mathcal{J}^\infty(P)}(\Delta_1) \circ (\mathrm{id} \otimes c^{\infty,\infty}) \circ (\mathrm{id} \otimes \lambda) =$$
$$= \xi_P(\Delta_2) \circ \xi_{\mathcal{J}^\infty(P)}(\Delta_1) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathcal{J}^\infty(\lambda)) \circ (\mathrm{id} \circ \lambda) = \xi_P(\Delta_2) \circ (\mathrm{id} \otimes \lambda) \circ \xi_P(\Delta_1) \circ (\mathrm{id} \otimes \lambda) = (\Delta_2)_P \circ (\Delta_1)_P,$$

что доказывает второе утверждение. □

Заметим, что доказанная лемма показывает, в частности, что любой левый дифференциальный модуль является левым модулем над алгеброй $\mathrm{Diff}(A)$, что оправдывает нашу терминологию.

Вследствие доказанного результата, любой комплекс дифференциальных операторов $\ldots \to Q_i \to Q_{i+1} \to \ldots$ и левый дифференциальный модуль P порождают комплекс $\ldots \to Q_i \otimes_A P \to Q_{i+1} \otimes_A P \to \ldots$ «с коэффициентами» в P. В частности, поскольку ко-склеивающее отображение $c^{\infty,\infty}$ является очевидным образом ко-ассоциативным, т. е. диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{J}^\infty(P) & \xrightarrow{c^{\infty,\infty}(P)} & \mathcal{J}^\infty(\mathcal{J}^\infty(P)) \\
{\scriptstyle c^{\infty,\infty}(P)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{J}^\infty(c^{\infty,\infty}(P))} \\
\mathcal{J}^\infty(\mathcal{J}^\infty(P)) & \xrightarrow{c^{\infty,\infty}(\mathcal{J}^\infty(P))} & \mathcal{J}^\infty(\mathcal{J}^\infty(\mathcal{J}^\infty(P)))
\end{array}$$

коммутативна, $\mathcal{J}^\infty(P)$ — левый дифференциальный модуль с $\lambda = c^{\infty,\infty}$. Следовательно, можно рассмотреть комплекс де Рама с коэффициентами в $\mathcal{J}^\infty(P)$:

$$0 \to P \xrightarrow{j_\infty} \mathcal{J}^\infty(P) \to \Lambda^1 \otimes_A \mathcal{J}^\infty(P) \to \ldots \to \Lambda^i \otimes_A \mathcal{J}^\infty(P) \to \Lambda^{i+1} \otimes_A \mathcal{J}^\infty(P) \to \ldots,$$

который получается как обратный предел для Jet-*комплексов Спенсера* модуля P,

$$0 \to P \xrightarrow{j_k} \mathcal{J}^k(P) \xrightarrow{S} \Lambda^1 \otimes_A \mathcal{J}^{k-1}(P) \xrightarrow{S} \ldots \xrightarrow{S} \Lambda^i \otimes_A \mathcal{J}^{k-i}(P) \xrightarrow{S} \Lambda^{i+1} \otimes_A \mathcal{J}^{k-i-1}(P) \to \ldots,$$

где $S(\omega \otimes j_{k-i}(p)) = d\omega \otimes j_{k-i-1}(p)$.

Пусть $\Delta\colon P \to Q$ — дифференциальный оператор и $\psi_\infty^\Delta\colon \mathcal{J}^\infty(P) \to \mathcal{J}^\infty(Q)$ — соответствующий гомоморфизм. Ядро $E_\Delta = \ker \psi_\infty^\Delta$ наследует структуру левого дифференциального модуля $\mathcal{J}^\infty(P)$, и мы можем рассмотреть комплекс де Рама с коэффициентами в E_Δ:

$$0 \to E_\Delta \to \Lambda^1 \otimes_A E_\Delta \to \ldots \to \Lambda^i \otimes_A E_\Delta \to \Lambda^{i+1} \otimes_A E_\Delta \to \ldots, \tag{1.10}$$

который называется Jet-*комплексом Спенсера* оператора Δ.

Введем теперь понятие, двойственное к понятию левого дифференциального модуля.

Определение 1.8. A-модуль P называется *правым дифференциальным модулем*, если существует гомоморфизм A-модулей $\rho\colon \mathrm{Diff}^+(P) \to P$, который удовлетворяет равенству $\rho|_{\mathrm{Diff}_0^+(P)} = \mathrm{id}_P$ и такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Diff}^+(\mathrm{Diff}^+(P)) & \xrightarrow{c_{\infty,\infty}} & \mathrm{Diff}^+(P) \\
{\scriptstyle \mathrm{Diff}^+(\rho)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\
\mathrm{Diff}^+(P) & \xrightarrow{\rho} & P
\end{array}$$

коммутативна.

Лемма 1.17. *Пусть P — правый дифференциальный модуль. Тогда для любого дифференциального оператора $\Delta\colon Q_1 \to Q_2$ порядка $\leqslant k$ существует оператор*

$$\Delta^P\colon \mathrm{Hom}_A(Q_2, P) \to \mathrm{Hom}_A(Q_1, P)$$

порядка $\leqslant k$, удовлетворяющий равенствам $\mathrm{id}_Q^P = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_A(Q,P)}$ при $Q = Q_1 = Q_2$ и

$$(\Delta_2 \circ \Delta_1)^P = \Delta_1^P \circ \Delta_2^P$$

для любых операторов $\Delta_1\colon Q_1 \to Q_2$, $\Delta_2\colon Q_2 \to Q_3$.

Доказательство. Определим действие оператора Δ^P, положив $\Delta^P(f) = \rho \circ \psi_{f\circ\Delta}$, где $f \in \mathrm{Hom}_A(Q_2, P)$. Очевидно, что это дифференциальный оператор k-го порядка и $\mathrm{id}_Q^P = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_A(Q,P)}$. Тогда

$$(\Delta_2 \circ \Delta_1)^P(f) = \rho \circ \psi_{f\circ\Delta_2\circ\Delta_1} = \rho \circ c_{\infty,\infty} \circ \mathrm{Diff}^+(\psi_{f\circ\Delta_2}) \circ \psi_{\Delta_1} = \\ = \rho \circ \mathrm{Diff}^+(\rho \circ \psi_{f\circ\Delta_2}) \circ \psi_{\Delta_1} = \rho \circ \mathrm{Diff}^+(\Delta_2^P(f)) \circ \psi_{\Delta_1} = \Delta_1^P(\Delta_2^P(f)).$$

Следовательно, $(\cdot)^P$ сохраняет композицию. □

Из доказанной леммы следует, что любой правый дифференциальный модуль является правым модулем над алгеброй $\mathrm{Diff}(A)$.

Пусть $\ldots \to Q_i \xrightarrow{\Delta_i} Q_{i+1} \to \ldots$ — комплекс дифференциальных операторов, P — правый дифференциальный модуль. Тогда, по лемме 1.17 на предыдущей странице, мы можем построить двойственный комплекс $\ldots \leftarrow \mathrm{Hom}_A(Q_i, P) \xleftarrow{\Delta_i^P} \mathrm{Hom}_A(Q_{i+1}, P) \leftarrow \ldots$ с коэффициентами в P. Заметим,что Diff-комплекс Спенсера является частным случаем этой конструкции. Действительно, вследствие свойств гомоморфизма $c_{\infty,\infty}$ модуль $\mathrm{Diff}^+(P)$ — это правый дифференциальный модуль с $\rho = c_{\infty,\infty}$. Применяя лемму 1.17 на предшествующей странице к комплексу де Рама, получаем Diff-комплекс Спенсера.

Заметим также, что если $\Delta\colon P \to Q$ — дифференциальный оператор, то коядро C_Δ гомоморфизма $\psi_\Delta^\infty\colon \mathrm{Diff}^+(P) \to \mathrm{Diff}^+(Q)$ наследует структуру правого дифференциального модуля $\mathrm{Diff}^+(Q)$. Поэтому мы можем рассмотреть комплекс

$$0 \leftarrow \operatorname{coker}\Delta \xleftarrow{\mathcal{D}} C_\Delta \leftarrow \mathrm{D}_1(C_\Delta) \leftarrow \ldots \leftarrow \mathrm{D}_i(C_\Delta) \leftarrow \mathrm{D}_{i+1}(C_\Delta) \leftarrow \ldots,$$

двойственный комплексу де Рама с коэффициентами в C_Δ. Он называется Diff-*комплексом Спенсера* оператора Δ.

1.7. **Когомологии Спенсера.** Рассмотрим важный класс коммутативных алгебр.

Определение 1.9. Алгебра A называется *гладкой*, если модуль Λ^1 является проективным конечного типа.

В этом параграфе алгебра A предполагается гладкой.

Рассмотрим два Diff-комплекса Спенсера порядков k и $k-1$ и их вложение

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longleftarrow & P & \longleftarrow & \mathrm{Diff}_k^+(P)) & \longleftarrow & \mathrm{D}_1(\mathrm{Diff}_{k-1}^+(P)) & \longleftarrow & \ldots \\ & & \| & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longleftarrow & P & \longleftarrow & \mathrm{Diff}_{k-1}^+(P)) & \longleftarrow & \mathrm{D}_1(\mathrm{Diff}_{k-2}^+(P)) & \longleftarrow & \ldots \end{array}$$

Тогда, если алгебра A гладкая, прямая сумма соответствующих факторкомплексов имеет вид

$$0 \leftarrow \mathrm{Smbl}(A, P) \xleftarrow{\delta} \mathrm{D}_1(\mathrm{Smbl}(A, P)) \xleftarrow{\delta} \mathrm{D}_2(\mathrm{Smbl}(A, P)) \leftarrow \ldots$$

Используя стандартные рассуждения, можно показать, что из точности этого комплекса следует точность Diff-комплекса.

Упражнение 1.5. Докажите, что операторы δ являются A-гомоморфизмами.

Опишем структуру модулей $\mathrm{Smbl}(A, P)$. Временно будем использовать обозначение $D = \mathrm{D}_1(A)$. Рассмотрим гомоморфизм $\alpha_k\colon P \otimes_A S^k(D) \to \mathrm{Smbl}_k(A, P)$, определенный равенством

$$\alpha_k(p \otimes \nabla_1 \cdot \ldots \cdot \nabla_k) = \mathrm{smbl}_k(\Delta), \quad \Delta(a) = (\nabla_1 \circ \ldots \circ \nabla_k)(a)p,$$

где $a \in A$, $p \in P$ и $\mathrm{smbl}_k\colon \mathrm{Diff}_k(A, P) \to \mathrm{Smbl}_k(A, P)$ — естественные проекции.

Лемма 1.18. *Если A — гладкая алгебра, гомоморфизм α_k является изоморфизмом.*

Доказательство. Рассмотрим дифференциальный оператор $\Delta\colon A \to P$ порядка $\leqslant k$. Тогда отображение $s_\Delta\colon A^{\otimes k} \to P$, определенное равенством $s_\Delta(a_1,\ldots,a_k) = \delta_{a_1,\ldots,a_k}(\Delta)$ — это симметрическое полидифференцирование и, следовательно, соответствие $\Delta \mapsto s_\Delta$ порождает гомоморфизм

$$\mathrm{Smbl}_k(A,P) \to \mathrm{Hom}_A(S^k(\Lambda^1),P) = S^k(D)\otimes_A P, \tag{1.11}$$

который, как можно проверить прямыми вычислениями, обратен к α_k. Заметим, что второе равенство в (1.11) справедливо, так как A — гладкая алгебра. □

Упражнение 1.6. Докажите, что модуль $\mathrm{Smbl}_k(P,Q)$ изоморфен модулю $S^k(D)\otimes_A \mathrm{Hom}_A(P,Q)$.

Упражнение 1.7. Сформулируйте и докажите лемму, двойственную к лемме 1.18 на предшествующей странице. А именно, докажите, что ядро естественной проекции $\nu_{k,k-1}\colon \mathcal{J}^k(P) \to \mathcal{J}^{k-1}(P)$ изоморфно $S^k(\Lambda^1)\otimes_A P$, причем изоморфизм $\alpha^k\colon S^k(\Lambda^1)\otimes_A P \to \ker\nu_{k,k-1}$ задан формулой

$$\alpha^k(da_1\cdot\ldots\cdot da_k\otimes p) = \delta_{a_1,\ldots,a_k}(j_k)(p), \qquad p\in P.$$

Итак, мы получили, что

$$\mathrm{D}_i(\mathrm{Smbl}_k(P)) = \mathrm{Hom}_A(\Lambda^i, P\otimes_A S^k(D)) = P\otimes_A S^k(D)\otimes_A \Lambda^i(D).$$

Но из определения оператора Спенсера легко следует, что действие оператора

$$\delta\colon P\otimes_A S^k(D)\otimes_A\Lambda^i(D) \to P\otimes_A S^{k+1}(D)\otimes_A \Lambda^{i-1}(D)$$

выражается формулой

$$\delta(p\otimes\sigma\otimes\nabla_1\wedge\ldots\wedge\nabla_i) = \sum_{l=1}^{i}(-1)^{l+1}p\otimes\sigma\cdot\nabla_l\otimes\nabla_1\wedge\ldots\wedge\hat{\nabla}_l\wedge\ldots\wedge\nabla_i,$$

где $p\in P$, $\sigma\in S^k(D)$, $\nabla_l\in D$ и «шляпка» означает, что соответствующий член пропущен. Таким образом, мы видим, что оператор δ совпадает с дифференциалом Кошуля (см. приложение, с. 102), откуда следует точность Diff-комплексов Спенсера.

Jet-комплексы Спенсера двойственны к ним и, следовательно, в рассматриваемой ситуации, тоже точны. Это можно доказать также независимо, рассмотрев два Jet-комплекса Спенсера порядков k и $k-1$ и их проекцию

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & P & \longrightarrow & \mathcal{J}^k(P)) & \longrightarrow & \Lambda^1\otimes_A \mathcal{J}^{k-1}(P) & \longrightarrow & \ldots\\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & P & \longrightarrow & \mathcal{J}^{k-1}(P)) & \longrightarrow & \Lambda^1\otimes_A \mathcal{J}^{k-2}(P) & \longrightarrow & \ldots
\end{array}$$

Тогда соответствующие ядерные комплексы имеют вид

$$0\to S^k(\Lambda^1)\otimes_A P \xrightarrow{\delta} \Lambda^1\otimes_A S^{k-1}(\Lambda^1)\otimes_A P \xrightarrow{\delta} \Lambda^2\otimes_A S^{k-2}(\Lambda^1)\otimes_A P \to \ldots$$

и называются *δ-комплексами Спенсера* модуля P. Это комплексы A-гомоморфизмов. Оператор

$$\delta\colon \Lambda^s\otimes_A S^{k-s}(\Lambda^1)\otimes_A P \to \Lambda^{s+1}\otimes_A S^{k-s-1}(\Lambda^1)\otimes_A P,$$

определенный формулой $\delta(\omega\otimes u\otimes p) = (-1)^s\omega\wedge i(u)\otimes p$, где $i\colon S^{k-s}(\Lambda^1)\to\Lambda^1\otimes S^{k-s-1}(\Lambda^1)$ — естественное вложение. Опуская множитель P, мы получаем комплексы де Рама с полиномиальными коэффициентами. Это доказывает, что δ-комплексы Спенсера и, следовательно, Jet-комплексы Спенсера, точны.

Итак, мы получили следующую теорему.

Теорема 1.19. *Если A — гладкая алгебра, то все* Diff- *и* Jet-*комплексы Спенсера точны.*

Рассмотрим теперь оператор $\Delta\colon P\to P_1$ порядка $\leqslant k$. Наша цель — вычислить Jet-когомологии Спенсера оператора Δ, т. е. когомологии комплекса (1.10) на с. 14.

Определение 1.10. Комплекс дифференциальных операторов $\ldots \to P_{i-1} \xrightarrow{\Delta_i} P_i \xrightarrow{\Delta_{i+1}} P_{i+1} \to \ldots$ называется *формально точным*, если комплекс

$$\ldots \to \bar{\mathcal{J}}^{k_i+k_{i+1}+l}(P_{i-1}) \xrightarrow{\varphi_{\Delta_i}^{k_i+k_{i+1}+l}} \bar{\mathcal{J}}^{k_{i+1}+l}(P_i) \xrightarrow{\varphi_{\Delta_{i+1}}^{k_{i+1}+l}} \bar{\mathcal{J}}^l(P_{i+1}) \to \ldots,$$

где $\operatorname{ord}\Delta_j \leqslant k_j$, точен при любом l.

Теорема 1.20. *Jet-когомологии Спенсера оператора Δ совпадают с когомологиями любого формально точного комплекса вида*

$$0 \to P \xrightarrow{\Delta} P_1 \to P_2 \to P_3 \to \ldots$$

Доказательство. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \Lambda^2\otimes\mathcal{J}^\infty(P) & \longrightarrow & \Lambda^2\otimes\mathcal{J}^\infty(P_1) & \longrightarrow & \Lambda^2\otimes\mathcal{J}^\infty(P_2) & \longrightarrow & \ldots \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \bar d} & & \uparrow{\scriptstyle \bar d} & & \uparrow{\scriptstyle \bar d} & & \\
0 & \longrightarrow & \Lambda^1\otimes\mathcal{J}^\infty(P) & \longrightarrow & \Lambda^1\otimes\mathcal{J}^\infty(P_1) & \longrightarrow & \Lambda^1\otimes\mathcal{J}^\infty(P_2) & \longrightarrow & \ldots \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \bar d} & & \uparrow{\scriptstyle \bar d} & & \uparrow{\scriptstyle \bar d} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{J}^\infty(P) & \longrightarrow & \mathcal{J}^\infty(P_1) & \longrightarrow & \mathcal{J}^\infty(P_2) & \longrightarrow & \ldots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

где i-й столбец — это комплекс де Рама с коэффициентами в левом дифференциальном модуле $\mathcal{J}^\infty(P_i)$. Горизонтальные отображения индуцированы операторами Δ_i. Все последовательности точны во всех членах, кроме членов в левом столбце и в нижней строке. Теперь стандартные рассуждения из теории спектральных последовательностей (см. приложение) завершают доказательство. $\square$

Наша следующая цель — доказательство того, что в некотором смысле все комплексы совместности формально точны. Для этого обсудим понятие инволютивности дифференциального оператора.

Отображение $\psi_l^\Delta \colon \mathcal{J}^{k+l}(P) \to \mathcal{J}^l(P_1)$ порождает отображение

$$\operatorname{smbl}_{k,l}(\Delta)\colon S^{k+l}(\Lambda^1)\otimes P \to S^l(\Lambda^1)\otimes P_1,$$

называемое *l-м продолжением символа оператора* Δ.

Упражнение 1.8. Проверьте, что нулевое продолжение

$$\operatorname{smbl}_{k,0}\colon \operatorname{Diff}_k(P,P_1) \to \operatorname{Hom}(S^k(\Lambda^1)\otimes P, P_1)$$

совпадает с естественной проекцией дифференциальных операторов на их символы, $\operatorname{smbl}_k\colon \operatorname{Diff}_k(P,P_1) \to \operatorname{Smbl}_k(P,P_1)$.

Рассмотрим *символический модуль* $g^{k+l} = \ker\operatorname{smbl}_{k,l}(\Delta) \subset S^{k+l}(\Lambda^1)\otimes P$ оператора Δ. Легко показать, что подкомплекс δ-комплекса Спенсера

$$0 \to g^{k+l} \xrightarrow{\delta} \Lambda^1\otimes g^{k+l-1} \xrightarrow{\delta} \Lambda^2\otimes g^{k+l-2} \xrightarrow{\delta} \ldots \tag{1.12}$$

корректно определен. Когомологии этого комплекса в члене $\Lambda^i\otimes g^{k+l-i}$ обозначаются через $H^{k+l,i}(\Delta)$ и называются *δ-когомологиями Спенсера оператора* Δ.

Упражнение 1.9. Докажите, что $H^{k+l,0}(\Delta) = H^{k+l,1}(\Delta) = 0$.

Оператор Δ называется *инволютивным* (в смысле Картана), если $H^{k+l,i}(\Delta) = 0$ для всех $i \geqslant 0$.

О п р е д е л е н и е 1.11. Оператор Δ называется *формально интегрируемым*, если для всех l модули $E_\Delta^l = \ker \psi_\Delta^l \subset \mathcal{J}^{k+l}(P)$ и g^{k+l} проективны и естественные отображения $E_\Delta^l \to E_\Delta^{l-1}$ являются сюръекциями.

Отсюда и до конца текущей главы мы будем предполагать, что все рассматриваемые операторы формально интегрируемы.

Т е о р е м а 1.21. *Если оператор Δ инволютивен, то комплекс совместности оператора Δ формально точен для всех натуральных k_1, k_2, $k_3, \ldots$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что комплекс совместности оператора Δ

$$P \xrightarrow{\Delta} P_1 \xrightarrow{\Delta_1} P_2 \xrightarrow{\Delta_2} \ldots$$

формально точен в членах P_1, $P_2, \ldots, P_{i-1}$. Коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & g^K & \longrightarrow & E_\Delta^{K-k} & \longrightarrow & E_\Delta^{K-k-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & S^K \otimes P & \longrightarrow & \mathcal{J}^K(P) & \longrightarrow & \mathcal{J}^{K-1}(P) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & S^{K-k} \otimes P_1 & \longrightarrow & \mathcal{J}^{K-k}(P_1) & \longrightarrow & \mathcal{J}^{K-k-1}(P_1) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & S^{k_i} \otimes P_i & \longrightarrow & \mathcal{J}^{k_i}(P_i) & \longrightarrow & \mathcal{J}^{k_i-1}(P_i) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & P_{i+1} & \longrightarrow & P_{i+1} & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

где $S^j = S^j(\Lambda^1)$, $K = k + k_1 + k_2 + \ldots + k_i$, показывает, что комплекс

$$0 \to g^K \to S^K \otimes P \to S^{K-k} \otimes P_1 \to \ldots \to S^{k_i} \otimes P_i \to P_{i+1}$$

точен.

Нам осталось доказать, что последовательности

$$S^{k_{i-1}+k_i+l} \otimes P_{i-1} \to S^{k_i+l} \otimes P_i \to S^l \otimes P_{i+1}$$

точны для всех $l \geqslant 1$. Доказательство проводится индукцией по l, шаг индукции использует стандартные рассуждения из теории спектральных последовательностей примененные к коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & S^l \otimes P_{i+1} & \xrightarrow{\delta} & \Lambda^1 \otimes S^{l-1} \otimes P_{i+1} & \xrightarrow{\delta} & \Lambda^2 \otimes S^{l-2} \otimes P_{i+1} & \xrightarrow{\delta} & \dots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & S^{k_i+l} \otimes P_i & \xrightarrow{\delta} & \Lambda^1 \otimes S^{k_i+l-1} \otimes P_i & \xrightarrow{\delta} & \Lambda^2 \otimes S^{k_i+l-2} \otimes P_i & \xrightarrow{\delta} & \dots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & S^{K+l} \otimes P_0 & \xrightarrow{\delta} & \Lambda^1 \otimes S^{K+l-1} \otimes P_0 & \xrightarrow{\delta} & \Lambda^2 \otimes S^{K+l-2} \otimes P_0 & \xrightarrow{\delta} & \dots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & g^{K+l} & \xrightarrow{\delta} & \Lambda^1 \otimes g^{K+l-1} & \xrightarrow{\delta} & \Lambda^2 \otimes g^{K+l-2} & \xrightarrow{\delta} & \dots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

□

П р и м е р 1.1. Для дифференциала де Рама $d\colon A \to \Lambda^1$ символические модули g^l тривиальны. Значит, дифференциал де Рама инволютивен и, следовательно, комплекс де Рама формально точен.

П р и м е р 1.2. Рассмотрим геометрическую ситуацию и предположим, что многообразие M является (псевдо)римановым многообразием. Для некоторого целого числа p рассмотрим оператор $\Delta = d{*}d\colon \Lambda^p \to \Lambda^{n-p}$, где $*$ — оператор Ходжа на модулях дифференциальных форм. Покажем, что комплекс

$$\Lambda^p \xrightarrow{\Delta} \Lambda^{n-p} \xrightarrow{d} \Lambda^{n-p+1} \xrightarrow{d} \Lambda^{n-p+2} \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Lambda^n \to 0$$

формально точен и, таким образом, является комплексом совместности для оператора Δ. Учитывая предыдущий пример, мы должны доказать, что образ отображения $\operatorname{smbl}(\Delta)\colon S^{l+2} \otimes \Lambda^p \to S^l \otimes \Lambda^{n-p}$ совпадает с образом отображения $\operatorname{smbl}(d)\colon S^{l+1} \otimes \Lambda^{n-p-1} \to S^l \otimes \Lambda^{n-p}$ для всех $l \geqslant 0$. Так как $\Delta * = d{*}d{*} = d({*}d{*}+d)$, достаточно показать, что отображение $\operatorname{smbl}({*}d{*}+d)\colon S^{l+1} \otimes (\Lambda^{n-p+1} \oplus \Lambda^{n-p-1}) \to S^l \otimes \Lambda^{n-p}$ — эпиморфизм. Рассмотрим отображение $\operatorname{smbl}(L)\colon S^l \otimes \Lambda^{n-p} \to S^l \otimes \Lambda^{n-p}$, где $L = ({*}d{*}+d)({*}d{*} \pm d)$ — оператор Лапласа. Из рассмотрения в координатах легко следует, что символ оператора Лапласа эпиморфен, поэтому эпиморфен и символ оператора ${*}d{*}+d$.

Условие инволютивности не является необходимым для формальной точности комплекса совместности, что вытекает из следующей теоремы.

Т е о р е м а 1.22 (δ-лемма Пуанкаре). *Если алгебра A нётерова, то для любого оператора Δ существует такое целое число $l_0 = l_0(m, n, k)$, где $m = \operatorname{rank} P$, что $H^{k+l,i}(\Delta) = 0$ при $l \geqslant l_0$ и $i \geqslant 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о можно найти, например, в [9, 25]. □

Таким образом, из доказательства теоремы 1.21 на предшествующей странице видно, что для достаточно большого целого k_1 комплекс совместности формально точен для любого оператора Δ.

Мы всегда будем предполагать, что комплекс совместности формально точен.

У п р а ж н е н и е 1.10. Покажите, что в предположении формальной точности комплекса совместности утверждение из упражнения 1.3 на с. 11 выполнено для операторов ∇ порядка $> k_1$.

1.8. **Геометрические модули.** Есть несколько путей обобщения или уточнения вышеописанной теории. Возможно, наиболее важный из них, ведущий ко многим интересным применениям, — это путь, связанный со следующим понятием.

Определение 1.12. Говорят, что абелева подкатегория $\mathcal{M}(A)$ категории всех A-модулей *дифференциально замкнута*, если

1) она замкнута относительно тензорного произведения над A,
2) она замкнута относительно действия функторов $\mathrm{Diff}_k^{(+)}(\cdot\,,\cdot)$ и $\mathrm{D}_i(\cdot)$,
3) функторы $\mathrm{Diff}_k^{(+)}(P,\cdot), \mathrm{Diff}_k^{(+)}(\cdot\,,Q)$ и $\mathrm{D}_i(\cdot)$ представимы в $\mathcal{M}(A)$, когда P, Q — объекты из $\mathcal{M}(A)$.

В качестве примера рассмотрим следующую ситуацию. Пусть M — гладкое (т. е. класса C^∞) конечномерное многообразие. Положим $A = C^\infty(M)$. Пусть $\pi\colon E \to M$, $\xi\colon F \to M$ — два гладких локально тривиальных конечномерных векторных расслоения над M и $P = \Gamma(\pi)$, $Q = \Gamma(\xi)$ — соответствующие A-модули гладких сечений.

Можно доказать, что модуль $\mathrm{Diff}_k^{(+)}(P,Q)$ совпадает с модулем дифференциальных операторов k-го порядка, действующих из расслоения π в ξ (см. предложение 1.1 на с. 6), а модуль $\mathrm{D}(A)$ совпадает с модулем векторных полей на многообразии M.

Однако если построить представляющие объекты для таких функторов, как $\mathrm{Diff}_k(P,\cdot)$ и $\mathrm{D}_i(\cdot)$, в категории всех A-модулей, модули $\mathcal{J}^k(P)$ и Λ^i не будут совпадать с «геометрическими» джетами и дифференциальными формами.

Упражнение 1.11. Покажите, что в случае $M = \mathbb{R}$ форма $d(\sin x) - \cos x\, dx$ — ненулевая.

Определение 1.13. Модуль P над $C^\infty(M)$ называется *геометрическим*, если

$$\bigcap_{x\in M} \mu_x P = 0,$$

где μ_x — идеал в $C^\infty(M)$, состоящий из функций, обращающихся в нуль в точке $x \in M$.

Обозначим через $\mathcal{G}(M)$ полную подкатегорию категории всех модулей, объекты которой — геометрические $C^\infty(M)$-модули. Пусть P — A-модуль. Положим

$$\mathcal{G}(P) = P\Big/\bigcap_{x\in M} \mu_x P.$$

Очевидно, что $\mathcal{G}(P)$ — геометрический модуль, а соответствие $P \Rightarrow \mathcal{G}(P)$ — функтор из категории всех $C^\infty(M)$-модулей в категорию $\mathcal{G}(M)$ геометрических модулей.

Предложение 1.23. *Пусть M — гладкое конечномерное многообразие и $A = C^\infty(M)$. Тогда*:

1) *Категория $\mathcal{G}(A)$ геометрических A-модулей дифференциально замкнута.*
2) *Представляющие объекты функторов $\mathrm{Diff}_k(P,\cdot)$ и $\mathrm{D}_i(\cdot)$ в $\mathcal{G}(A)$ совпадают с $\mathcal{G}(\mathcal{J}^k(P))$ и $\mathcal{G}(\Lambda^i)$ соответственно.*
3) *Модуль $\mathcal{G}(\Lambda^i)$ совпадает с модулем дифференциальных i-форм на M.*
4) *Если $P = \Gamma(\pi)$ для гладкого локально тривиального конечномерного векторного расслоения $\pi\colon E \to M$, то модуль $\mathcal{G}(\mathcal{J}^k(P))$ совпадает с модулем $\Gamma(\pi_k)$, где $\pi_k\colon J^k(\pi) \to M$ — расслоение k-джетов для расслоения π (см. §3.1).*

Упражнение 1.12. Докажите пп. 1), 2) и 3) этого предложения.

Ситуацию, описанную в этом предложении, мы будем называть *геометрической.*

Другой пример дифференциально замкнутой категории дает категория фильтрованных геометрических модулей над фильтрованной алгеброй. Эта категория важна для построения дифференциального исчисления на многообразиях бесконечных джетов и бесконечно продолженных дифференциальных уравнений (см. §§3.3 и 3.8 соответственно).

Замечание 1.5. Логическая структура вышеописанной теории очевидным образом обобщается на суперкоммутативный случай. Об обобщении на некоммутативный случай см. [60, 61].

2. Алгебраическая модель лагранжева формализма

Теперь, пользуясь введенными выше алгебраическими понятиями, мы построим алгебраическую модель лагранжева формализма; см. также [59]. За геометрическими мотивировками мы отсылаем читателя к главе 7 и, в особенности, к §7.5.

2.1. Сопряженные операторы. Рассмотрим A-модуль P и комплекс A-гомоморфизмов

$$0 \to \mathrm{Diff}^+(P, A) \xrightarrow{w} \mathrm{Diff}^+(P, \Lambda^1) \xrightarrow{w} \mathrm{Diff}^+(P, \Lambda^2) \xrightarrow{w} \dots, \qquad (2.1)$$

где по определению $w(\nabla) = d \circ \nabla \in \mathrm{Diff}^+(P, \Lambda^{i+1})$ для оператора $\nabla \in \mathrm{Diff}^+(P, \Lambda^i)$. Пусть $\hat{P}_n$, $n \geqslant 0$, — модуль когомологий этого комплекса в члене $\mathrm{Diff}^+(P, \Lambda^n)$.

Любой оператор $\Delta\colon P \to Q$ определяет естественное коцепное отображение

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots & \longrightarrow & \mathrm{Diff}^+(Q, \Lambda^{i-1}) & \xrightarrow{w} & \mathrm{Diff}^+(Q, \Lambda^i) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \tilde{\Delta}\Big\downarrow & & \tilde{\Delta}\Big\downarrow & & \\
\dots & \longrightarrow & \mathrm{Diff}^+(P, \Lambda^{i-1}) & \xrightarrow{w} & \mathrm{Diff}^+(P, \Lambda^i) & \longrightarrow & \dots,
\end{array}$$

где $\tilde{\Delta}(\nabla) = \nabla \circ \Delta \in \mathrm{Diff}^+(P, \Lambda^i)$ при $\nabla \in \mathrm{Diff}^+(Q, \Lambda^i)$.

Определение 2.1. Отображение когомологий $\Delta_n^*\colon \hat{Q}_n \to \hat{P}_n$, индуцированное отображением $\tilde{\Delta}$, называется (n-м) *сопряженным оператором* к Δ.

Ниже мы предполагаем, что n фиксировано, и опускаем соответствующие индексы. Основные свойства сопряженного оператора описывает следующее

Предложение 2.1. *Пусть P, Q и R — A-модули. Тогда*

1) *Если $\Delta \in \mathrm{Diff}_k(P, Q)$, то $\Delta^* \in \mathrm{Diff}_k(\hat{Q}, \hat{P})$.*

2) *Если $\Delta_1 \in \mathrm{Diff}(P, Q)$ и $\Delta_2 \in \mathrm{Diff}(Q, R)$, то $(\Delta_2 \circ \Delta_1)^* = \Delta_1^* \circ \Delta_2^*$.*

Доказательство. Обозначим через $[\nabla]$ класс когомологий оператора $\nabla \in \mathrm{Diff}^+(P, \Lambda^n)$, $w(\nabla) = 0$.

1) Пусть $a \in A$. Тогда

$$\delta_a(\Delta^*)([\nabla]) = \Delta^*([\nabla]) - \Delta^*(a[\nabla]) = [\nabla \circ a \circ \Delta] - [\nabla \circ \Delta \circ a] = \\ = (a \circ \Delta)^*([\nabla]) - (\Delta \circ a)^*([\nabla]) = -(\delta_a(\Delta))^*([\nabla]).$$

Следовательно, $\delta_{a_0,\dots,a_k}(\Delta^*) = (-1)^{k+1}(\delta_{a_0,\dots,a_k}(\Delta))^*$ для любых $a_0, \dots, a_k \in A$.

2) Второе утверждение вытекает из следующих тождеств:

$$(\Delta_2 \circ \Delta_1)^*([\nabla]) = [\nabla \circ \Delta_2 \circ \Delta_1] = \Delta_1^*([\nabla \circ \Delta_2]) = \Delta_1^*(\Delta_2^*([\nabla])),$$

что и завершает доказательство. □

Пример 2.1. Пусть $a \in A$ и $a = a_P\colon P \to P$ — оператор умножения на a: $p \mapsto ap$. Тогда, очевидно, $a_P^* = a_{\hat{P}}$.

Пример 2.2. Пусть $p \in P$ и $p\colon A \to P$ — оператор, действующий по формуле $a \mapsto ap$. Тогда, согласно первому утверждению предложения 2.1, $p^* \in \mathrm{Hom}_A(\hat{P}, \hat{A})$. Таким образом, существует естественное спаривание $\langle \cdot\,, \cdot \rangle\colon P \otimes_A \hat{P} \to \hat{A}$, определенное формулой $\langle p, \hat{p} \rangle = p^*(\hat{p})$, $\hat{p} \in \hat{P}$.

2.2. Березиниан и интегрирование. Пусть дан комплекс дифференциальных операторов $\dots \to P_k \xrightarrow{\Delta_k} P_{k+1} \to \dots$. Тогда, согласно предложению 2.1, последовательность $\dots \leftarrow \hat{P}_k \xleftarrow{\Delta_k^*} \hat{P}_{k+1} \leftarrow \dots$ также является комплексом дифференциальных операторов. Этот комплекс называется *сопряженным* к данному.

Определение 2.2. Комплекс, сопряженный к комплексу де Рама алгебры A, называется *комплексом интегральных форм* и обозначается

$$0 \leftarrow \Sigma_0 \xleftarrow{\delta} \Sigma_1 \xleftarrow{\delta} \dots,$$

где $\Sigma_i = \hat{\Lambda}^i$, $\delta = d^*$. Модуль $\Sigma_0 = \hat{A}$ называется *березинианом* (или *модулем форм объема*) и обозначается $\mathcal{B}$.

Предположим, что рассматриваемые модули проективны и конечного типа. Тогда $\hat{P} = \mathrm{Hom}_A(P, \mathcal{B})$. В частности, $\Sigma_i = \hat{\Lambda}^i = \mathrm{D}_i(\mathcal{B})$.

Вычислим березиниан в геометрической ситуации (см. §1.8), когда $A = C^\infty(M)$.

Т е о р е м а 2.2. *Если $A = C^\infty(M)$, где M — гладкое конечномерное многообразие, то*

1) $\hat{A}_s = 0$ *для* $s \neq n = \dim M$.
2) $\hat{A}_n = \mathcal{B} = \Lambda^n$, *т. е. березиниан совпадает с модулем форм максимальной степени. Этот изоморфизм сопоставляет каждой форме* $\omega \in \Lambda^n$ *класс когомологий оператора нулевого порядка* $\omega\colon A \to \Lambda^n$, $f \mapsto f\omega$.

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству теоремы 1.19 на с. 16 и предоставляется читателю. □

В геометрической ситуации существует естественный изоморфизм $\Lambda^i \to \mathrm{D}_{n-i}(\Lambda^n) = \Sigma_i$, который сопоставляет каждой форме $\omega \in \Lambda^i$ гомоморфизм $\omega\colon \Lambda^{n-i} \to \Lambda^n$, определенный формулой $\omega(\eta) = \eta \wedge \omega$, $\eta \in \Lambda^{n-i}$.

У п р а ж н е н и е 2.1. Покажите, что $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle = \omega_1 \wedge \omega_2$, $\omega_1 \in \Lambda^i$, $\omega_2 \in \Lambda^{n-i}$, где $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ — спаривание, определенное в примере 2.2 на предшествующей странице.

У п р а ж н е н и е 2.2. Докажите, что $d_i^* = (-1)^{i+1} d_{n-i-1}$, где $d_i\colon \Lambda^i \to \Lambda^{i+1}$ — дифференциал де Рама.

Таким образом, в геометрической ситуации комплекс интегральных форм совпадает (с точностью до знака) с комплексом де Рама.

У п р а ж н е н и е 2.3. Выведите координатную формулу для сопряженного оператора:

1) если $\Delta = \sum_\sigma a_\sigma \dfrac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x_\sigma}$ — скалярный оператор, то $\Delta^* = \sum_\sigma (-1)^{|\sigma|} \dfrac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x_\sigma} \circ a_\sigma$;
2) если $\Delta = \|\Delta_{ij}\|$ — матричный оператор, то $\Delta^* = \|\Delta^*_{ji}\|$.

Оператор $\mathcal{D}\colon \mathrm{Diff}^+(\Lambda^n) \to \Lambda^n$, определенный на с. 7, порождает отображение $\int\colon \mathcal{B} \to H^n(\Lambda^\bullet)$ из березиниана в группу когомологий де Рама алгебры A. А именно, для любого оператора $\nabla \in \mathrm{Diff}(A, \Lambda^n)$, удовлетворяющего равенству $d \circ \nabla = 0$, мы полагаем $\int[\nabla] = [\nabla(1)]$, где $[\cdot]$ обозначает класс когомологий.

П р е д л о ж е н и е 2.3. *Отображение* $\int\colon \mathcal{B} \to H^n(\Lambda^\bullet)$ *обладает следующими свойствами*:

1) *Если* $\omega \in \Sigma_1$, *то* $\int \delta\omega = 0$.
2) *Для любого дифференциального оператора* $\Delta\colon P \to Q$ *и элементов* $p \in P$, $\hat{q} \in \hat{Q}$ *справедливо тождество*
$$\int \langle \Delta(p), \hat{q} \rangle = \int \langle p, \Delta^*(\hat{q}) \rangle.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть $\omega = [\nabla] \in \Sigma_1$. Тогда $\delta\omega = [\nabla \circ d]$ и, следовательно, $\int \omega = [\nabla d(1)] = 0$.

2) Пусть $\hat{q} = [\nabla]$ для некоторого оператора $\nabla\colon Q \to \Lambda^n$. Тогда
$$\int \langle \Delta(p), \hat{q} \rangle = \int [\nabla \Delta(p)] = \int \nabla \circ \Delta \circ p = \int \langle p, [\nabla \circ \Delta] \rangle = \int \langle p, \Delta^*(\hat{q}) \rangle,$$
что и завершает доказательство. □

З а м е ч а н и е 2.1. Заметим, что березиниан $\mathcal{B}$ является правым дифференциальным модулем (см. §1.6) и комплекс интегральных форм можно понимать как комплекс, двойственный к комплексу де Рама с коэффициентами в $\mathcal{B}$.

У п р а ж н е н и е 2.4. Покажите, что в геометрической ситуации правое действие векторных полей можно также определить при помощи формулы $X(\omega) = -\mathrm{L}_X(\omega)$, где L_X — производная Ли.

Теперь мы установим соответствие между когомологиями де Рама и гомологиями комплекса интегральных форм.

П р е д л о ж е н и е 2.4 (двойственность Пуанкаре). *Существует спектральная последовательность* $(E^r_{p,q}, d^r_{p,q})$, *второй член*

$$E^2_{p,q} = H_p((\Sigma_\bullet)_{-q})$$

которой совпадает с гомологиями комплексов интегральных форм и которая сходится к когомологиям де Рама $H(\Lambda^\bullet)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Diff}^+(A,A) \arrow[r, "w"] \arrow[u] & \mathrm{Diff}^+(A,\Lambda^1) \arrow[r, "w"] \arrow[u] & \mathrm{Diff}^+(A,\Lambda^2) \arrow[r] \arrow[u] & \dots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Diff}^+(\Lambda^1,A) \arrow[r, "w"] \arrow[u, "\tilde d"'] & \mathrm{Diff}^+(\Lambda^1,\Lambda^1) \arrow[r, "w"] \arrow[u, "\tilde d"'] & \mathrm{Diff}^+(\Lambda^1,\Lambda^2) \arrow[r] \arrow[u, "\tilde d"'] & \dots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Diff}^+(\Lambda^2,A) \arrow[r, "w"] \arrow[u, "\tilde d"'] & \mathrm{Diff}^+(\Lambda^2,\Lambda^1) \arrow[r, "w"] \arrow[u, "\tilde d"'] & \mathrm{Diff}^+(\Lambda^2,\Lambda^2) \arrow[r] \arrow[u, "\tilde d"'] & \dots \\
 & \vdots \arrow[u, "\tilde d"'] & \vdots \arrow[u, "\tilde d"'] & \vdots \arrow[u, "\tilde d"'] &
\end{tikzcd}$$

где дифференциал $\tilde d\colon \mathrm{Diff}^+(\Lambda^{k+1}, P) \to \mathrm{Diff}^+(\Lambda^k, P)$ определен формулой $\tilde d(\Delta) = \Delta \circ d$. Доказываемое утверждение легко следует из стандартных рассуждений из теории спектральных последовательностей. $\square$

2.3. **Формула Грина.** Пусть Q — A-модуль. Тогда существует естественный гомоморфизм $\xi_Q\colon Q \to \hat{\hat{Q}}$, определенный равенством $\xi_Q(q)(\hat q) = \langle q, \hat q\rangle$. Следовательно, любому оператору $\Delta\colon P \to \hat Q$ соответствует оператор $\Delta^\circ\colon Q \to \hat P$, где $\Delta^\circ = \Delta^* \circ \xi_Q$. Этот оператор тоже будет называться *сопряженным* к Δ.

З а м е ч а н и е 2.2. В геометрической ситуации оба понятия сопряженности совпадают.

П р и м е р 2.3. Пусть $\hat q \in \hat Q$ и $\hat q\colon A \to \hat Q$ — оператор нулевого порядка, заданный формулой $a \mapsto a\hat q$. Сопряженный оператор — это сам элемент $\hat q$, понимаемый как элемент пространства $\mathrm{Hom}_A(Q, \mathcal{B})$.

П р е д л о ж е н и е 2.5. *Соответствие* $\Delta \mapsto \Delta^\circ$ *обладает следующими свойствами*:

1) *Пусть* $\Delta \in \mathrm{Diff}(P, \hat Q)$ *и* $\Delta(p) = [\nabla_p]$, *где* $\nabla_p \in \mathrm{Diff}(Q, \Lambda^i)$. *Тогда* $\Delta^\circ(q) = [\Box_q]$, *где* $\Box_q \in \mathrm{Diff}(P, \Lambda^i)$ *и* $\Box_q(p) = \nabla_p(q)$.
2) *Для любого* $\Delta \in \mathrm{Diff}(P, \hat Q)$ *выполняется равенство* $(\Delta^\circ)^\circ = \Delta$.
3) *Для любого* $a \in A$ *выполняется равенство* $(a\Delta)^\circ = \Delta^\circ \circ a$.
4) *Если* $\Delta \in \mathrm{Diff}_k(P, \mathcal{B})$, *то* $\Delta^\circ(a) = j_k^*(a\Delta)$.
5) *Если* $X \in \mathrm{D}_1(\mathcal{B})$, *то* $X + X^\circ = \delta X \in \mathrm{Diff}_0(A, \mathcal{B}) = \mathcal{B}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждения 1), 3) и 4) — прямые следствия определения. Утверждение 2) следует из 1). Докажем утверждение 5).

Очевидно, что $\delta_a(j_1) = j_1(a) - aj_1(1) \in \mathcal{J}^1(A)$. Следовательно, для оператора $\Delta \in \mathrm{Diff}_1(A, P)$ имеем $(\delta_a(j_1))^*(\Delta) = \Delta(a) - a\Delta(1) = (\delta_a\Delta)(1)$. Значит,

$$\delta_a(X + X^\circ)(1) = (\delta_a X)(1) + (\delta_a(j_1^*))(X) = (\delta_a X)(1) - \delta_a(j_1)^*(X) = 0$$

и, наконец, $\delta X = j_1^*(X) = X^\circ(1) = X + X^\circ$. $\square$

Отметим, что утверждения 1) и 4) предложения 2.5 можно взять за определение Δ°.

Заметим теперь, что из предложения 1.15 на с. 13 следует, что модули $\mathrm{D}_i(P)$, $i \geqslant 2$, могут быть описаны как

$$\mathrm{D}_i(P) = \{\, \nabla \in \mathrm{Diff}_1(\Lambda^{i-1}, P) \mid \nabla \circ d = 0 \,\}.$$

Взяв $\mathcal{B}$ вместо P, можно легко показать, что $\delta\nabla = \nabla^\circ(1)$ и что последнее равенство верно также и при $i = 1$. Предложение 2.5 на предыдущей странице показывает, что соответствие $\Delta \mapsto \Delta^\circ$ устанавливает изоморфизм между модулями $\mathrm{Diff}(P, \hat{Q})$ и $\mathrm{Diff}^+(Q, \hat{P})$, который, если принять во внимание предложение 1.15, означает, что Diff-комплекс Спенсера модуля $\hat{P}$ изоморфен комплексу

$$0 \leftarrow \hat{P} \xleftarrow{\mu} \mathrm{Diff}(P, \mathcal{B}) \xleftarrow{\omega} \mathrm{Diff}(P, \Sigma_1) \xleftarrow{\omega} \mathrm{Diff}(P, \Sigma_2) \leftarrow \dots, \tag{2.2}$$

где $\omega(\nabla) = \delta \circ \nabla$, $\mu(\nabla) = \nabla^\circ(1)$. Из теоремы 1.19 на с. 16 немедленно вытекает

Т е о р е м а 2.6. *Комплекс* (2.2) *точен.*

З а м е ч а н и е 2.3. Пусть $\Delta\colon P \to Q$ — дифференциальный оператор. Очевидно, что тогда следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longleftarrow & \hat{Q} & \xleftarrow{\ \mu\ } & \mathrm{Diff}(Q,\mathcal{B}) & \xleftarrow{\ \omega\ } & \mathrm{Diff}(Q,\Sigma_1) & \xleftarrow{\ \omega\ } & \dots \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Delta^*} & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \\
0 & \longleftarrow & \hat{P} & \xleftarrow{\ \mu\ } & \mathrm{Diff}(P,\mathcal{B}) & \xleftarrow{\ \omega\ } & \mathrm{Diff}(P,\Sigma_1) & \xleftarrow{\ \omega\ } & \dots
\end{array}$$

Из теоремы 2.6 вытекает следующий важный результат:

Т е о р е м а 2.7 (формула Грина). *Если* $\Delta \in \mathrm{Diff}(P, \hat{Q})$, $p \in P$, $q \in Q$, *то*

$$\langle q, \Delta(p)\rangle - \langle \Delta^\circ(q), p\rangle = \delta G$$

для некоторой интегральной 1*-формы* $G \in \Sigma_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим оператор $\nabla \in \mathrm{Diff}(A, \mathcal{B})$. Тогда $\nabla - \nabla^\circ(1)$ лежит в $\ker \mu$ и, следовательно, существует оператор $\square \in \mathrm{Diff}(A, \Sigma_1)$, удовлетворяющий условию $\nabla - \nabla^\circ(1) = \omega(\square) = \delta \circ \square$. Значит, $\nabla(1) - \nabla^\circ(1) = \delta G$, где $G = \square(1)$. Полагая $\nabla(a) = \langle q, \Delta(ap)\rangle$, мы получаем искомое. $\square$

З а м е ч а н и е 2.4. Интегральная 1-форма G не зависит от p и q. Покажем, что G можно выбрать так, что отображение $p \times q \mapsto G(p, q)$ будет бидифференциальным оператором. Сначала заметим, что отображение $\omega\colon \mathrm{Diff}^+(A, \Sigma_1) \to \mathrm{Diff}^+(A, \mathcal{B})$ является A-гомоморфизмом. Так как модуль $\mathrm{Diff}^+(A, \mathcal{B})$ проективен, существует такой A-гомоморфизм $\varkappa\colon \operatorname{im}\omega \to \mathrm{Diff}^+(A, \Sigma_1)$, что $\omega \circ \varkappa = \mathrm{id}$. Мы можем положить $\square = \varkappa(\nabla - \nabla(1))$. Отсюда $G = \varkappa(\nabla - \nabla(1))(1)$. Это доказывает требуемое утверждение.

З а м е ч а н и е 2.5. С алгебраической точки зрения мы видим, что в геометрической ситуации имеются многочисленные вводящие в заблуждение изоморфизмы, например, $\mathcal{B} = \Lambda^n$, $\Delta^\circ = \Delta^*$, и т. д. В более общих ситуациях, например, в суперкоммутативной ситуации (см. §7.9), эти изоморфизмы исчезают.

2.4. **Оператор Эйлера.** Пусть P и Q — A-модули. Введем обозначение

$$\mathrm{Diff}_{(k)}(P, Q) = \underbrace{\mathrm{Diff}(P, \dots, \mathrm{Diff}(P}_{k\ \text{раз}}, Q) \dots)$$

и положим $\mathrm{Diff}_{(*)}(P, Q) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathrm{Diff}_{(k)}(P, Q)$. Дифференциальный оператор $\nabla \in \mathrm{Diff}_{(k)}(P, Q)$, удовлетворяющий условию

$$\nabla(p_1, \dots, p_i, p_{i+1}, \dots, p_k) = \sigma\nabla(p_1, \dots, p_{i+1}, p_i, \dots, p_k),$$

называется *симметрическим*, если $\sigma = 1$, и *кососимметрическим*, если $\sigma = -1$ при всех i. Модули симметрических и кососимметрических операторов будут обозначаться через $\mathrm{Diff}^{\mathrm{sym}}_{(k)}(P, Q)$ и

$\mathrm{Diff}^{\mathrm{alt}}_{(k)}(P,Q)$ соответственно. Из теоремы 2.6 на предыдущей странице и следствия 1.3 на с. 6 следует, что для любого k комплекс

$$0 \leftarrow \mathrm{Diff}_{(k)}(P,\mathcal{B}) \xleftarrow{\omega} \mathrm{Diff}_{(k)}(P,\Sigma_1) \xleftarrow{\omega} \mathrm{Diff}_{(k)}(P,\Sigma_2) \xleftarrow{\omega} \ldots, \tag{2.3}$$

где $\omega(\nabla)=\delta\circ\nabla$, точен во всех положительных размерностях, а его нулевые гомологии имеют вид $H_0(\mathrm{Diff}_{(k)}(P,\Sigma_\bullet))=\mathrm{Diff}_{(k-1)}(P,\hat{P})$. Этот результат можно уточнить следующим образом.

Теорема 2.8. *Симметрическая*

$$0 \leftarrow \mathrm{Diff}^{\mathrm{sym}}_{(k)}(P,\mathcal{B}) \xleftarrow{\omega} \mathrm{Diff}^{\mathrm{sym}}_{(k)}(P,\Sigma_1) \xleftarrow{\omega} \mathrm{Diff}^{\mathrm{sym}}_{(k)}(P,\Sigma_2) \xleftarrow{\omega} \ldots \tag{2.4}$$

и антисимметрическая

$$0 \leftarrow \mathrm{Diff}^{\mathrm{alt}}_{(k)}(P,\mathcal{B}) \xleftarrow{\omega} \mathrm{Diff}^{\mathrm{alt}}_{(k)}(P,\Sigma_1) \xleftarrow{\omega} \mathrm{Diff}^{\mathrm{alt}}_{(k)}(P,\Sigma_2) \xleftarrow{\omega} \ldots \tag{2.5}$$

части комплекса (2.3) *ацикличны во всех положительных размерностях, а нулевые гомологии, обозначаемые через* $L^{\mathrm{sym}}_k(P)$ *и* $L^{\mathrm{alt}}_k(P)$ *соответственно, имеют вид*

$$\begin{aligned} L^{\mathrm{sym}}_k(P) &= \{\, \nabla\in\mathrm{Diff}^{\mathrm{sym}}_{(k-1)}(P,\hat{P}) \mid (\nabla(p_1,\ldots,p_{k-2}))^\circ = \nabla(p_1,\ldots,p_{k-2}) \,\}, \\ L^{\mathrm{alt}}_k(P) &= \{\, \nabla\in\mathrm{Diff}^{\mathrm{alt}}_{(k-1)}(P,\hat{P}) \mid (\nabla(p_1,\ldots,p_{k-2}))^\circ = -\nabla(p_1,\ldots,p_{k-2}) \,\} \end{aligned}$$

при $k>1$ *и*

$$L^{\mathrm{sym}}_1(P) = L^{\mathrm{alt}}_1(P) = \hat{P}.$$

Доказательство. Рассмотрим только случай симметрических операторов, так как доказательство в кососимметрическом случае проводится совершенно так же.

Очевидно, что комплекс (2.4) является прямым слагаемым в (2.3), и поэтому единственное, что нам надо доказать, — это коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Diff}_{(k-1)}(P,\hat{P}) \arrow[d, "\rho'"'] & \mathrm{Diff}_{(k)}(P,\mathcal{B}) \arrow[l, "\mu_{(k-1)}"'] \arrow[d, "\rho"] \\ \mathrm{Diff}_{(k-1)}(P,\hat{P}) & \mathrm{Diff}_{(k)}(P,\mathcal{B}) \arrow[l, "\mu_{(k-1)}"'] \end{tikzcd}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mu_{(k-1)}(\nabla)(p_1,\ldots,p_{k-1}) &= (\nabla(p_1,\ldots,p_{k-1}))^\circ(1), \\ \rho(\nabla)(p_1,\ldots,p_{k-1},p_k) &= \nabla(p_1,\ldots,p_k,p_{k-1}), \\ \rho'(\nabla)(p_1,\ldots,p_{k-2}) &= (\nabla(p_1,\ldots,p_{k-2}))^\circ. \end{aligned}$$

Заметим, что $\mu_{(k-1)}=\mathrm{Diff}_{(k-1)}(\mu)$, где μ определено в (2.2) на предшествующей странице. Для доказательства коммутативности достаточно рассмотреть случай $k=2$. Пусть $\nabla\in\mathrm{Diff}_{(2)}(P,\mathcal{B})$ и $\nabla(p_1,p_2)=[\Delta_{p_1,p_2}]$. Тогда $\mu_{(1)}(\nabla)(p_1)=[\Delta'_{p_1}]$, где $\Delta'_{p_1}(p_2)=\Delta_{p_1,p_2}(1)$. Далее, $\rho'(\mu_{(1)}(\nabla))=[\Delta''_{p_1}]$, где

$$\Delta''_{p_1}(p_2)=\Delta'_{p_2}(p_1)=\Delta_{p_2,p_1}(1).$$

С другой стороны, мы имеем $\rho(\nabla)(p_1,p_2)=\nabla(p_2,p_1)$ и $\mu_{(1)}(\rho(\nabla))(p_1)=[\square_{p_1}]$, где $\square_{p_1}(p_2)=\Delta_{p_2,p_1}(1)$. □

Определение 2.3. Элементы пространства $\mathcal{L}ag(P)=\bigoplus_{k=1}^\infty L^{\mathrm{sym}}_k(P)$ называются *лагранжианами* модуля P. Оператор $L\in\mathrm{Diff}^{\mathrm{sym}}_{(*)}(P,\mathcal{B})$ называется *плотностью* лагранжиана $\mathcal{L}$, если $\mathcal{L}=L \bmod \operatorname{im}\omega$. Естественное соответствие $\mathbf{E}\colon \mathrm{Diff}^{\mathrm{sym}}_{(*)}(P,\mathcal{B})\to\mathrm{Diff}^{\mathrm{sym}}_{(*)}(P,\hat{P})$, $L\mapsto\mathcal{L}$, называется *оператором Эйлера*, а операторы вида $\Delta=\mathbf{E}(L)$ — *операторами Эйлера–Лагранжа*.

Из теоремы 2.8 вытекает

Следствие 2.9. *Для любого проективного* A*-модуля* P *имеем*:

1) *Оператор* $\Delta\in\mathrm{Diff}^{\mathrm{sym}}_{(*)}(P,\hat{P})$ *является оператором Эйлера–Лагранжа тогда и только тогда, когда оператор* Δ *самосопряжен, т. е. когда* $\Delta\in L^{\mathrm{sym}}_*(P)$.

2) *Плотность* $L \in \mathrm{Diff}^{\mathrm{sym}}_{(*)}(P, \mathcal{B})$ *соответствует тривиальному лагранжиану, т. е.* $\mathbf{E}(L) = 0$, *тогда и только тогда, когда* L *— полная дивергенция:* $L \in \operatorname{im} \omega$.

2.5. **Законы сохранения.** Обозначим через $\mathcal{F}$ коммутативную алгебру нелинейных операторов[4] $\mathrm{Diff}^{\mathrm{sym}}_{(*)}(P, A)$. Тогда для любого A-модуля Q имеем

$$\mathrm{Diff}^{\mathrm{sym}}_{(*)}(P, Q) = \mathcal{F} \otimes_A Q.$$

Пусть $\Delta \in \mathcal{F} \otimes_A Q$ — дифференциальный оператор. Положим $\mathcal{F}_\Delta = \mathcal{F}/\mathfrak{a}$, где $\mathfrak{a}$ означает идеал в $\mathcal{F}$, порожденный операторами вида $\square \circ \Delta$, $\square \in \mathrm{Diff}(Q, A)$.

Таким образом, фиксировав P, мы получаем функтор $Q \Rightarrow \mathcal{F} \otimes_A Q$, а фиксировав оператор $\Delta \in \mathrm{Diff}_{(*)}(P, Q)$, — функтор $Q \Rightarrow \mathcal{F}_\Delta \otimes_A Q$, действующие из категории $\mathcal{M}_A$ в $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ и в $\mathcal{M}_{\mathcal{F}_\Delta}$ соответственно, где $\mathcal{M}$ означает категорию всех модулей над соответствующей алгеброй. Эти функторы очевидным образом порождают естественные преобразования функторов $\mathrm{Diff}^{(+)}_k(\cdot)$, $\mathrm{D}_k(\cdot)$ и т. п., и, следовательно, гомоморфизмы их представляющих объектов $\mathcal{J}^k(P)$, Λ^k и т. п. Например, любому оператору $\nabla\colon Q_1 \to Q_2$ соответствуют операторы $\mathcal{F} \otimes \nabla\colon \mathcal{F} \otimes_A Q_1 \to \mathcal{F} \otimes_A Q_2$ и $\mathcal{F}_\Delta \otimes \nabla\colon \mathcal{F}_\Delta \otimes_A Q_1 \to \mathcal{F}_\Delta \otimes_A Q_2$.

Эти естественные преобразования позволяют нам поднять теорию линейных дифференциальных операторов с A на $\mathcal{F}$ и ограничить поднятую теорию на $\mathcal{F}_\Delta$. Эти конструкции параллельны теории $\mathcal{C}$-дифференциальных операторов (см. следующую главу).

Естественные вложения

$$\mathrm{Diff}^{\mathrm{sym}}_{(k)}(P, R) \hookrightarrow \mathrm{Diff}^{\mathrm{sym}}_{(k-1)}(P, \mathrm{Diff}(P, R))$$

порождают отображение $\ell\colon \mathcal{F} \otimes_A R \to \mathcal{F} \otimes_A \mathrm{Diff}(P, R)$, $\varphi \mapsto \ell_\varphi$, которое называется *универсальной линеаризацией*. С помощью этого отображения можно переписать первое утверждение следствия 2.9 на предшествующей странице в виде $\ell_\Delta = \ell^\circ_\Delta$, а оператор Эйлера записать как $\mathbf{E}(L) = \ell^\circ_L(1)$. Заметим также, что $\ell_{\varphi\psi} = \varphi\ell_\psi + \psi\ell_\varphi$ для любых $\varphi, \psi \in \mathcal{F} \otimes_A R$.

Определение 2.4. Группа *законов сохранения* алгебры $\mathcal{F}_\Delta$ (или оператора Δ) — это первая группа гомологий комплекса интегральных форм

$$0 \leftarrow \mathcal{F}_\Delta \otimes_A \mathcal{B} \leftarrow \mathcal{F}_\Delta \otimes_A \Sigma_1 \leftarrow \mathcal{F}_\Delta \otimes_A \Sigma_2 \leftarrow \dots \tag{2.6}$$

с коэффициентами в $\mathcal{F}_\Delta$.

[4]В геометрической ситуации эта алгебра отождествляется с алгеброй полиномиальных функций на бесконечных джетах (см. следующую главу).

3. Джеты и нелинейные дифференциальные уравнения. Симметрии

Мы рассмотрим здесь основные факты, относящиеся к геометрическому подходу к джетам (конечным и бесконечным) и к нелинейным дифференциальным операторам. Мы ограничимся случаем векторных расслоений, однако все конструкции, приведенные ниже, могут быть распространены с естественными изменениями на произвольное локально тривиальное расслоение π (и даже на более общие случаи). Для дальнейшего чтения мы рекомендуем книги [9, 15] и статью [63].

3.1. Конечные джеты. Пусть M — n-мерное гладкое (т. е. класса C^∞) многообразие и $\pi\colon E \to M$ — гладкое m-мерное векторное расслоение над M. Обозначим через $\Gamma(\pi)$ $C^\infty(M)$-модуль сечений расслоения π. Для каждой точки $x \in M$ рассмотрим также модуль $\Gamma_{\mathrm{loc}}(\pi; x)$ всех *локальных* сечений в точке x.

Для сечения $\varphi \in \Gamma_{\mathrm{loc}}(\pi; x)$, удовлетворяющего условию $\varphi(x) = \theta \in E$, рассмотрим его график $\Gamma_\varphi \subset E$ и все такие сечения $\varphi' \in \Gamma_{\mathrm{loc}}(\pi; x)$, что

а) $\varphi(x) = \varphi'(x)$;

б) график $\Gamma_{\varphi'}$ касается Γ_φ с порядком k в точке θ.

Условия а) и б) определяют отношение эквивалентности $\sim_x^k$ на $\Gamma_{\mathrm{loc}}(\pi; x)$; обозначим класс эквивалентности сечения φ через $[\varphi]_x^k$. Фактормножество $\Gamma_{\mathrm{loc}}(\pi; x)/\sim_x^k$ приобретет структуру векторного пространства над $\mathbb{R}$, если положить

$$[\varphi]_x^k + [\psi]_x^k = [\varphi + \psi]_x^k,\ a[\varphi]_x^k = [a\varphi]_x^k, \quad \varphi, \psi \in \Gamma_{\mathrm{loc}}(\pi; x), \quad a \in \mathbb{R},$$

а естественная проекция $\Gamma_{\mathrm{loc}}(\pi; x) \to \Gamma_{\mathrm{loc}}(\pi; x)/\sim_x^k$ становится линейным отображением. Обозначим это факторпространство через $J_x^k(\pi)$. Очевидно, что $J_x^0(\pi)$ совпадает с $E_x = \pi^{-1}(x)$.

Класс $[\varphi]_x^k$ полностью определяется точкой x и частными производными в точке x сечения φ до порядка k. Отсюда следует, что пространство $J_x^k(\pi)$ конечномерно, и

$$\dim J_x^k(\pi) = m\sum_{i=0}^{k}\binom{n+i-1}{n-1} = m\binom{n+k}{k}. \tag{3.1}$$

Определение 3.1. Элемент $[\varphi]_x^k \in J_x^k(\pi)$ называется *k-джетом* сечения $\varphi \in \Gamma_{\mathrm{loc}}(\pi; x)$ в точке x.

Каждый k-джет φ в точке x может быть отождествлен с разложением Тейлора до порядка k сечения φ. Из определения следует, что это отождествление не зависит от выбора системы координат.

Рассмотрим множество

$$J^k(\pi) = \bigcup_{x \in M} J_x^k(\pi) \tag{3.2}$$

и введем структуру гладкого многообразия на $J^k(\pi)$ следующим образом. Пусть $\{\mathcal{U}_\alpha\}_\alpha$ — такой атлас на M, что расслоение π тривиализуется над каждой картой $\mathcal{U}_\alpha$, т. е. $\pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \simeq \mathcal{U}_\alpha \times F$, где F — слой. Выберем базис $e_1^\alpha, \dots, e_m^\alpha$ локальных сечений π над $\mathcal{U}_\alpha$. Тогда любое сечение представляется в виде $\varphi = u^1 e_1^\alpha + \ldots + u^m e_m^\alpha$ и функции $x_1, \dots, x_n, u^1, \dots, u^m$, где $x_1, \dots, x_n$ — локальные координаты на $\mathcal{U}_\alpha$, образуют локальную систему координат на $\pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$. Определим функции $u_\sigma^j\colon \bigcup_{x\in\mathcal{U}_\alpha} J_x^k(\pi) \to \mathbb{R}$, где $\sigma = i_1 \dots i_r$, $|\sigma| = r \leqslant k$, равенством

$$u_\sigma^j([\varphi]_x^k) = \left.\frac{\partial^{|\sigma|} u^j}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_r}}\right|_x. \tag{3.3}$$

Тогда эти функции вместе с локальными координатами $x_1, \dots, x_n$ задают отображение $f_\alpha\colon \bigcup_{x\in\mathcal{U}_\alpha} J_x^k(\pi) \to \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^N$, где N — число, определяемое из (3.1). Согласно правилам вычисления частных производных при заменах координат, отображение

$$\left.(f_\alpha \circ f_\beta^{-1})\right|_{\mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta} : (\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \times \mathbb{R}^N \to (\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \times \mathbb{R}^N$$

является диффеоморфизмом, сохраняющим естественную проекцию $(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)\times\mathbb{R}^N \to (\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$. Таким образом, мы доказали следующий результат:

П р е д л о ж е н и е 3.1. *Множество $J^k(\pi)$, определенное формулой (3.2) на предшествующей странице, является гладким многообразием, а проекция $\pi_k\colon J^k(\pi) \to M$, $[\varphi]_x^k \mapsto x$ — гладким векторным расслоением.*

О п р е д е л е н и е 3.2. Пусть $\pi\colon E \to M$ — гладкое векторное расслоение, $\dim M = n$, $\dim E = n + m$.

1) Многообразие $J^k(\pi)$ называется *многообразием k-джетов* расслоения π;
2) Расслоение $\pi_k\colon J^k(\pi) \to M$ называется *расслоением k-джетов* расслоения π;
3) Построенные выше локальные координаты $\left\{x_i, u_\sigma^j\right\}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, $|\sigma| \leqslant k$, называются *специальной координатной системой* на $J^k(\pi)$, ассоциированной с тривиализацией $\{\mathcal{U}_\alpha\}_\alpha$ расслоения π.

Очевидно, что расслоение π_0 совпадает с π.

Поскольку касание двух многообразий с порядком k влечет касание с меньшим порядком, существует отображение

$$\pi_{k,l}\colon J^k(\pi) \to J^l(\pi), \quad [\varphi]_x^k \mapsto [\varphi]_x^l, \quad k \geqslant l,$$

являющееся гладким расслоением. Если $k \geqslant l \geqslant s$, то очевидно, что

$$\pi_{l,s} \circ \pi_{k,l} = \pi_{k,s}, \quad \pi_l \circ \pi_{k,l} = \pi_k. \tag{3.4}$$

С другой стороны, для каждого сечения $\varphi \in \Gamma(\pi)$ (или $\varphi \in \Gamma_{\mathrm{loc}}(\pi; x)$) мы можем определить отображение $j_k(\varphi)\colon M \to J^k(\pi)$, положив $j_k(\varphi)(x) = [\varphi]_x^k$. Очевидно, что $j_k(\varphi) \in \Gamma(\pi_k)$ (в частности, $j_k(\varphi) \in \Gamma_{\mathrm{loc}}(\pi_k; x)$).

О п р е д е л е н и е 3.3. Сечение $j_k(\varphi)$ называется *k-джетом сечения φ*. Соответствие $j_k\colon \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi_k)$ называется *оператором взятия k-джета.*

Из определения следует, что

$$\pi_{k,l} \circ j_k(\varphi) = j_l(\varphi), \quad j_0(\varphi) = \varphi, \quad k \geqslant l, \tag{3.5}$$

для всех $\varphi \in \Gamma(\pi)$.

Пусть $\varphi, \psi \in \Gamma(\pi)$ — сечения, $x \in M$ и $\varphi(x) = \psi(x) = \theta \in E$. Утверждения о том, что многообразия Γ_φ и Γ_ψ касаются с порядком $k + l$ в точке θ, и о том, что многообразия $\Gamma_{j_k(\varphi)}$, $\Gamma_{j_k(\psi)} \subset J^k(\pi)$ касаются с порядком l в точке $\theta_k = j_k(\varphi)(x) = j_k(\psi)(x)$, являются эквивалентными.

О п р е д е л е н и е 3.4. Пусть $\theta_k \in J^k(\pi)$. *R-плоскостью* в точке θ_k называется n-мерная касательная плоскость к такому многообразию $\Gamma_{j_k(\varphi)}$, что $[\varphi]_x^k = \theta_k$.

Непосредственно из определения мы получаем следующий результат.

П р е д л о ж е н и е 3.2. *Рассмотрим точку $\theta_k \in J^k(\pi)$. Тогда слой расслоения*

$$\pi_{k+1,k}\colon J^{k+1}(\pi) \to J^k(\pi)$$

над θ_k совпадает с множеством всех R-плоскостей в θ_k.

Для точки $\theta_{k+1} \in J^{k+1}(\pi)$ обозначим соответствующую R-плоскость в $\theta_k = \pi_{k+1,k}(\theta_{k+1})$ через $L_{\theta_{k+1}} \subset T_{\theta_k}(J^k(\pi))$.

3.2. **Нелинейные дифференциальные операторы.** Рассмотрим алгебру гладких функций на $J^k(\pi)$ и обозначим ее через $\mathcal{F}_k = \mathcal{F}_k(\pi)$. Возьмем еще одно векторное расслоение $\pi'\colon E' \to M$ и рассмотрим индуцированное расслоение $\pi_k^*(\pi')$. Тогда множество сечений расслоения $\pi_k^*(\pi')$ — это модуль над $\mathcal{F}_k(\pi)$; обозначим этот модуль через $\mathcal{F}_k(\pi, \pi')$. В частности, $\mathcal{F}_k(\pi) = \mathcal{F}_k(\pi, \mathbf{1}_M)$, где $\mathbf{1}_M$ — тривиальное одномерное расслоение над M.

Сюръекции $\pi_{k,l}$ и π_k порождают для всех $k \geqslant l \geqslant 0$ естественные вложения $\nu_{k,l} = \pi_{k,l}^*\colon \mathcal{F}_l(\pi,\pi') \to \mathcal{F}_k(\pi,\pi')$ и $\nu_k = \pi_k^*\colon \Gamma(\pi') \to \mathcal{F}_k(\pi,\pi')$. Из соотношений (3.4) на предыдущей странице получаем равенства

$$\nu_{k,l} \circ \nu_{l,s} = \nu_{k,s}, \quad \nu_{k,l} \circ \nu_l = \nu_k, \quad k \geqslant l \geqslant s. \tag{3.6}$$

Отождествляя модуль $\mathcal{F}_l(\pi,\pi')$ с его образом в $\mathcal{F}_k(\pi,\pi')$ при отображении $\nu_{k,l}$, мы можем рассматривать $\mathcal{F}_k(\pi,\pi')$ как фильтрованный модуль

$$\Gamma(\pi') \hookrightarrow \mathcal{F}_0(\pi,\pi') \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow \mathcal{F}_{k-1}(\pi,\pi') \hookrightarrow \mathcal{F}_k(\pi,\pi'), \tag{3.7}$$

над фильтрованной алгеброй $C^\infty(M) \hookrightarrow \mathcal{F}_0 \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow \mathcal{F}_{k-1} \hookrightarrow \mathcal{F}_k$. При этом имеют место вложения $\mathcal{F}_k \cdot \mathcal{F}_l(\pi,\pi') \subset \mathcal{F}_{\max(k,l)}(\pi,\pi')$.

Пусть $F \in \mathcal{F}_k(\pi,\pi')$. Рассмотрим отображения

$$\Delta = \Delta_F\colon \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi'), \quad \Delta(\varphi) = j_k(\varphi)^*(F), \quad \varphi \in \Gamma(\pi). \tag{3.8}$$

Определение 3.5. Соответствие Δ вида (3.8) называется (*нелинейным*) *дифференциальным оператором* порядка $\leqslant k$, действующим из расслоения π в расслоение π'. Если $\Delta(a\varphi + b\psi) = a\Delta(\varphi) + b\Delta(\psi)$, $a, b \in \mathbb{R}$, оператор Δ называется *линейным*.

Пример 3.1. Покажем, что оператор взятия k-го джета $j_k\colon \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi_k)$ (определение 3.3 на предыдущей странице) является дифференциальным. Для этого заметим, что тотальное пространство индуцированного расслоения $\pi_k^*(\pi_k)$ состоит из таких пар точек $(\theta_k, \theta_k') \in J^k(\pi) \times J^k(\pi)$, что $\pi_k(\theta_k) = \pi_k(\theta_k')$. Следовательно, можно определить *диагональное сечение* $\rho_k \in \mathcal{F}_k(\pi,\pi_k)$ расслоения $\pi_k^*(\pi_k)$, положив $\rho_k(\theta_k) = (\theta_k,\theta_k)$. Очевидно, что $j_k = \Delta_{\rho_k}$, т. е.

$$j_k(\varphi)^*(\rho_k) = j_k(\varphi), \quad \varphi \in \Gamma(\pi).$$

Оператор j_k — линейный и имеет порядок $\leqslant k$.

Пример 3.2. Пусть $\tau^*\colon T^*M \to M$ — кокасательное расслоение над M и $\tau_p^*\colon \bigwedge^p T^*M \to M$ — его p-я внешняя степень. Тогда *дифференциал де Рама* d — это линейный дифференциальный оператор первого порядка, действующий из τ_p^* в τ_{p+1}^*, $p \geqslant 0$.

Докажем теперь, что композиция нелинейных дифференциальных операторов также является дифференциальным оператором. Пусть $\Delta\colon \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi')$ — дифференциальный оператор порядка $\leqslant k$. Для любой точки $\theta_k = [\varphi]_x^k \in J^k(\pi)$ положим

$$\Phi_\Delta(\theta_k) = [\Delta(\varphi)]_x^0 = (\Delta(\varphi))(x). \tag{3.9}$$

Легко видеть, что отображение $\Phi_\Delta\colon J^k(\pi) \to J^0(\pi') = E'$ — морфизм расслоений (но не векторных расслоений!), т. е. $\pi' \circ \Phi_\Delta = \pi_k$.

Определение 3.6. Отображение Φ_Δ называется *представляющим морфизмом* оператора Δ.

Например, в случае $\Delta = j_k$ получаем $\Phi_{j_k} = \mathrm{id}_{J^k(\pi)}$. Отметим, что существует взаимнооднозначное соответствие между нелинейными дифференциальными операторами и их представляющими морфизмами: это легко заметить, обратив равенство (3.9). Действительно, если $\Phi\colon J^k(\pi) \to E'$ — морфизм из π_k в π', то сечение $\varphi \in \mathcal{F}(\pi,\pi')$ можно определить как $\varphi(\theta_k) = (\theta_k, \Phi(\theta_k)) \in J^k(\pi) \times E'$. Отсюда очевидно, что Φ является представляющим морфизмом для оператора $\Delta = \Delta_\varphi$.

Определение 3.7. Пусть $\Delta\colon \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi')$ — дифференциальный оператор k-го порядка. Его *l-м продолжением* называется композиция $\Delta^{(l)} = j_l \circ \Delta\colon \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi_l)$.

Лемма 3.3. *Для любого дифференциального оператора k-го порядка Δ его l-е продолжение является оператором $(k+l)$-го порядка.*

Доказательство. Действительно, для любого $\theta_{k+l} = [\varphi]_x^{k+l} \in J^{k+l}(\pi)$ положим $\Phi_\Delta^{(l)}(\theta_{k+l}) = [\Delta(\varphi)]_x^l \in J^l(\pi)$. Тогда оператор, для которого морфизм $\Phi_\Delta^{(l)}$ является представляющим, совпадает с $\Delta^{(l)}$. □

С л е д с т в и е 3.4. *Композиция* $\Delta' \circ \Delta$ *двух нелинейных дифференциальных операторов* $\Delta\colon \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi')$ *и* $\Delta'\colon \Gamma(\pi') \to \Gamma(\pi'')$ *порядков* $\leqslant k$ *и* $\leqslant k'$ *соответственно является дифференциальным оператором порядка* $k+k'$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Phi_\Delta^{(k')}\colon J^{k+k'}(\pi) \to J^{k'}(\pi')$ — представляющий морфизм для $\Delta^{(k')}$. Тогда оператор $\square$, для которого композиция $\Phi_{\Delta'} \circ \Phi_\Delta^{(k')}$ является представляющим морфизмом, совпадает с $\Delta' \circ \Delta$. $\square$

Следующее очевидное предложение описывает основные свойства продолжений и представляющих морфизмов.

П р е д л о ж е н и е 3.5. *Пусть* $\Delta\colon \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi')$ *и* $\Delta'\colon \Gamma(\pi') \to \Gamma(\pi'')$ — *два дифференциальных оператора порядков* k *и* k' *соответственно. Тогда*:

1) $\Phi_{\Delta'\circ\Delta} = \Phi_{\Delta'} \circ \Phi_\Delta^{(k')}$,
2) $\Phi_\Delta^{(l)} \circ j_{k+l}(\varphi) = \Delta^{(l)}(\varphi)$ *для любого* $\varphi \in \Gamma(\pi)$ *и* $l \geqslant 0$,
3) $\pi_{l,l'} \circ \Phi_\Delta^{(l)} = \Phi_\Delta^{(l')} \circ \pi_{k+l,k+l'}$, *т. е. диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} J^{k+l}(\pi) & \xrightarrow{\Phi_\Delta^{(l)}} & J^l(\pi') \\ {\scriptstyle \pi_{k+l,k+l'}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi'_{l,l'}} \\ J^{k+l'}(\pi) & \xrightarrow{\Phi_\Delta^{(l')}} & J^{l'}(\pi') \end{array} \tag{3.10}$$

коммутативна при всех $l \geqslant l' \geqslant 0$.

3.3. **Бесконечные джеты.** Теперь мы перейдем к бесконечному пределу во всех предыдущих конструкциях.

О п р е д е л е н и е 3.8. *Пространство бесконечных джетов* $J^\infty(\pi)$ расслоения $\pi\colon E \to M$ — это обратный предел последовательности

$$\ldots \to J^{k+1}(\pi) \xrightarrow{\pi_{k+1,k}} J^k(\pi) \to \ldots \to J^1(\pi) \xrightarrow{\pi_{1,0}} E \xrightarrow{\pi} M,$$

т. е. $J^\infty(\pi) = \varprojlim_{\{\pi_{k,l}\}} J^k(\pi)$.

Таким образом, *точка* θ пространства $J^\infty(\pi)$ — это такая последовательность точек $\{\theta_k\}_{k\geqslant 0}$, $\theta_k \in J^k(\pi)$, что $\pi_{k,l}(\theta_k) = \theta_l$, $k \geqslant l$. Точки пространства $J^\infty(\pi)$ можно понимать как m-мерные ряды Тейлора и представлять в виде $\theta = [\varphi]_x^\infty$, $\varphi \in \Gamma_{\mathrm{loc}}(\pi)$.

Специальная система координат, ассоциированная с тривиализацией $\{\mathfrak{U}_\alpha\}_\alpha$, задается функциями $x_1, \ldots, x_n, \ldots, u_\sigma^j, \ldots$.

Касательный вектор к $J^\infty(\pi)$ в точке θ определяется как система векторов $\{w, v_k\}_{k\geqslant 0}$, касательных к M и к $J^k(\pi)$ соответственно, для которых $(\pi_k)_* v_k = w$, $(\pi_{k,l})_* v_k = v_l$ при всех $k \geqslant l \geqslant 0$.

Гладкое расслоение ξ над $J^\infty(\pi)$ — это система расслоений $\eta\colon Q \to M$, $\xi_k\colon P_k \to J^k(\pi)$, вместе с такими гладкими отображениями $\Psi_k\colon P_k \to Q$, $\Psi_{k,l}\colon P_k \to P_l$, $k \geqslant l \geqslant 0$, что

$$\Psi_l \circ \Psi_{k,l} = \Psi_k, \quad \Psi_{k,l} \circ \Psi_{l,s} = \Psi_{k,s}, \quad k \geqslant l \geqslant s \geqslant 0.$$

Например, если $\eta\colon Q \to M$ — расслоение, то индуцированные расслоения $\pi_k^*(\eta)\colon \pi_k^*(Q) \to J^k(\pi)$ вместе с естественными проекциями $\pi_k^*(Q) \to \pi_l^*(Q)$ и $\pi_k^*(Q) \to Q$ образуют расслоение над $J^\infty(\pi)$. Будем говорить, что ξ является *векторным расслоением* над $J^\infty(\pi)$, если η и все ξ_k суть векторные расслоения, причем отображения Ψ_k и $\Psi_{k,l}$ послойно линейны.

Гладкое отображение из $J^\infty(\pi)$ в $J^\infty(\pi')$, где $\pi\colon E \to M$, $\pi'\colon E' \to M'$, определяется как набор F отображений $F_k\colon J^k(\pi) \to J^{k-s}(\pi')$, $k \geqslant s$, где $s \in \mathbb{Z}$ — фиксированное целое число, называемое *степенью* F и такое что

$$\pi_{k-s,k-s-1} \circ F_k = F_{k-1} \circ \pi_{k,k-1}$$

для всех $k \geqslant s_0 > s$. Например, если $\Delta\colon \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi')$ — дифференциальный оператор порядка s, то набор отображений $F_k = \Phi_\Delta^{(k-s)}$, $k \geqslant s$ (см. предыдущий параграф) представляет собой гладкое отображение из $J^\infty(\pi)$ в $J^\infty(\pi')$ степени s.

Гладкая функция на $J^\infty(\pi)$ — это элемент прямого предела $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\pi) = \varinjlim_{\{\pi^*_{k,l}\}} \mathcal{F}_k(\pi)$, где $\mathcal{F}_k(\pi)$ — алгебра гладких функций на пространстве $J^k(\pi)$. Таким образом, гладкая функция на $J^\infty(\pi)$ — это функция на $J^k(\pi)$ для некоторого конечного, но произвольного k. Множество $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\pi)$ таких функций отождествляется с $\bigcup_{k=0}^\infty \mathcal{F}_k(\pi)$ и образует коммутативную фильтрованную алгебру. Используя двойственность между гладкими многообразиями и алгебрами гладких функций на них, мы будем, как правило, излагать дальнейшее в терминах алгебры $\mathcal{F}(\pi)$, а не собственно многообразия $J^\infty(\pi)$.

С этой точки зрения, *векторное поле* на $J^\infty(\pi)$ — это фильтрованное дифференцирование $\mathcal{F}(\pi)$, т. е. такое $\mathbb{R}$-линейное отображение $X\colon \mathcal{F}(\pi) \to \mathcal{F}(\pi)$, что

$$X(fg) = fX(g) + gX(f), \quad f, g \in \mathcal{F}(\pi), \quad X(\mathcal{F}_k(\pi)) \subset \mathcal{F}_{k+l}(\pi)$$

для всех k и некоторого $l = l(X)$. Последняя величина называется *степенью фильтрации* (или просто *фильтрацией*) поля X. Множество всех векторных полей образует фильтрованную алгебру Ли над $\mathbb{R}$ с коммутатором $[X, Y]$ и обозначается через $\mathrm{D}(\pi) = \bigcup_{l \geqslant 0} \mathrm{D}^{(l)}(\pi)$.

Дифференциальные формы степени i на $J^\infty(\pi)$ определяются как элементы фильтрованного $\mathcal{F}(\pi)$-модуля $\Lambda^i = \Lambda^i(\pi) = \bigcup_{k \geqslant 0} \Lambda^i(\pi_k)$, где $\Lambda^i(\pi_k) = \Lambda^i(J^k(\pi))$ и считается, что модуль $\Lambda^i(\pi_k)$ вложен в $\Lambda^i(\pi_{k+1})$ с помощью отображения $\pi^*_{k+1,k}$. Определенные таким образом формы обладают всеми основными свойствами дифференциальных форм на конечномерных многообразиях. Отметим наиболее важные из этих свойств:

1) Модуль $\Lambda^i(\pi)$ является i-й внешней степенью $\Lambda^1(\pi)$, $\Lambda^i(\pi) = \bigwedge^i \Lambda^1(\pi)$. Соответственно, определена операция *внешнего произведения* $\wedge\colon \Lambda^p(\pi) \otimes \Lambda^q(\pi) \to \Lambda^{p+q}(\pi)$ и $\Lambda^*(\pi) = \bigoplus_{i \geqslant 0} \Lambda^i(\pi)$ становится суперкоммутативной $\mathbb{Z}$-градуированной алгеброй.
2) Модуль $\mathrm{D}(\pi)$ является двойственным к $\Lambda^1(\pi)$, т. е.
$$\mathrm{D}(\pi) = \mathrm{Hom}^\phi_{\mathcal{F}(\pi)}(\Lambda^1(\pi), \mathcal{F}(\pi)), \tag{3.11}$$
где $\mathrm{Hom}^\phi_{\mathcal{F}(\pi)}(\cdot\,,\cdot)$ — модуль фильтрованных гомоморфизмов над $\mathcal{F}(\pi)$. Более того, равенство (3.11) утверждает следующее: существует такое дифференцирование $d\colon \mathcal{F}(\pi) \to \Lambda^1(\pi)$ (*дифференциал де Рама* на $J^\infty(\pi)$), что для любого векторного поля X найдется единственным образом определенный фильтрованный гомоморфизм φ^X, удовлетворяющий условию $\varphi^X \circ d = X$.
3) Оператор d поднимается до отображения $d\colon \Lambda^i(\pi) \to \Lambda^{i+1}(\pi)$ таким образом, что последовательность
$$0 \to \mathcal{F}(\pi) \xrightarrow{d} \Lambda^1(\pi) \to \ldots \to \Lambda^i(\pi) \xrightarrow{d} \Lambda^{i+1}(\pi) \to \ldots$$
становится комплексом, т. е. $d \circ d = 0$. Этот комплекс называется *комплексом де Рама* на $J^\infty(\pi)$. При этом d является дифференцированием супералгебры $\Lambda^*(\pi)$.

Используя алгебраическую технику (см. главу 1), мы можем ввести понятие *внутреннего произведения* и *производной Ли* и доказать их основные свойства (ср. с предложением 1.14 на с. 13). Мы можем также определить *линейные дифференциальные операторы* над $J^\infty(\pi)$ следующим образом. Пусть P и Q — фильтрованные $\mathcal{F}(\pi)$-модули и $\Delta \in \mathrm{Hom}^\phi_{\mathbb{R}}(P, Q)$. Тогда Δ называется линейным дифференциальным оператором порядка $\leqslant k$, действующим из P в Q, если

$$(\delta_{f_0} \circ \delta_{f_1} \circ \ldots \circ \delta_{f_k})\Delta = 0$$

для всех $f_0, \ldots, f_k \in \mathcal{F}(\pi)$, где, как в и главе 1, $(\delta_f \Delta)p = \Delta(fp) - f\Delta(p)$. Мы будем использовать обозначение $k = \mathrm{ord}(\Delta)$.

В силу существования фильтрации в алгебре $\mathcal{F}(\pi)$, так же как и в модулях P и Q, можно определить дифференциальные операторы *бесконечного порядка*, действующие из P в Q. А именно, пусть $P = \{P_l\}$, $Q = \{Q_l\}$, $P_l \subset P_{l+1}$, $Q_l \subset Q_{l+1}$, P_l и Q_l — $\mathcal{F}_l(\pi)$-модули. Пусть $\Delta \in \mathrm{Hom}^\phi_{\mathbb{R}}(P, Q)$ и s — фильтрация Δ, т. е. $\Delta(P_l) \subset Q_{l+s}$. Мы можем всегда полагать, что $s \geqslant 0$.

Предположим теперь, что $\Delta_l = \Delta|_{P_l} : P_l \to Q_l$ — линейный дифференциальный оператор порядка o_l над $\mathcal{F}_l(\pi)$ для всех l. Тогда мы скажем, что Δ — линейный дифференциальный оператор *роста* o_l. В частности, если $o_l = \alpha l + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, мы говорим, что Δ — оператор *постоянного роста* α.

Распределения. Пусть $\theta \in J^\infty(\pi)$. Касательная плоскость к $J^\infty(\pi)$ в точке θ — это множество всех касательных векторов к $J^\infty(\pi)$ в этой точке (см. выше). Обозначим такую плоскость через $T_\theta = T_\theta(J^\infty(\pi))$. Пусть $\theta = \{x, \theta_k\}$, $x \in M$, $\theta_k \in J^k(\pi)$ и $v = \{w, v_k\}$, $v' = \{w', v'_k\} \in T_\theta$. Тогда линейная комбинация $\lambda v + \mu v' = \{\lambda w + \mu w', \lambda v_k + \mu v'_k\}$ также является элементом T_θ и поэтому T_θ — векторное пространство. Соответствие $\mathcal{T}\colon \theta \mapsto \mathcal{T}_\theta \subset T_\theta$, где $\mathcal{T}_\theta$ — линейное подпространство, называется *распределением* на $J^\infty(\pi)$. Обозначим через $\mathcal{T}\mathrm{D}(\pi) \subset \mathrm{D}(\pi)$ подмодуль векторных полей, лежащих в $\mathcal{T}$, т. е. векторное поле X принадлежит $\mathcal{T}\mathrm{D}(\pi)$ тогда и только тогда, когда $X_\theta \in \mathcal{T}_\theta$ для всех $\theta \in J^\infty(\pi)$. Скажем, что распределение $\mathcal{T}$ *интегрируемо*, если оно удовлетворяет формальному условию Фробениуса: для любых векторных полей $X, Y \in \mathcal{T}\mathrm{D}(\pi)$ их коммутатор также лежит в $\mathcal{T}\mathrm{D}(\pi)$, или $[\mathcal{T}\mathrm{D}(\pi), \mathcal{T}\mathrm{D}(\pi)] \subset \mathcal{T}\mathrm{D}(\pi)$.

Это условие так может быть выражено двойственным образом. Положим

$$\mathcal{T}^1\Lambda(\pi) = \{\, \omega \in \Lambda^1(\pi) \mid \mathrm{i}_X\omega = 0 \text{ если } X \in \mathcal{T}\mathrm{D}(\pi) \,\}$$

и рассмотрим идеал $\mathcal{T}\Lambda^*(\pi)$, порожденный в $\Lambda^*(\pi)$ множеством $\mathcal{T}^1\Lambda(\pi)$. Тогда распределение $\mathcal{T}$ интегрируемо, тогда и только тогда, когда идеал $\mathcal{T}\Lambda^*(\pi)$ дифференциально замкнут: $d(\mathcal{T}\Lambda^*(\pi)) \subset \mathcal{T}\Lambda^*(\pi)$.

Наконец, назовем подмногообразие $N \subset J^\infty(\pi)$ *интегральным* для распределения $\mathcal{T}$, если $T_\theta N \subset \mathcal{T}_\theta$ для любой точки $\theta \in N$. Интегральное многообразие N называется *локально максимальным* в точке $\theta \in N$, если никакая ее окрестность $\mathcal{U} \subset N$ не вложена в какое-либо другое интегральное многообразие большей размерности.

3.4. **Нелинейные уравнения и их решения.** Пусть $\pi\colon E \to M$ — векторное расслоение.

Определение 3.9. Подмногообразие $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ называется (*нелинейным*) *дифференциальным уравнением* порядка k в расслоении π. Назовем $\mathcal{E}$ *линейным уравнением*, если $\mathcal{E} \cap \pi_x^{-1}(x)$ — линейное подпространство в $\pi_x^{-1}(x)$ для всех $x \in M$.

Мы всегда будем предполагать, что $\pi_{k,0}$ сюръективно проектирует $\mathcal{E}$ на E.

Определение 3.10. (Локальное) сечение f расслоения π называется (локальным) *решением* уравнения $\mathcal{E}$, если его график лежит в $\mathcal{E}$: $j_k(f)(M) \subset \mathcal{E}$.

Будем говорить, что уравнение $\mathcal{E}$ является *определенным*, если $\operatorname{codim} \mathcal{E} = \dim \pi$, что оно *переопределено*, если $\operatorname{codim} \mathcal{E} > \dim \pi$, и что оно *недоопределено*, если $\operatorname{codim} \mathcal{E} < \dim \pi$.

Очевидно, что в специальной системе координат эти определения совпадают с «обычными» определениями.

Один из способов задавать дифференциальные уравнения заключается в следующем. Пусть $\bar{\mathcal{U}} \subset M$ — координатная окрестность, $\mathcal{U} = \pi_k^{-1}(\bar{\mathcal{U}}) \subset J^k(\pi)$ и $\pi'\colon \mathbb{R}^r \times \bar{\mathcal{U}} \to \bar{\mathcal{U}}$ — тривиальное r-мерное расслоение. Тогда множество функций $(F^1, \ldots, F^r)$ можно рассматривать как сечение φ индуцированного расслоения $(\pi_k|_{\mathcal{U}})^*(\pi')$ или как нелинейный оператор $\Delta = \Delta_\varphi$, определенный на $\mathcal{U}$, а уравнение $\mathcal{E}$ характеризуется условием

$$\mathcal{E} \cap \mathcal{U} = \{\, \theta_k \in \mathcal{U} \mid \varphi(\theta_k) = 0 \,\}. \tag{3.12}$$

Вообще говоря, любое уравнение $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ можно представить в виде (3.12). А именно, для любого уравнения $\mathcal{E}$ существуют расслоение $\pi'\colon E' \to M$ и сечение $\varphi \in \mathcal{F}_k(\pi, \pi)$, такие что $\mathcal{E}$ совпадает с множеством нулей сечения φ: $\mathcal{E} = \{\varphi = 0\}$. В этом случае говорят, что $\mathcal{E}$ *ассоциировано* с оператором $\Delta = \Delta_\varphi\colon \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi')$, и используют обозначение $\mathcal{E} = \mathcal{E}_\Delta$.

Пример 3.3. Пусть $\pi = \tau_p^*\colon \bigwedge^p T^*M \to M$, $\pi' = \tau_{p+1}^*\colon \bigwedge^{p+1} T^*M \to M$ и $d\colon \Gamma(\pi) = \Lambda^p(M) \to \Gamma(\pi') = \Lambda^{p+1}(M)$ — дифференциал де Рама (см. пример 3.2 на с. 29). Тем самым мы получаем уравнение первого порядка $\mathcal{E}_d$ в расслоении τ_p^*. Рассмотрим случай $p = 1$, $n \geqslant 2$ и выберем локальные координаты $x_1, \ldots, x_n$ в M. Тогда любая форма $\omega \in \Lambda^1(M)$ представляется как $\omega = u^1\,dx_1 + \ldots + u^n\,dx_n$, и мы имеем $\mathcal{E}_d = \{\, u_i^j = u_j^i \mid i < j \,\}$, где u_β^α соответствует производной u^α

по x_β. Это уравнение недоопределено, когда $n=2$, определено при $n=3$ и переопределено при $n>3$.

Пример 3.4. Рассмотрим произвольное векторное расслоение $\pi\colon E\to M$ и дифференциальную форму $\omega\in\Lambda^p(J^k(\pi))$, $p\leqslant\dim M$. Тогда условие $j_k(\varphi)^*(\omega)=0$, $\varphi\in\Gamma(\pi)$, задает уравнение $\mathcal{E}_\omega$ порядка $k+1$ в расслоении π. Рассмотрим случай $p=\dim M=2$, $k=1$ и выберем специальную систему координат x,y,u,u_x,u_y в $J^1(\pi)$. Пусть $\varphi=\varphi(x,y)$ — локальное сечение и

$$\omega = A\,du_x\wedge du_y + (B_1\,du_x + B_2\,du_y)\wedge du + du_x\wedge(B_{11}\,dx + B_{12}\,dy) + \\ + du_y\wedge(B_{21}\,dx + B_{22}\,dy) + du\wedge(C_1\,dx + C_2\,d_y) + D\,dx\wedge dy,$$

где A,B_i,B_{ij},C_i,D — функции от x,y,u,u_x,u_y. Тогда мы имеем

$$j_1(\varphi)^*\omega = \Big(A^\varphi(\varphi_{xx}\varphi_{yy}-\varphi_{xy}^2) + (\varphi_y B_1^\varphi + B_{12}^\varphi)\varphi_{xx} - \\ - (\varphi_x B_2^\varphi + B_{12}^\varphi)\varphi_{yy} + (\varphi_y B_2^\varphi - \varphi_x B_1^\varphi + B_{22}^\varphi - B_{11}^\varphi)\varphi_{xy} + \varphi_x C_2^\varphi - \varphi_y C_1^\varphi + D^\varphi)\Big)dx\wedge dy,$$

где $F^\varphi = j_1(\varphi)^*(F)$ для любого $F\in\mathcal{F}_1(\pi)$. Следовательно, уравнение $\mathcal{E}_\omega$ имеет вид

$$a(u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2) + b_{11}u_{xx} + b_{12}u_{xy} + b_{22}u_{yy} + c = 0, \tag{3.13}$$

где $a=A$, $b_{11}=u_yB_1+B_{12}$, $b_{12}=u_yB_2-u_xB_1+B_{22}-B_{11}$, $b_{22}=u_xB_2+B_{12}$, $c=u_xC_2-u_yC_1+D$ — функции на $J^1(\pi)$. Уравнение (3.13) — это так называемое двумерное *уравнение Монжа–Ампера*. Очевидно, что любое такое уравнение можно представить в виде $\mathcal{E}_\omega$ при некотором $\omega\in\Lambda^1(J^1(\pi))$ (см. дальнейшие подробности в [11]).

Пример 3.5. Рассмотрим снова расслоение $\pi\colon E\to M$ и сечение $\nabla\colon E\to J^1(\pi)$ расслоения $\pi_{1,0}\colon J^1(\pi)\to E$. Тогда график $\mathcal{E}_\nabla=\nabla(E)\subset J^1(\pi)$ — это уравнение первого порядка в расслоении π. Пусть $\theta_1\in\mathcal{E}_\nabla$. Согласно предложению 3.2 на с. 28, точка θ_1 отождествляется с парой (θ_0,L_{θ_1}), где $\theta_0=\pi_{1,0}(\theta_1)\in E$, а L_{θ_1} — R-плоскость в θ_0, соответствующая θ_1. Значит, сечение ∇ (или уравнение $\mathcal{E}_\nabla$) можно понимать как распределение горизонтальных (т. е. невырожденно проектирующихся на T_xM при действии $(\pi_k)_*$, где $x=\pi_k(\theta_k)$) n-мерных плоскостей на E: $\mathcal{T}_\nabla\colon E\ni\theta\mapsto\theta_1=L_{\nabla(\theta)}$. Иными словами, ∇ — *связность* в расслоении π. Решение уравнения $\mathcal{E}_\nabla$, по определению, — это такое сечение $\varphi\in\Gamma(\pi)$, что $j_1(\varphi)(M)\subset\nabla(E)$. Это означает, что в любой точке $\theta=\varphi(x)\in\varphi(M)$ плоскость $\mathcal{T}_\nabla(\theta)$ касается графика сечения φ. Таким образом, решения уравнения $\mathcal{E}_\nabla$ совпадают с интегральными многообразиями распределения $\mathcal{T}_\nabla$.

В локальной системе координат $(x_1,\dots,x_n,u^1,\dots,u^m,\dots,u_i^j,\dots)$, $i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,m$, уравнение $\mathcal{E}_\nabla$ представляется в виде

$$u_i^j = \nabla_i^j(x_1,\dots,x_n,u^1,\dots,u^m),\qquad i=1,\dots,n,\quad j=1,\dots,m, \tag{3.14}$$

где ∇_i^j — гладкие функции.

Пример 3.6. Как мы видели в предыдущем примере, решить уравнение $\mathcal{E}_\nabla$ — это то же самое, что найти интегральные n-мерные многообразия распределения $\mathcal{T}_\nabla$. Значит, для того чтобы первое было разрешимым, последнее должно удовлетворять теореме Фробениуса. Так что для разрешимого уравнения $\mathcal{E}_\nabla$ мы получаем условия на сечение $\nabla\in\Gamma(\pi_{1,0})$. Запишем эти условия в локальных координатах.

Используя представление (3.14), заметим, что $\mathcal{T}_\nabla$ задается 1-формами

$$\omega^j = du^j - \sum_{i=1}^n \nabla_i^j\,dx_i,\qquad j=1,\dots,m.$$

Значит, условия интегрируемости можно выразить в виде

$$d\omega^j = \sum_{i=1}^m \rho_i^j\wedge\omega_i,\qquad j=1,\dots,m,$$

для некоторых 1-форм ρ_i^j. После элементарных преобразований получаем, что функции ∇_i^j должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\frac{\partial \nabla_\alpha^j}{\partial x_\beta} + \sum_{\gamma=1}^m \nabla_\alpha^\gamma \frac{\partial \nabla_\beta^j}{\partial u^\gamma} = \frac{\partial \nabla_\beta^j}{\partial x_\alpha} + \sum_{\gamma=1}^m \nabla_\beta^\gamma \frac{\partial \nabla_\alpha^j}{\partial u^\gamma}, \tag{3.15}$$

для всех $j = 1, \dots, m$, $1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant m$. Тем самым мы получаем построенное естественным образом уравнение первого порядка $\mathcal{I}(\pi) \subset J^1(\pi_{1,0})$, решения которого — это горизонтальные n-мерные распределения в $E = J^0(\pi)$.

3.5. **Распределение Картана на $J^k(\pi)$.** Теперь мы введем весьма важную структуру на $J^k(\pi)$, отвечающую за «индивидуальность» этих многообразий.

Определение 3.11. Пусть $\pi\colon E \to M$ — векторное расслоение. Рассмотрим точку $\theta_k \in J^k(\pi)$ и линейную оболочку $\mathcal{C}_{\theta_k}^k \subset T_{\theta_k}(J^k(\pi))$ всех R-плоскостей в точке θ_k.

1) Соответствие $\mathcal{C}^k = \mathcal{C}^k(\pi)\colon \theta_k \mapsto \mathcal{C}_{\theta_k}^k$ называется *распределением Картана* на $J^k(\pi)$.
2) Пусть $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ — дифференциальное уравнение. Тогда соответствие $\mathcal{C}^k(\mathcal{E})\colon \mathcal{E} \ni \theta_k \mapsto \mathcal{C}_{\theta_k}^k \cap T_{\theta_k}\mathcal{E} \subset T_{\theta_k}\mathcal{E}$ называется *распределением Картана* на $\mathcal{E}$. Назовем элементы распределения Картана *плоскостями Картана.*
3) Точка $\theta_k \in \mathcal{E}$ называется *регулярной*, если плоскость Картана $\mathcal{C}_{\theta_k}^k(\mathcal{E})$ имеет максимальную размерность. Будем говорить, что $\mathcal{E}$ — *регулярное уравнение*, если все его точки регулярны.

Всюду далее мы будем иметь дело с регулярными уравнениями или с окрестностями регулярных точек. Легко видеть, что у любой регулярной точки имеется некоторая окрестность, все точки которой регулярны.

Пусть точка $\theta_k \in J^k(\pi)$ представляется в виде

$$\theta_k = [\varphi]_x^k, \quad \varphi \in \Gamma(\pi), \quad x = \pi_k(\theta_k). \tag{3.16}$$

Тогда, по определению, плоскость Картана $\mathcal{C}_{\theta_k}^k$ натянута на векторы

$$j_k(\varphi)_{*,x}(v), \quad v \in T_xM, \tag{3.17}$$

для всех сечений $\varphi \in \Gamma_{\mathrm{loc}}(\pi)$, удовлетворяющих (3.16).

Пусть $x_1, \dots, x_n, \dots, u_\sigma^j, \dots$, $j = 1, \dots, m$, $|\sigma| \leqslant k$, — специальная система координат в окрестности точки θ_k. Векторы вида (3.17) можно выразить как линейные комбинации векторов

$$\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{|\sigma| \leqslant k} \sum_{j=1}^m \frac{\partial^{|\sigma|+1}\varphi^j}{\partial x_\sigma \partial x_i} \frac{\partial}{\partial u_\sigma^j}, \tag{3.18}$$

где $i = 1, \dots, n$. С помощью этого представления мы докажем следующее

Предложение 3.6. *Для любой точки $\theta_k \in J^k(\pi)$, $k \geqslant 1$, плоскость Картана $\mathcal{C}_{\theta_k}^k$ имеет вид $\mathcal{C}_{\theta_k}^k = (\pi_{k,k-1})_*^{-1}(L_{\theta_k})$, где L_{θ_k} — R-плоскость в точке $\pi_{k,k-1}(\theta_k) \in J^{k-1}(\pi)$, заданная точкой θ_k.*

Доказательство. Обозначим вектор (3.18) через $v_i^{k,\varphi}$. Очевидно, что для любых двух сечений φ и φ', удовлетворяющих (3.16), разность $v_i^{k,\varphi} - v_i^{k,\varphi'}$ — это $\pi_{k,k-1}$-вертикальный вектор, и каждый такой вектор можно получить этим способом. С другой стороны, векторы $v_i^{k-1,\varphi}$ не зависят от сечения φ, удовлетворяющего (3.16), и образуют базис в пространстве L_{θ_k}. $\square$

Замечание 3.1. Из доказанного результата следует, что распределение Картана на $J^k(\pi)$ можно локально рассматривать как порожденное векторными полями

$$D_i^{(k-1)} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{|\sigma| \leqslant k-1} \sum_{j=1}^m u_{\sigma i}^j \frac{\partial}{\partial u_\sigma^j}, \qquad V_\tau^s = \frac{\partial}{\partial u_\tau^s}, \quad |\tau| = k, \quad s = 1, \dots, m. \tag{3.19}$$

Из этого прямыми вычислениями получается, что $[V_\tau^s, D_i^{(k-1)}] = V_{\tau-i}^s$, где

$$V_{\tau-i}^s = \begin{cases} V_{\tau'}, & \text{если } \tau = \tau' i, \\ 0, & \text{если } \tau \text{ не содержит } i. \end{cases}$$

Но, как следует из предложения 3.6 на предыдущей странице, векторные поля V_σ^j при $|\sigma| \leqslant k$ не лежат в $\mathcal{C}^k$. Таким образом, распределение Картана на $J^k(\pi)$ не интегрируемо.

Введем следующие 1-формы, используя специальные координаты на $J^{k+1}(\pi)$:

$$\omega_\sigma^j = du_\sigma^j - \sum_{i=1}^n u_{\sigma i}^j \, dx_i, \tag{3.20}$$

где $j = 1, \ldots, m$, $|\sigma| < k$. Из представления (3.19) на предшествующей странице немедленно вытекает следующее важное свойство введенных форм:

Предложение 3.7. *Система форм (3.20) обращается в нуль на распределении Картана на $J^k(\pi)$. Более того, векторное поле X лежит в $\mathcal{C}^k$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{i}_X \omega_\sigma^j = 0$ для всех $j = 1, \ldots, m, |\sigma| < k$.*

Определение 3.12. Формы (3.20) называются *формами Картана* на $J^k(\pi)$, ассоциированными со специальной системой координат x_i, u_σ^j.

Заметим, что $\mathcal{F}_k(\pi)$-подмодуль, порожденный в $\Lambda^1(J^k(\pi))$ формами (3.20), не зависит от выбора координат.

Определение 3.13. $\mathcal{F}_k(\pi)$-подмодуль, порожденный в $\Lambda^1(J^k(\pi))$ формами Картана, называется *подмодулем Картана*. Обозначим этот подмодуль через $\mathcal{C}\Lambda^1(J^k(\pi))$.

Опишем теперь максимальные интегральные многообразия распределения Картана на $J^k(\pi)$. Пусть $N \subset J^k(\pi)$ — интегральное многообразие распределения Картана. Тогда из предложения 3.7 следует, что ограничение любой формы Картана ω на N обращается в нуль. Точно так же, дифференциал $d\omega$ обращается в нуль на N. Следовательно, если векторные поля X, Y касаются N, то $d\omega\,|_N\,(X, Y) = 0$.

Определение 3.14. Пусть $\mathcal{C}_{\theta_k}^k$ — плоскость Картана в точке $\theta \in J^k(\pi)$.

1) Будем говорить, что два вектора $v, w \in \mathcal{C}_{\theta_k}^k$ находятся в *инволюции*, если $d\omega_{\theta_k}(v, w) = 0$ для любых $\omega \in \mathcal{C}\Lambda^1(J^k(\pi))$.
2) Будем называть подпространство $W \subset \mathcal{C}_{\theta_k}^k$ *инволютивным*, если любые два вектора $v, w \in W$ находятся в инволюции.
3) Инволютивное подпространство называется *максимальным*, если его нельзя вложить ни в какое другое инволютивное подпространство.

Рассмотрим точку $\theta_k = [\varphi]_x^k \in J^k(\pi)$. Тогда из предложения 3.7 следует, что имеет место разложение в прямую сумму $\mathcal{C}_{\theta_k}^k = T_{\theta_k}^v \oplus T_{\theta_k}^\varphi$, где $T_{\theta_k}^v$ обозначает касательную плоскость к слою проекции $\pi_{k,k-1}$, проходящему через точку θ_k, а $T_{\theta_k}^\varphi$ — касательную плоскость к графику $j_k(\varphi)$. Значит, инволютивность достаточно проверить для следующих пар векторов $v, w \in \mathcal{C}_{\theta_k}^k$:

1) $v, w \in T_{\theta_k}^v$;
2) $v, w \in T_{\theta_k}^\varphi$;
3) $v \in T_{\theta_k}^v$, $w \in T_{\theta_k}^\varphi$.

Заметим теперь, что касательное пространство $T_{\theta_k}^v$ отождествляется с тензорным произведением $S^k(T_x^*) \otimes E_x$, $x = \pi_k(\theta_k) \in M$, где T_x^* — слой кокасательного расслоения к M в x, E_x — слой расслоения π в той же точке, а S^k обозначает k-ю симметрическую степень. Тогда любой вектор $w \in T_x M$ задает отображение $\delta_w : S^k(T_x^*) \otimes E_x \to S^{k-1}(T_x^*) \otimes E_x$ по формуле

$$\delta_w(\rho_1 \cdot \ldots \cdot \rho_k) \otimes e = \sum_{i=1}^k \rho_1 \cdot \ldots \cdot \langle \rho_i, w \rangle \cdot \ldots \cdot \rho_k \otimes e,$$

где точка «$\cdot$» обозначает умножение в $S^k(T_x^*)$, $\rho_i \in T_x^*$, $e \in E_x$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — естественное спаривание между T_x^* и T_x.

Предложение 3.8. *Пусть $v, w \in \mathcal{C}_{\theta_k}^k$. Тогда:*

1) *Все пары* $v,\ w \in T^v_{\theta_k}$ *находятся в инволюции.*
2) *Все пары* $v,\ w \in T^\varphi_{\theta_k}$ *также находятся в инволюции.*
3) *Если* $v \in T^v_{\theta_k}$ *и* $w \in T^\varphi_{\theta_k}$, *то они находятся в инволюции тогда и только тогда, когда* $\delta_{(\pi_k)_*(w)}v = 0$.

Доказательство. Вначале заметим, что условия инволютивности достаточно проверить только для форм Картана (3.20) на предшествующей странице. После этого все три утверждения выводятся из представления (3.19) на с. 34 при помощи непосредственных вычислений. □

Пусть $\theta_k \in J^k(\pi)$, F_{θ_k} — слой расслоения $\pi_{k,k-1}$, проходящий через точку θ_k, а $H \subset T_xM$ — линейное подпространство. Пользуясь линейной структурой, мы отождествим слой F_{θ_k} расслоения $\pi_{k,k-1}$ с его касательным пространством и определим пространство

$$\operatorname{Ann}(H) = \{\, v \in F_{\theta_k} \mid \delta_w v = 0,\ \forall w \in H \,\}.$$

Тогда, как следует из предложения 3.8 на предшествующей странице, имеет место следующее описание максимальных инволютивных подпространств:

Следствие 3.9. *Пусть* $\theta_k = [\varphi]^k_x$, $\varphi \in \Gamma_{\mathrm{loc}}(\pi)$. *Тогда любое максимальное инволютивное подпространство* $V \subset \mathcal{C}^k_{\theta_k}(\pi)$ *имеет вид* $V = j_k(\varphi)_*(H) \oplus \operatorname{Ann}(H)$ *при некотором* $H \subset T_xM$.

Если V — максимальное инволютивное подпространство, то соответствующее пространство H — это, очевидно, $\pi_{k,*}(V)$. Назовем размерность пространства H *типом* максимального инволютивного подпространства V и обозначим его через $\operatorname{tp}(V)$.

Предложение 3.10. *Пусть* V — *максимальное инволютивное подпространство. Тогда*

$$\dim V = m\binom{n-r+k-1}{k} + r,$$

где $n = \dim M$, $m = \dim \pi$, $r = \operatorname{tp}(V)$.

Доказательство. Выберем локальные координаты на многообразии M так, чтобы векторы $\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_r$ образовывали базис в H. Тогда, в соответствующей специальной системе в $J^k(\pi)$, координаты вдоль $\operatorname{Ann}(H)$ будут состоять из тех функций u^j_σ, $|\sigma| = k$, у которых мультииндекс σ не содержит индексов $1, \dots, r$. □

Пусть $N \subset J^k(\pi)$ — максимальное интегральное многообразие распределения Картана и $\theta_k \in N$. Тогда касательная плоскость к N в точке θ_k — это максимальная инволютивная плоскость. Пусть ее тип равен $r(\theta_k)$.

Определение 3.15. Число $\operatorname{tp}(N) = \max\limits_{\theta_k \in N} r(\theta_k)$ называется *типом* максимального интегрального многообразия N распределения Картана.

Очевидно, что множество $g(N) = \{\, \theta_k \in N \mid r(\theta_k) = \operatorname{tp}(N) \,\}$ всюду плотно в N. Назовем точки $\theta_k \in g(N)$ *точками общего положения*. Пусть θ_k — такая точка и $\mathcal{U}$ — ее окрестность в N, состоящая из точек общего положения. Тогда:
1) $N' = \pi_{k,k-1}(N)$ — интегральное многообразие распределения Картана на $J^{k-1}(\pi)$;
2) $\dim(N') = \operatorname{tp}(N)$;
3) $\pi_{k-1}|_{N'} : N' \to M$ — вложение.

Теорема 3.11. *Пусть* $N \subset J^k(\pi)$ — *интегральное многообразие распределения Картана на* $J^k(\pi)$ *и* $\mathcal{U} \subset N$ — *открытая область, состоящая из точек общего положения. Тогда*

$$\mathcal{U} = \{\, \theta_k \in J^k(\pi) \mid L_{\theta_k} \supset T_{\theta_{k-1}}\mathcal{U}' \,\},$$

где $\theta_{k-1} = \pi_{k,k-1}(\theta_k)$, $\mathcal{U}' = \pi_{k,k-1}(\mathcal{U})$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{V}' = \pi_{k-1}(\mathcal{U}') \subset M$. Обозначим размерность этого многообразия (которая равна $\operatorname{tp}(N)$) через r и выберем локальные координаты в M таким образом, чтобы подмногообразие $\mathcal{V}'$ задавалось в этих координатах уравнениями $x_{r+1} = \ldots = x_n = 0$. Тогда, так как $\mathcal{U}' \subset J^{k-1}(\pi)$ — интегральное многообразие и $\pi_{k-1}|_{\mathcal{U}'} : \mathcal{U}' \to \mathcal{V}'$ — диффеоморфизм, в соответствующих специальных координатах многообразие $\mathcal{U}'$ задается уравнениями

$$u_\sigma^j = \begin{cases} \dfrac{\partial^{|\sigma|}\varphi^j}{\partial x_\sigma}, & \text{если } \sigma \text{ не содержит } r+1, \dots, n, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

для всех $j = 1, \dots, m$, $|\sigma| \leqslant k-1$ и некоторой гладкой функции $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_r)$. Значит, касательная плоскость H к $\mathcal{U}'$ в θ_{k-1} натянута на векторы вида (3.18) на с. 34 с $i = 1, \dots, r$. Следовательно, точка θ_k, такая что $L_{\theta_k} \supset H$, определяется координатами

$$u_\sigma^j = \begin{cases} \dfrac{\partial^{|\sigma|}\varphi^j}{\partial x_\sigma}, & \text{если } \sigma \text{ не содержит } r+1, \dots, n, \\ \begin{array}{l}\text{произвольным}\\ \text{вещественным}\\ \text{числам}\end{array} & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $j = 1, \dots, m$, $|\sigma| \leqslant k$. Значит, если θ_k, θ'_k — две такие точки, то вектор $\theta_k - \theta'_k$ лежит в $\operatorname{Ann}(H)$, что следует из доказательства предложения 3.10 на предшествующей странице. Как легко видеть, проекция любого интегрального многообразия распределения Картана на $\mathcal{U}'$ содержится в $\mathcal{U}$, что и завершает доказательство. $\square$

Замечание 3.2. Заметим, что максимальные интегральные многообразия N типа $\dim M$ — это в точности графики джетов $j_k(\varphi)$, $\varphi \in \Gamma_{\mathrm{loc}}(\pi)$. С другой стороны, если $\operatorname{tp}(N) = 0$, то N совпадает со слоем проекции $\pi_{k,k-1} \colon J^k(\pi) \to J^{k-1}(\pi)$.

3.6. **Классические симметрии.** Определив основную геометрическую структуру на $J^k(\pi)$, мы можем теперь ввести преобразования, сохраняющие эту структуру.

Определение 3.16. Пусть $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}' \subset J^k(\pi)$ — открытые области.

1) Диффеоморфизм $F \colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}'$ называется *преобразованием Ли*, если он сохраняет распределение Картана, т. е. $F_*(\mathcal{C}^k_{\theta_k}) = \mathcal{C}^k_{F(\theta_k)}$ для любой точки $\theta_k \in \mathcal{U}$.

Пусть $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}' \subset J^k(\pi)$ — дифференциальные уравнения.

2) Преобразование Ли $F \colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ называется *(локальной) эквивалентностью*, если $F(\mathcal{U} \cap \mathcal{E}) = \mathcal{U}' \cap \mathcal{E}'$.
3) (Локальная) эквивалентность называется *(локальной) симметрией*, если $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$ и $\mathcal{U} = \mathcal{U}'$.

Ниже мы не будем делать различия между локальными и глобальными версиями введенных понятий.

Пример 3.7. Рассмотрим случай $J^0(\pi) = E$. Тогда, так как любая n-мерная горизонтальная плоскость в $T_\theta E$ касается некоторого сечения расслоения π, плоскость Картана $\mathcal{C}^0_\theta$ совпадает со всем пространством $T_\theta E$. Значит, в этом случае распределение Картана тривиально и любой диффеоморфизм E — это преобразование Ли.

Пример 3.8. Так как распределение Картана на $J^k(\pi)$ локально определяется формами Картана (см. равенство (3.20) на с. 35), условие того, что F — преобразование Ли, может быть переформулировано так:

$$F^*\omega_\sigma^j = \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{|\tau|<k} \lambda_{\sigma,\tau}^{j,\alpha} \omega_\tau^\alpha, \quad j = 1, \dots, m, \quad |\sigma| < k, \tag{3.21}$$

где $\lambda_{\sigma,\tau}^{j,\alpha}$ — гладкие функции на $J^k(\pi)$. Уравнения (3.21) являются основой для вычислений в локальных координатах.

В частности, если $\dim \pi = 1$ и $k = 1$, уравнения (3.21) сводятся к единственному условию $F^*\omega = \lambda\omega$, где $\omega = du - \sum_{i=1}^n u_i\, dx_i$. Значит, преобразования Ли в этом случае — это в точности *контактные преобразования* естественной контактной структуры в $J^1(\pi)$.

Пусть $F\colon J^k(\pi) \to J^k(\pi)$ — преобразование Ли. Тогда графики k-джетов переводятся преобразованием F в n-мерные максимальные интегральные многообразия. Пусть θ_{k+1} — точка в $J^{k+1}(\pi)$. Представим θ_{k+1} как пару $(\theta_k, L_{\theta_{k+1}})$, или, что то же, как класс графиков k-джетов, касающихся друг друга в точке θ_k. Тогда образ $F_*(L_{\theta_{k+1}})$ будет R-плоскостью почти во всех точках $F(\theta_k)$. Обозначим соответствующую точку в $J^{k+1}(\pi)$ через $F^{(1)}(\theta_{k+1})$.

Определение 3.17. Пусть $F\colon J^k(\pi) \to J^k(\pi)$ — преобразование Ли. Определенное выше отображение $F^{(1)}\colon J^{k+1}(\pi) \to J^{k+1}(\pi)$ называется 1-*поднятием* преобразования F.

Отображение $F^{(1)}$ является преобразованием Ли в своей области определения, так как почти всюду оно переводит графики $(k+1)$-джетов в графики того же вида. Значит, для любого $l \geqslant 1$ можно почти всюду определить отображение $F^{(l)} = (F^{(l-1)})^{(1)}$, которое называется l-*поднятием* отображения F.

Теорема 3.12. *Пусть $\pi\colon E \to M$ — m-мерное векторное расслоение над n-мерным многообразием M и $F\colon J^k(\pi) \to J^k(\pi)$ — преобразование Ли. Тогда*:

1) *Если $m > 1$ и $k > 0$, то отображение F имеет вид $F = G^{(k)}$ для некоторого диффеоморфизма $G\colon J^0(\pi) \to J^0(\pi)$;*
2) *Если $m = 1$ и $k > 1$, то отображение F имеет вид $F = G^{(k-1)}$ для некоторого контактного преобразования $G\colon J^1(\pi) \to J^1(\pi)$.*

Доказательство. Напомним, что слои проекции $\pi_{k,k-1}\colon J^k(\pi) \to J^{k-1}(\pi)$ при $k \geqslant 1$ — это максимальные интегральные многообразия распределения Картана типа 0 (см. замечание 3.2 на предшествующей странице). Далее, из предложения 3.10 на с. 36 в случаях $m > 1$, $k > 0$ и $m = 1$, $k > 1$ следует, что они являются интегральными многообразиями максимальной размерности, при условии что $n > 1$. Следовательно, отображение F является $\pi_{k,\epsilon}$-послойным, где $\epsilon = 0$ при $m > 1$ и $\epsilon = 1$ при $m = 1$.

Таким образом, существует такое отображение $G\colon J^\epsilon(\pi) \to J^\epsilon(\pi)$, что $\pi_{k,\epsilon} \circ F = G \circ \pi_{k,\epsilon}$, и G, очевидным образом, — преобразование Ли. Покажем, что $F = G^{(k-\epsilon)}$. Для этого сначала заметим, что по тем же самым причинам, что и выше, преобразование F порождает последовательность преобразований Ли $G_l\colon J^l(\pi) \to J^l(\pi)$, $l = \epsilon, \dots, k$, удовлетворяющую условиям $\pi_{l,l-1} \circ G_l = G_{l-1} \circ \pi_{l,l-1}$ и $G_k = F$, $G_\epsilon = G$. Сравним отображения F и $G^{(1)}_{k-1}$.

Из предложения 3.6 на с. 34 и определения преобразований Ли получаем, что

$$F_*((\pi_{k,k-1})_*^{-1}(L_{\theta_k})) = F_*(\mathcal{C}^k_{\theta_k}) = \mathcal{C}_{F(\theta_k)} = (\pi_{k,k-1})_*^{-1}(L_{F(\theta_k)})$$

для любого $\theta_k \in J^k(\pi)$. Но

$$F_*((\pi_{k,k-1})_*^{-1}(L_{\theta_k})) = (\pi_{k,k-1})_*^{-1}(G_{k-1,*}(L_{\theta_k}))$$

и, следовательно, $G_{k-1,*}(L_{\theta_k}) = L_{F(\theta_k)}$. Значит, по определению 1-поднятия, мы имеем $F = G^{(1)}_{k-1}$. Взяв этот факт за основание элементарной индукции, мы получаем утверждение теоремы при $\dim M > 1$.

Теперь рассмотрим случай $n = 1$, $m = 1$. Так как все максимальные интегральные многообразия в этом случае одномерны, он требует отдельного рассмотрения. Обозначим через $\mathcal{V}$ распределение, состоящее из векторных полей, касательных к слоям проекции $\pi_{k,k-1}$. Нам надо показать, что

$$F_*\mathcal{V} = \mathcal{V} \tag{3.22}$$

для любого преобразования Ли F; это эквивалентно тому, что F является $\pi_{k,k-1}$-послойным.

Докажем равенство (3.22). Для этого рассмотрим произвольное распределение $\mathcal{P}$ на многообразии N и введем обозначения

$$\mathcal{P}D = \{\, X \in \mathrm{D}(N) \mid X \text{ лежит в } \mathcal{P} \,\} \tag{3.23}$$

и

$$D_{\mathcal{P}} = \{\, X \in \mathrm{D}(N) \mid [X, Y] \in \mathcal{P}D,\ \forall Y \in \mathcal{P}D \,\}. \tag{3.24}$$

Тогда можно показать (например, используя координатное представление), что $D\mathcal{V} = D\mathcal{C}^k \cap D_{[D\mathcal{C}^k, D\mathcal{C}^k]}$ при $k \geqslant 2$. Но преобразования Ли сохраняют распределения в правой части последнего равенства и, следовательно, сохраняют $D\mathcal{V}$. □

Определение 3.18. Пусть $\pi\colon E \to M$ — векторное поле и $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ — дифференциальное уравнение k-го порядка.

1) Векторное поле X на $J^k(\pi)$ называется *полем Ли*, если соответствующая однопараметрическая группа состоит из преобразований Ли.
2) Поле Ли называется *инфинитезимальной симметрией* уравнения $\mathcal{E}$, если оно касается $\mathcal{E}$.

Так как в дальнейшем мы будем иметь дело только с инфинитезимальными симметриями, мы будем называть их просто *симметриями*. По определению, однопараметрические группы преобразований, соответствующие симметриям, сохраняют обобщенные решения[5].

Пусть X — поле Ли на $J^k(\pi)$ и $F_t\colon J^k(\pi) \to J^k(\pi)$ — его однопараметрическая группа. Тогда можно построить l-поднятие $F_t^{(l)}\colon J^{k+l}(\pi) \to J^{k+l}(\pi)$ и соответствующее поле Ли $X^{(l)}$ на $J^{k+l}(\pi)$. Это поле называется *l-поднятием* поля X. Как мы вскоре увидим, поднятия полей Ли определены глобально и их можно точно описать. Непосредственным следствием определения и теоремы 3.12 на предшествующей странице является

Теорема 3.13. *Пусть $\pi\colon E \to M$ — m-мерное векторное расслоение над n-мерным многообразием M и X — поле Ли на $J^k(\pi)$. Тогда*:

1) *Если $m > 1$ и $k > 0$, то поле X имеет вид $X = Y^{(k)}$ для некоторого векторного поля Y на $J^0(\pi)$;*
2) *Если $m = 1$ и $k > 1$, то поле X имеет вид $X = Y^{(k-1)}$ для некоторого контактного векторного поля Y на $J^1(\pi)$.*

В заключение этого параграфа, мы выведем координатные выражения для полей Ли. Пусть $(x_1, \ldots, x_n, \ldots, u^j_\sigma, \ldots)$ — специальная система координат на $J^k(\pi)$. Тогда из равенства (3.21) на с. 37 следует, что

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \sum_{|\sigma| \leqslant k} X^j_\sigma \frac{\partial}{\partial u^j_\sigma}$$

является полем Ли тогда и только тогда, когда

$$X^j_{\sigma i} = D_i(X^j_\sigma) - \sum_{\alpha=1}^n u^j_{\sigma\alpha} D_i(X_\alpha), \tag{3.25}$$

где

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \sum_{|\sigma| \geqslant 0} u^j_{\sigma i} \frac{\partial}{\partial u^j_\sigma} \tag{3.26}$$

— так называемые *полные производные*.

Упражнение 3.1. Легко видеть, что операторы (3.26) не сохраняют алгебр $\mathcal{F}_k$: они являются дифференцированиями, действующими из $\mathcal{F}_k$ в $\mathcal{F}_{k+1}$. Докажите, что тем не менее для любого контактного поля на $J^1(\pi)$, $\dim \pi = 1$, или для произвольного векторного поля на $J^0(\pi)$ (независимо от размерности π), приведенные выше формулы задают векторное поле на $J^k(\pi)$.

Напомним теперь, что контактное поле X на $J^1(\pi)$ полностью определяется своей *производящей функцией* $f = \mathrm{i}_X\omega$, где $\omega = du - \sum_i u_i\, dx_i$ — (контактная) форма Картана на $J^1(\pi)$. Контактное поле, соответствующее функции $f \in \mathcal{F}_1(\pi)$, обозначается X_f и задается выражением

$$X_f = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \left(f - \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial f}{\partial u_i}\right) \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial f}{\partial u}\right) \frac{\partial}{\partial u_i}. \tag{3.27}$$

[5] *Обобщенное решение* уравнения $\mathcal{E}$ — это n-мерное максимальное интегральное многообразие $N \subset \mathcal{E}$ распределения Картана на $\mathcal{E}$; см. [48].

Таким образом, начиная с поля (3.27) на предыдущей странице в случае $\dim\pi = 1$ или с произвольного поля на $J^0(\pi)$ при $\dim\pi > 1$ и используя соотношения (3.25) на предшествующей странице, мы сможем получить явные выражения для полей Ли на $J^k(\pi)$ для произвольного k.

Замечание 3.3. Заметим, что в многомерном случае, $\dim\pi > 1$, мы можем ввести функции $f^j = \mathrm{i}_X\omega^j$, где $\omega^j = du^j - \sum_i u_i^j\,dx_i$ — формы Картана на $J^1(\pi)$. Эти функции можно понимать как элемент модуля $\mathcal{F}_1(\pi,\pi)$. Локальными условиями того, что сечение $f \in \mathcal{F}_1(\pi,\pi)$ порождает поле Ли, служат следующие равенства:

$$\frac{\partial f^\alpha}{\partial u_i^\alpha} = \frac{\partial f^\beta}{\partial u_i^\beta}, \quad \frac{\partial f^\alpha}{\partial u_i^\beta} = 0, \quad \alpha \neq \beta.$$

Назовем f *производящей функцией* (хотя, строго говоря, надо было бы использовать термин «*производящее сечение*») поля Ли X, если X — поднятие поля X_f.

Запишем условия того, что поле Ли X является симметрией. Предположим, что уравнение $\mathcal{E}$ задано соотношениями $F^1 = 0, \dots, F^r = 0$, где $F^j \in \mathcal{F}_k(\pi)$. В этом случае X — симметрия уравнения $\mathcal{E}$ тогда и только тогда, когда

$$X(F^j) = \sum_{\alpha=1}^{r} \lambda_\alpha^j F^\alpha, \quad j = 1, \dots, r,$$

где λ_α^j — гладкие функции, или $X(F^j)\,|_{\mathcal{E}} = 0$, $j = 1, \dots, r$. Эти условия можно переписать в терминах производящих сечений, и мы сделаем это позже в более общей ситуации.

3.7. **Продолжения дифференциальных уравнений.** Продолжения — дифференциальные следствия данного дифференциального уравнения. Дадим формальное определение.

Определение 3.19. Пусть $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ — дифференциальное уравнение порядка k. Определим множество

$$\mathcal{E}^1 = \{\, \theta_{k+1} \in J^{k+1}(\pi) \mid \pi_{k+1,k}(\theta_{k+1}) \in \mathcal{E},\ L_{\theta_{k+1}} \subset T_{\pi_{k+1,k}(\theta_{k+1})}\mathcal{E} \,\}$$

и назовем его *первым продолжением* уравнения $\mathcal{E}$.

Если первое продолжение $\mathcal{E}^1$ — подмногообразие в $J^{k+1}(\pi)$, то определим второе продолжение уравнения $\mathcal{E}$ как $(\mathcal{E}^1)^1 \subset J^{k+2}(\pi)$ и т. д. Таким образом, *l-е продолжение* — это подмножество $\mathcal{E}^l \subset J^{k+l}(\pi)$.

Дадим другое определение l-го продолжения, на этот раз в явной форме. А именно, возьмем точку $\theta_k \in \mathcal{E}$ и рассмотрим такое сечение $\varphi \in \Gamma_{\mathrm{loc}}(\pi)$, что график $j_k(\varphi)$ касается $\mathcal{E}$ с порядком l. Пусть $\pi_k(\theta_k) = x \in M$. Тогда $[\varphi]_x^{k+l}$ — точка $J^{k+l}(\pi)$, и множество всех точек, полученных таким способом, очевидным образом совпадает с $\mathcal{E}^l$, при условии что все промежуточные продолжения $\mathcal{E}^1, \dots, \mathcal{E}^{l-1}$ корректно определены, в смысле определения 3.19.

Допустим теперь, что локально $\mathcal{E}$ задается уравнениями $F^1 = 0, \dots, F^r = 0$, $F^j \in \mathcal{F}_k(\pi)$, и что точка $\theta_k \in \mathcal{E}$ — начало координат выбранной специальной системы координат. Тогда уравнениями первого продолжения будут

$$\frac{\partial F^j}{\partial x_i} + \sum_{\alpha,\sigma} \frac{\partial F^j}{\partial u_\sigma^\alpha} u_{\sigma i}^\alpha = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, r,$$

вместе с первоначальными уравнениями $F^j = 0$. Отсюда, сравнивая полученные соотношения с координатными представлениями продолжений нелинейных дифференциальных операторов (см. §3.2), мы получаем следующий результат:

Предложение 3.14. *Пусть $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ — дифференциальное уравнение. Тогда*:

1) *Если уравнение $\mathcal{E}$ задано дифференциальным оператором $\Delta\colon \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi')$, то его l-е продолжение задается l-м продолжением $\Delta^{(l)}\colon \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi'_l)$ оператора Δ.*

2) *Если $\mathcal{E}$ локально описывается системой $F^1 = 0, \dots, F^r = 0$, $F^j \in \mathcal{F}_k(\pi)$, то система*

$$D_\sigma F^j = 0, \quad |\sigma| \leqslant l, j = 1, \dots, r, \tag{3.28}$$

где $D_\sigma = D_{i_1} \circ \ldots \circ D_{i_{|\sigma|}}$, $\sigma = i_1 \ldots i_{|\sigma|}$, соответствует $\mathcal{E}^l$. Здесь D_i обозначает i-ю полную производную (см. равенство (3.26) на с. 39).

Из определения следует, что для любых $l \geqslant l' \geqslant 0$ имеем $\pi_{k+l,k+l'}(\mathcal{E}^l) \subset \mathcal{E}^{l'}$ и, следовательно, определены отображения $\pi_{k+l,k+l'} \colon \mathcal{E}^l \to \mathcal{E}^{l'}$.

Определение 3.20. Уравнение $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ называется *формально интегрируемым*, если

1) все продолжения $\mathcal{E}^l$ — гладкие многообразия и
2) все отображения $\pi_{k+l+1,k+l} \colon \mathcal{E}^{l+1} \to \mathcal{E}^l$ — гладкие расслоения.

Определение 3.21. Обратный предел $\varprojlim \mathcal{E}^l$ относительно системы проекций $\pi_{l+1,l}$ называется *бесконечным продолжением* уравнения $\mathcal{E}$ и обозначается $\mathcal{E}^\infty \subset J^\infty(\pi)$.

3.8. **Основные структуры на бесконечных продолжениях.** Пусть $\pi \colon E \to M$ — векторное расслоение и $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ — дифференциальное уравнение k-го порядка. Тогда имеются вложения $\varepsilon_l \colon \mathcal{E}^l \subset J^{k+l}(\pi)$ при всех $l \geqslant 0$. Так как, вообще говоря, множества $\mathcal{E}^l$ могут не быть гладкими многообразиями, мы определим *функцию* на $\mathcal{E}^l$ как ограничение $f|_{\mathcal{E}^l}$ гладкой функции $f \in \mathcal{F}_{k+l}(\pi)$. Множество $\mathcal{F}_l(\mathcal{E})$ всех функций на $\mathcal{E}^l$ естественным путем образует $\mathbb{R}$-алгебру, и $\varepsilon_l^* \colon \mathcal{F}_{k+l}(\pi) \to \mathcal{F}_l(\mathcal{E})$ — гомоморфизм алгебр. В случае формально интегрируемых уравнений алгебра $\mathcal{F}_l(\mathcal{E})$ совпадает с $C^\infty(\mathcal{E}^l)$. Пусть $I_l = \ker \varepsilon_l^*$. Очевидно, что $I_l(\mathcal{E}) \subset I_{l+1}(\mathcal{E})$. Тогда $I(\mathcal{E}) = \bigcup_{l \geqslant 0} I_l(\mathcal{E})$ — идеал в $\mathcal{F}(\pi)$, называемый *идеалом уравнения* $\mathcal{E}$. *Алгебра функций* на $\mathcal{E}^\infty$ — это факторалгебра $\mathcal{F}(\mathcal{E}) = \mathcal{F}(\pi)/I(\mathcal{E})$; она совпадает с $\varinjlim \mathcal{F}_l(\mathcal{E})$ относительно системы гомоморфизмов $\pi_{k+l+1,k+l}^*$. При любом $l \geqslant 0$ определены гомоморфизмы $\varepsilon_l^* \colon \mathcal{F}_l(\mathcal{E}) \to \mathcal{F}(\mathcal{E})$. Когда $\mathcal{E}$ формально интегрируемо, они мономорфны, и в любом случае алгебра $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ фильтруется образами гомоморфизмов ε_l^*.

Чтобы построить дифференциальное исчисление на $\mathcal{E}^\infty$, мы воспользуемся общей алгебраической схемой, описанной в главе 1, и применим ее к фильтрованной алгебре $\mathcal{F}(\mathcal{E})$. Однако в случае формально интегрируемых уравнений, вследствие того факта, что все $\mathcal{E}^l$ — гладкие многообразия, эту схему можно упростить и связать ее с чисто геометрическим подходом (ср. с аналогичной конструкцией §3.3).

В специальных координатах бесконечное продолжение уравнения $\mathcal{E}$ задается системой, подобной системе (3.28), с тем единственным отличием, что теперь $|\sigma|$ не ограничен. Таким образом, идеал $I(\mathcal{E})$ порожден функциями $D_\sigma F^j$, $|\sigma| \geqslant 0$, $j = 1, \dots, m$. Из этих замечаний мы получаем следующий важный факт.

Замечание 3.4. Пусть $\mathcal{E}$ — формально интегрируемое уравнение. Тогда из сказанного выше следует, что идеал $I(\mathcal{E})$ инвариантен относительно действия полных производных D_i, $i = 1, \dots, n$. Следовательно, ограничения $D_i^{\mathcal{E}} = D_i|_{\mathcal{E}} \colon \mathcal{F}(\mathcal{E}) \to \mathcal{F}(\mathcal{E})$ определены корректно и $D_i^{\mathcal{E}}$ — фильтрованные дифференцирования. Другими словами, мы получили, что векторные поля D_i касаются бесконечного продолжения и определяют векторные поля на $\mathcal{E}^\infty$. В дальнейшем мы часто будем опускать верхний индекс $\mathcal{E}$ в обозначении определенных выше ограничений.

Пример 3.9. Рассмотрим систему эволюционных уравнений вида

$$u_t^j = f^j(x, t, \dots, u^\alpha, \dots, u_x^\alpha, \dots), \quad j, \alpha = 1, \dots, m.$$

Тогда набор функций $x_1, \dots, x_n$, $t, \dots, u^j_{i_1,\dots,i_r,0}$, где $1 \leqslant i_k \leqslant n$, $j = 1, \dots, m$, причем $t = x_{n+1}$, может быть взят в качестве *внутренних координат* на $\mathcal{E}^\infty$. Полные производные, ограниченные на $\mathcal{E}^\infty$, в этих координатах имеют вид

$$\begin{aligned} D_i &= \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n \sum_{|\sigma| \geqslant 0} u^j_{\sigma i} \frac{\partial}{\partial u^j_\sigma}, \ i = 1, \dots, n, \\ D_t &= \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \sum_{|\sigma| \geqslant 0} D_\sigma(f^j) \frac{\partial}{\partial u^j_\sigma}, \end{aligned} \tag{3.29}$$

а формы Картана, ограниченные на $\mathcal{E}^\infty$, записываются как

$$\omega^j_\sigma = du^j_\sigma - \sum_{i=1}^{n} u^j_{\sigma i}\, dx_i - D_\sigma(f^j)\, dt. \tag{3.30}$$

Пусть $\pi\colon E \to M$ — векторное расслоение и $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ — формально интегрируемое уравнение.

Определение 3.22. Пусть $\theta \in J^\infty(\pi)$. Тогда:

1) *Плоскостью Картана* $\mathcal{C}_\theta = \mathcal{C}_\theta(\pi) \subset T_\theta J^\infty(\pi)$ в точке θ называется линейная оболочка касательных плоскостей ко всем многообразиям $j_\infty(\varphi)(M)$, $\varphi \in \Gamma(\pi)$, проходящим через θ.
2) Если $\theta \in \mathcal{E}^\infty$, то пересечение $\mathcal{C}_\theta(\mathcal{E}) = \mathcal{C}_\theta(\pi) \cap T_\theta \mathcal{E}^\infty$ называется *плоскостью Картана* на $\mathcal{E}^\infty$ в точке θ.

Сопоставление $\theta \mapsto \mathcal{C}_\theta(\pi)$, $\theta \in J^\infty(\pi)$ (соответственно, $\theta \mapsto \mathcal{C}_\theta(\mathcal{E}^\infty)$, $\theta \in \mathcal{E}^\infty$) называется *распределением Картана* на $J^\infty(\pi)$ (соответственно, на $\mathcal{E}^\infty$).

Предложение 3.15. *Для любого векторного расслоения $\pi\colon E \to M$ и формально интегрируемого уравнения $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ имеем:*

1) *Плоскость Картана $\mathcal{C}_\theta(\pi)$ n-мерна в любой точке $\theta \in J^\infty(\pi)$.*
2) *Любая точка $\theta \in \mathcal{E}^\infty$ является точкой общего положения, т. е. $\mathcal{C}_\theta(\pi) \subset T_\theta \mathcal{E}^\infty$ и, следовательно, $\mathcal{C}_\theta(\mathcal{E}^\infty) = \mathcal{C}_\theta(\pi)$.*
3) *Оба распределения, $\mathcal{C}(\pi)$ и $\mathcal{C}(\mathcal{E}^\infty)$, интегрируемы.*

Доказательство. Пусть $\theta \in J^\infty(\pi)$ и $\pi_\infty(\theta) = x \in M$. Тогда точка θ полностью определяет все частные производные любого сечения $\varphi \in \Gamma_{\mathrm{loc}}(\pi)$, график которого проходит через θ. Следовательно, все эти графики имеют общую касательную плоскость в данной точке, совпадающую с $\mathcal{C}_\theta(\pi)$. Первое утверждение доказано.

Для доказательства второго утверждения обратимся к замечанию 3.4 на предшествующей странице: локально всякое векторное поле D_i касается $\mathcal{E}^\infty$. Но из равенства (3.20) на с. 35 следует, что $\mathrm{i}_{D_i}\omega^j_\sigma = 0$ для всех D_i и любой формы Картана ω^j_σ. Поэтому линейно независимые векторные поля $D_1, \ldots, D_n$ локально лежат и в $\mathcal{C}(\pi)$, и в $\mathcal{C}(\mathcal{E}^\infty)$, откуда следует искомое.

Наконец, из сказанного выше следует, что модуль

$$\mathcal{C}\mathrm{D}(\pi) = \{\, X \in \mathrm{D}(\pi) \mid X \text{ лежит в } \mathcal{C}(\pi) \,\} \tag{3.31}$$

локально порожден полями $D_1, \ldots, D_n$. Но легко видеть, что $[D_\alpha, D_\beta] = 0$ для всех $\alpha, \beta = 1, \ldots, n$ и, следовательно, $[\mathcal{C}\mathrm{D}(\pi), \mathcal{C}\mathrm{D}(\pi)] \subset \mathcal{C}\mathrm{D}(\pi)$. Те же рассуждения справедливы и для модуля

$$\mathcal{C}\mathrm{D}(\mathcal{E}) = \{\, X \in \mathrm{D}(\mathcal{E}^\infty) \mid X \text{ лежит в } \mathcal{C}(\mathcal{E}^\infty) \,\}. \tag{3.32}$$

Предложение полностью доказано. □

Предложение 3.16. *Максимальными интегральными многообразиями распределения Картана $\mathcal{C}(\pi)$ являются графики бесконечных джетов сечений $j_\infty(\varphi)$, $\varphi \in \Gamma_{\mathrm{loc}}(\pi)$.*

Доказательство. Во-первых, отметим, что графики бесконечных джетов являются интегральными многообразиями распределения Картана максимальной размерности (равной n) и что всякое интегральное многообразие проектируется на $J^k(\pi)$ и на M без особенностей.

Пусть теперь $N \subset J^\infty(\pi)$ — интегральное многообразие и $N^k = \pi_{\infty,k}(N) \subset J^k(\pi)$, $N' = \pi_\infty(N) \subset M$. Тогда существует такой диффеоморфизм $\varphi'\colon N' \to N^0$, что $\pi \circ \varphi' = \mathrm{id}_{N'}$. По теореме Уитни о продолжении (см. [13]), существует локальное сечение $\varphi\colon M \to E$, удовлетворяющее условиям $\varphi|_{N'} = \varphi'$ и $j_k(\varphi)(M) \supset N^k$ для всех $k > 0$. Следовательно, $j_\infty(\varphi)(M) \supset N$. □

Следствие 3.17. *Максимальные интегральные многообразия распределения Картана на $\mathcal{E}^\infty$ локально совпадают с графиками бесконечных джетов решений.*

Рассмотрим точку $\theta \in J^\infty(\pi)$; пусть $x = \pi_\infty(\theta) \in M$ — ее проекция на M. Пусть вектор v касается M в точке x. Тогда, поскольку картановская плоскость $\mathcal{C}_\theta$ изоморфно проектируется на $T_x M$, существует единственный касательный вектор $\mathcal{C}v \in T_\theta J^\infty(\pi)$, для которого $(\pi_\infty)_*(\mathcal{C}v) = v$. Следовательно, по любому векторному полю $X \in \mathrm{D}(M)$ равенством $(\mathcal{C}X)_\theta = \mathcal{C}(X_{\pi_\infty(\theta)})$ может быть определено векторное поле $\mathcal{C}X \in \mathrm{D}(\pi)$. По построению поле $\mathcal{C}X$ проектируется с помощью $(\pi_\infty)_*$ на X, причем соответствие $\mathcal{C}\colon \mathrm{D}(M) \to \mathrm{D}(\pi)$ $C^\infty(M)$-линейно. Иными словами, это соответствие является связностью в расслоении $\pi_\infty\colon J^\infty(\pi) \to M$.

Определение 3.23. Определенная выше связность $\mathcal{C}\colon \mathrm{D}(M) \to \mathrm{D}(\pi)$ называется *связностью Картана* в $J^\infty(\pi)$.

Для любого формально интегрируемого уравнения связность Картана очевидным образом ограничивается на расслоение $\pi_\infty\colon \mathcal{E}^\infty \to M$; для этого ограничения мы сохраним прежнее обозначение $\mathcal{C}$.

Пусть $(x_1, \dots, x_n, \dots, u^j_\sigma, \dots)$ — специальная система координат на $J^\infty(\pi)$, а $X = X_1\partial/\partial x_1 + \dots + X_n\partial/\partial x_n$ — векторное поле на M, выраженное в этой системе координат. Тогда поле $\mathcal{C}X$ представляется в виде $\mathcal{C}X = X + X^v$, где $X^v = \sum_{j,\sigma} X^j_\sigma \partial/\partial u^j_\sigma$ — π_∞-вертикальное поле. Из условий $\mathrm{i}_{\mathcal{C}X}\omega^j_\sigma = 0$, где ω^j_σ — формы Картана на $J^\infty(\pi)$, следует, что

$$\mathcal{C}X = \sum_{i=1}^n X_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j,\sigma} u^j_{\sigma i}\frac{\partial}{\partial u^j_\sigma}\right) = \sum_{i=1}^n X_i D_i. \tag{3.33}$$

В частности, $\mathcal{C}(\partial/\partial x_i) = D_i$, т. е. полные производные суть поднятия на $J^\infty(\pi)$ соответствующих частных производных при помощи связности Картана.

Пусть теперь V — векторное поле на $\mathcal{E}^\infty$ и $\theta \in \mathcal{E}^\infty$ — некоторая точка. Тогда вектор V_θ можно спроектировать параллельно плоскости Картана $\mathcal{C}_\theta$ на слой проекции $\pi_\infty\colon \mathcal{E}^\infty \to M$, проходящий через θ. Тем самым мы получим вертикальное векторное поле V^v. Следовательно, для любой функции $f \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$ равенство

$$\mathrm{i}_V(U_{\mathcal{C}}(f)) = V^v(f), \quad V \in \mathrm{D}(\mathcal{E}), \tag{3.34}$$

определяет дифференциальную 1-форму $U_{\mathcal{C}}(f) \in \Lambda^1(\mathcal{E})$. Соответствие $f \mapsto U_{\mathcal{C}}(f)$ — это дифференцирование алгебры $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ со значениями в $\mathcal{F}(\mathcal{E})$-модуле $\Lambda^1(\mathcal{E})$, т. е. $U_{\mathcal{C}}(fg) = fU_{\mathcal{C}}(g) + gU_{\mathcal{C}}(f)$ для всех $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$.

Определение 3.24. Дифференцирование $U_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{F}(\mathcal{E}) \to \Lambda^1(\mathcal{E})$ называется *структурным элементом* уравнения $\mathcal{E}$.

В случае $\mathcal{E}^\infty = J^\infty(\pi)$ структурный элемент $U_{\mathcal{C}}$ локально представляется в виде

$$U_{\mathcal{C}} = \sum_{j,\sigma} \omega^j_\sigma \otimes \frac{\partial}{\partial u^j_\sigma}, \tag{3.35}$$

где ω^j_σ — формы Картана на $J^\infty(\pi)$. Чтобы получить это выражение в общем случае, нужно переписать (3.35) во внутренних координатах.

Следующий результат непосредственно вытекает из определений:

Предложение 3.18. *Для любого векторного поля $X \in \mathrm{D}(M)$ имеет место равенство*

$$j_\infty(\varphi)^*(\mathcal{C}X(f)) = X(j_\infty(\varphi)^*(f)), \quad f \in \mathcal{F}(\pi), \quad \varphi \in \Gamma_{\mathrm{loc}}(\pi). \tag{3.36}$$

Равенство (3.36) *однозначно определяет связность Картана в $J^\infty(\pi)$.*

Следствие 3.19. *Связность Картана в $\mathcal{E}^\infty$ является плоской, т. е. $\mathcal{C}[X, Y] = [\mathcal{C}X, \mathcal{C}Y]$ для любых X, $Y \in \mathrm{D}(M)$.*

Доказательство. Рассмотрим случай $\mathcal{E}^\infty = J^\infty(\pi)$. Тогда из предложения 3.18 получаем

$$j_\infty(\varphi)^*(\mathcal{C}[X, Y](f)) = [X, Y](j_\infty(\varphi)^*(f)) = X(Y(j_\infty(\varphi)^*(f))) - Y(X(j_\infty(\varphi)^*(f)))$$

для любых $\varphi \in \Gamma_{\mathrm{loc}}(\pi)$, $f \in \mathcal{F}(\pi)$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} j_\infty(\varphi)^*([\mathcal{C}X, \mathcal{C}Y](f)) &= j_\infty(\varphi)^*(\mathcal{C}X(\mathcal{C}Y(f)) - \mathcal{C}Y(\mathcal{C}X(f))) = \\ &= X(j_\infty(\varphi)^*(Y(f))) - Y(j_\infty(\varphi)^*(\mathcal{C}X(f))) = X(Y(j_\infty(\varphi)^*(f))) - Y(X(j_\infty(\varphi)^*(f))). \end{aligned}$$

Чтобы доказать утверждение для произвольного формально интегрируемого уравнения $\mathcal{E}$, достаточно заметить, что связность Картана в $\mathcal{E}^\infty$ получается ограничением полей $\mathcal{C}X$ на бесконечное продолжение уравнения $\mathcal{E}$. $\square$

Равенство (3.36) из предложения 3.18 на предыдущей странице можно обобщить до следующей конструкции. Пусть $\pi\colon E \to M$ — векторное расслоение и $\xi_1\colon E_1 \to M$, $\xi_2\colon E_2 \to M$ — еще два векторных расслоения.

Определение 3.25. Пусть $\Delta\colon \Gamma(\xi_1) \to \Gamma(\xi_2)$ — линейный дифференциальный оператор. *Поднятие* $\mathcal{C}\Delta\colon \mathcal{F}(\pi,\xi_1) \to \mathcal{F}(\pi,\xi_2)$ оператора Δ задается формулой

$$j_\infty(\varphi)^*(\mathcal{C}\Delta(f)) = \Delta(j_\infty(\varphi)^*(f)), \tag{3.37}$$

где $\varphi \in \Gamma_{\mathrm{loc}}(\pi)$, $f \in \mathcal{F}(\pi,\xi_1)$ — произвольные сечения.

Предложение 3.20. *Пусть* $\pi\colon E \to M$, $\xi_i\colon E_i \to M$, $i = 1,2,3,$ — *векторные расслоения. Тогда*:

1) *Для любого оператора* $\Delta\colon \Gamma(\xi_1) \to \Gamma(\xi_2)$, *оператор* $\mathcal{C}\Delta$ — *это линейный дифференциальный оператор* (*над алгеброй* $\mathcal{F}(\pi)$) *того же порядка.*
2) *Для любых дифференциальных операторов* Δ, $\square\colon \Gamma(\xi_1) \to \Gamma(\xi_2)$ *и функций* f, $g \in \mathcal{F}(\pi)$ *выполняется равенство*
$$\mathcal{C}(f\Delta + g\square) = f\mathcal{C}\Delta + g\mathcal{C}\square.$$
3) *Для дифференциальных операторов* $\Delta_1\colon \Gamma(\xi_1) \to \Gamma(\xi_2)$ *и* $\Delta_2\colon \Gamma(\xi_2) \to \Gamma(\xi_3)$ *выполняется равенство*
$$\mathcal{C}(\Delta_2 \circ \Delta_1) = \mathcal{C}\Delta_2 \circ \mathcal{C}\Delta_1.$$

Из этого утверждения и предложения 3.18 на предшествующей странице следует, что если Δ — скалярный дифференциальный оператор $C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, локально представляющийся в виде $\Delta = \sum_\sigma a_\sigma \partial^{|\sigma|}/\partial x_\sigma$, $a_\sigma \in C^\infty(M)$, то $\mathcal{C}\Delta = \sum_\sigma a_\sigma D_\sigma$ в соответствующих специальных координатах. Если $\Delta = \|\Delta_{ij}\|$ — матричный оператор, то $\mathcal{C}\Delta = \|\mathcal{C}\Delta_{ij}\|$. Очевидно, что $\mathcal{C}\Delta$ можно понимать как постоянный дифференциальный оператор, отображающий сечения расслоения π в линейные дифференциальные операторы из $\Gamma(\xi_1)$ в $\Gamma(\xi_2)$. Это замечание можно обобщить следующим образом.

Определение 3.26. $\mathcal{F}(\pi)$-линейный дифференциальный оператор Δ, действующий из модуля $\mathcal{F}(\pi,\xi_1)$ в $\mathcal{F}(\pi,\xi_2)$, называется $\mathcal{C}$-*дифференциальным*, если он допускает ограничение на графики бесконечных джетов, т. е. если для любого сечения $\varphi \in \Gamma(\pi)$ существует такой оператор $\Delta_\varphi\colon \Gamma(\xi_1) \to \Gamma(\xi_2)$, что

$$j_\infty(\varphi)^*(\Delta(f)) = \Delta_\varphi(j_\infty(\varphi)^*(f)) \tag{3.38}$$

для всех $f \in \mathcal{F}(\pi,\xi_1)$.

Таким образом, $\mathcal{C}$-дифференциальные операторы — это нелинейные дифференциальные операторы, принимающие свои значения в $C^\infty(M)$-модулях линейных дифференциальных операторов.

Упражнение 3.2. Рассмотрим произвольный $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор $\Delta\colon \mathcal{F}(\pi,\xi_1) \to \mathcal{F}(\pi,\xi_2)$. Докажите, что если $\Delta(\pi_\infty^*(f)) = 0$ при всех $f \in \Gamma(\xi_1)$, то $\Delta = 0$.

Предложение 3.21. *Пусть* π, ξ_1 *и* ξ_2 — *векторные расслоения над* M. *Тогда любой* $\mathcal{C}$-*дифференциальный оператор* $\Delta\colon \mathcal{F}(\pi,\xi_1) \to \mathcal{F}(\pi,\xi_2)$ *можно представить в виде* $\Delta = \sum_\alpha a_\alpha \mathcal{C}\Delta_\alpha$, $a_\alpha \in \mathcal{F}(\pi)$, *где* Δ_α — *линейные дифференциальные операторы, действующие из* $\Gamma(\xi_1)$ *в* $\Gamma(\xi_2)$.

Доказательство. Напомним, что мы рассматриваем фильтрованную теорию; в частности, найдется такое целое число l, что $\Delta(\mathcal{F}_k(\pi,\xi_1)) \subset \mathcal{F}_{k+l}(\pi,\xi_2)$ при всех k. Следовательно, так как $\Gamma(\xi_1)$ вложено в $\mathcal{F}_0(\pi,\xi_1)$, мы имеем $\Delta(\Gamma(\xi_1)) \subset \mathcal{F}_l(\pi,\xi_2)$, и ограничение $\bar{\Delta} = \Delta\big|_{\Gamma(\xi_1)}$ — это $C^\infty(M)$-дифференциальный оператор, принимающий значения в $\mathcal{F}_l(\pi,\xi_2)$.

С другой стороны, оператор $\bar{\Delta}$ представляется в виде $\bar{\Delta} = \sum_\alpha a_\alpha \Delta_\alpha$, $a_\alpha \in \mathcal{F}_l(\pi)$, где $\Delta_\alpha\colon \Gamma(\xi_1) \to \Gamma(\xi_2)$ — $C^\infty(M)$-линейные дифференциальные операторы. Положим $\mathcal{C}\bar{\Delta} = \sum_\alpha a_\alpha \mathcal{C}\Delta_\alpha$. Тогда разность $\Delta - \mathcal{C}\bar{\Delta}$ — это такой $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор, что его ограничение на $\Gamma(\xi_1)$ обращается в нуль. Значит, согласно упражнению 3.2, $\Delta = \mathcal{C}\bar{\Delta}$. $\square$

С л е д с т в и е 3.22. *$\mathcal{C}$-дифференциальные операторы допускают ограничение на бесконечные продолжения: если $\Delta\colon \mathcal{F}(\pi,\xi_1) \to \mathcal{F}(\pi,\xi_2)$ — $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор и $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ — уравнение k-го порядка, то существует такой линейный дифференциальный оператор $\Delta_{\mathcal{E}}\colon \mathcal{F}(\mathcal{E},\xi_1) \to \mathcal{F}(\mathcal{E},\xi_2)$, что $\varepsilon^* \circ \Delta = \Delta_{\mathcal{E}} \circ \varepsilon^*$, где $\varepsilon\colon \mathcal{E}^\infty \hookrightarrow J^\infty(\pi)$ — естественное вложение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Этот результат немедленно следует из замечания 3.4 на с. 41 и предложения 3.21 на предыдущей странице. $\square$

П р и м е р 3.10. Пусть $\xi_1 = \tau_i^*$, $\xi_2 = \tau_{i+1}^*$, где $\tau_p^*\colon \bigwedge^p T^*M \to M$ (см. пример 3.2 на с. 29), и $\Delta = d\colon \Lambda^i(M) \to \Lambda^{i+1}(M)$ — дифференциал де Рама. Тогда мы получаем оператор первого порядка $\bar{d} = \mathcal{C}d\colon \bar{\Lambda}^i(\pi) \to \bar{\Lambda}^{i+1}(\pi)$, где $\bar{\Lambda}^p(\pi)$ обозначает модуль $\mathcal{F}(\pi,\tau_p^*)$. Согласно следствию 3.22, определены также операторы $\bar{d}\colon \bar{\Lambda}^i(\mathcal{E}) \to \bar{\Lambda}^{i+1}(\mathcal{E})$, где $\bar{\Lambda}^p(\mathcal{E}) = \mathcal{F}(\mathcal{E},\tau_p^*)$.

О п р е д е л е н и е 3.27. Пусть $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ — некоторое уравнение.

1) Элементы модуля $\bar{\Lambda}^i(\mathcal{E})$ называются *горизонтальными i-формами* на бесконечном продолжении $\mathcal{E}^\infty$.
2) Оператор $\bar{d}\colon \bar{\Lambda}^i(\mathcal{E}) \to \bar{\Lambda}^{i+1}(\mathcal{E})$ называется *горизонтальным дифференциалом де Рама* на $\mathcal{E}^\infty$.

Из утверждения 3) предложения 3.20 на предшествующей странице следует, что $\bar{d} \circ \bar{d} = 0$. Последовательность

$$0 \to \mathcal{F}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\bar{d}} \bar{\Lambda}^1(\mathcal{E}) \to \ldots \to \bar{\Lambda}^i(\mathcal{E}) \xrightarrow{\bar{d}} \bar{\Lambda}^{i+1}(\mathcal{E}) \to \ldots$$

называется *горизонтальным комплексом де Рама* уравнения $\mathcal{E}$. Его когомологии называются *горизонтальными когомологиями де Рама* уравнения $\mathcal{E}$ и обозначаются $\bar{H}^*(\mathcal{E}) = \bigoplus_{i\geqslant 0} \bar{H}^i(\mathcal{E})$.

В локальных координатах горизонтальные формы степени p на $\mathcal{E}^\infty$ представляются в виде $\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_p} a_{i_1\ldots i_p}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$, где $a_{i_1\ldots i_p} \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$, а горизонтальный дифференциал де Рама действует следующим образом:

$$\bar{d}(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i_1<\ldots<i_p} D_i(a_{i_1\ldots i_p})\, dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}. \tag{3.39}$$

В частности, мы видим, что как $\bar{\Lambda}^i(\mathcal{E})$, так и $\bar{H}^i(\mathcal{E})$ тривиальны при $i > n = \dim M$.

Рассмотрим алгебру $\Lambda^*(\mathcal{E})$ всех дифференциальных форм на $\mathcal{E}^\infty$ и заметим, что имеется вложение $\bar{\Lambda}^*(\mathcal{E}) \hookrightarrow \Lambda^*(\mathcal{E})$. Распространим горизонтальный дифференциал де Рама на эту алгебру следующим образом:

$$\bar{d}(d\omega) = -d(\bar{d}(\omega)), \quad \bar{d}(\omega \wedge \theta) = \bar{d}(\omega) \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge \bar{d}(\theta) \quad \omega \in \Lambda^p(\mathcal{E}).$$

Очевидно, что эти условия определяют дифференциал $\bar{d}\colon \Lambda^i(\mathcal{E}) \to \Lambda^{i+1}(\mathcal{E})$ и его ограничение на $\bar{\Lambda}^*(\mathcal{E})$ совпадает с горизонтальным дифференциалом де Рама.

Положим также $d_{\mathcal{C}} = d - \bar{d}\colon \Lambda^*(\mathcal{E}) \to \Lambda^*(\mathcal{E})$ и назовем $d_{\mathcal{C}}$ *дифференциалом Картана* (или *вертикальным дифференциалом*) на $\mathcal{E}^\infty$. Тогда из определений мы получаем

$$d = \bar{d} + d_{\mathcal{C}}, \quad \bar{d} \circ \bar{d} = d_{\mathcal{C}} \circ d_{\mathcal{C}} = 0, \quad d_{\mathcal{C}} \circ \bar{d} + \bar{d} \circ d_{\mathcal{C}} = 0,$$

т. е. пара $(\bar{d}, d_{\mathcal{C}})$ образует бикомплекс в $\Lambda^*(\mathcal{E})$ с тотальным дифференциалом d. Этот бикомплекс называется *вариационным бикомплексом*; он будет более детально обсуждаться в главе 7.

Обозначим через $\mathcal{C}\Lambda^1(\mathcal{E})$ *подмодуль Картана* в $\Lambda^1(\mathcal{E})$, т. е. модуль 1-форм, обращающихся в нуль на распределении Картана на $\mathcal{E}^\infty$ (ср. с определением 3.12 на с. 35). Тогда представление d в виде $d = \bar{d} + d_{\mathcal{C}}$ влечет за собой разложение в прямую сумму

$$\Lambda^1(\mathcal{E}) = \bar{\Lambda}^1(\mathcal{E}) \oplus \mathcal{C}\Lambda^1(\mathcal{E}),$$

что дает

$$\Lambda^i(\mathcal{E}) = \bigoplus_{p+q=i} \bar{\Lambda}^q(\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{F}(\mathcal{E})} \mathcal{C}^p\Lambda(\mathcal{E}), \tag{3.40}$$

где $\mathcal{C}^p\Lambda(\mathcal{E}) = \underbrace{\mathcal{C}\Lambda^1(\mathcal{E}) \wedge \ldots \wedge \mathcal{C}\Lambda^1(\mathcal{E})}_{p \text{ экземпляров}}$.

В завершение этого параграфа мы запишем координатное представление для дифференциала Картана $d_{\mathcal{C}}$ и для действия дифференциала $\bar{d}$ на картановские формы. Во-первых, заметим, что по определению и вследствие представления (3.39) на предшествующей странице мы получаем

$$d_{\mathcal{C}}(f) = \sum_{j,\sigma} \frac{\partial f}{\partial u_\sigma^j}\omega_\sigma^j, \quad f \in \mathcal{F}(\pi). \tag{3.41}$$

В частности, $d_{\mathcal{C}}$ переводит координатные функции u_σ^j в соответствующие формы Картана. Именно по этой причине мы назвали $d_{\mathcal{C}}$ дифференциалом Картана на $\mathcal{E}^\infty$. Легко видеть, что $d_{\mathcal{C}}\big|_{\mathcal{F}(\mathcal{E})} = U_{\mathcal{C}}(\mathcal{E})$ (см. определение 3.24 на с. 43). Для того чтобы закончить вычисления, достаточно вычислить $\bar{d}(\omega_\sigma^j)$:

$$\bar{d}(\omega_\sigma^j) = \bar{d}d_{\mathcal{C}}(u_\sigma^j) = -d_{\mathcal{C}}\bar{d}(u_\sigma^j)$$

и, таким образом,

$$\bar{d}(\omega_\sigma^j) = -\sum_{i=1}^n \omega_{\sigma i}^j \wedge dx_i. \tag{3.42}$$

Заметим, что из полученного результата следует, что

$$\bar{d}(\bar{\Lambda}^q(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{C}^p\Lambda(\mathcal{E})) \subset \bar{\Lambda}^{q+1}(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{C}^p\Lambda(\mathcal{E}),$$
$$d_{\mathcal{C}}(\bar{\Lambda}^q(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{C}^p\Lambda(\mathcal{E})) \subset \bar{\Lambda}^q(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{C}^{p+1}\Lambda(\mathcal{E}).$$

Определим теперь *модуль горизонтальных джетов*. Пусть ξ — векторное расслоение над M. Будем говорить, что два элемента из $P = \mathcal{F}(\mathcal{E}, \xi)$ *горизонтально эквивалентны до порядка* $k \leqslant \infty$ в точке $\theta \in \mathcal{E}^\infty$, если их полные производные до порядка k в θ совпадают. Пространство горизонтальных джетов $\bar{J}_\theta^k(P)$ — модуль P, профакторизованный по этому соотношению, а объединение $\bar{J}^k(P) = \bigcup_{\theta \in \mathcal{E}^\infty} \bar{J}_\theta^k(P)$ образует *расслоение горизонтальных джетов* $\bar{J}^k(P) \to \mathcal{E}^\infty$. Обозначим модуль сечений расслоения горизонтальных джетов через $\bar{\mathcal{J}}^k(P)$.

Как и в случае обычных расслоений джетов, существует естественные $\mathcal{C}$-дифференциальные операторы

$$\bar{\jmath}_k \colon P \to \bar{\mathcal{J}}^k(P),$$

и такие естественные проекции $\nu_{k,l} \colon \bar{\mathcal{J}}^k(P) \to \bar{\mathcal{J}}^l(P)$, $k \geqslant l$, что $\nu_{k,l} \circ \bar{\jmath}_k = \bar{\jmath}_l$. Операторы $\bar{\jmath}_k$ и $\nu_{k,l}$ — это ограничения операторов $\mathcal{C}j_k$ и $\mathcal{C}\pi_{k,l}^*$ на $\mathcal{E}^\infty$.

$\mathcal{C}$-дифференциальные операторы, горизонтальные формы и джеты образуют «подтеорию» в дифференциальном исчислении на бесконечно продолженном уравнении. Это, неформально говоря, «исчисление полных производных»; оно называется $\mathcal{C}$-*дифференциальным исчислением*. Легко показать, что все составляющие обычного дифференциального исчисления и обсуждавшийся выше лагранжев формализм имеют свои аналоги в $\mathcal{C}$-дифференциальном исчислении. Все построения глав 1 и 2 дословно переносятся в $\mathcal{C}$-дифференциальное исчисление, если все операторы, джеты и формы в этом исчислении предполагать соответственно $\mathcal{C}$-дифференциальными и горизонтальными.

3.9. **Высшие симметрии.** Пусть $\pi \colon E \to M$ — векторное расслоение и $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ — дифференциальное уравнение. Мы по-прежнему будем предполагать, что $\mathcal{E}$ формально интегрируемо, хотя это не является существенным ограничением в данном контексте.

Рассмотрим симметрию $F \colon J^k(\pi) \to J^k(\pi)$ уравнения $\mathcal{E}$; пусть θ_{k+1} — такая точка первого продолжения $\mathcal{E}^1$, что $\pi_{k+1,k}(\theta_{k+1}) = \theta_k \in \mathcal{E}$. Тогда R-плоскость $L_{\theta_{k+1}}$ отображается на R-плоскость $F_*(L_{\theta_{k+1}})$, поскольку F — преобразование Ли, и $F_*(L_{\theta_{k+1}}) \subset T_{F(\theta_k)}$, так как F является симметрией. Следовательно, поднятие $F^{(1)} \colon J^{k+1}(\pi) \to J^{k+1}(\pi)$ — симметрия $\mathcal{E}^1$. По тем же причинам $F^{(l)}$ — симметрия l-го продолжения уравнения $\mathcal{E}$. Отсюда следует также, что для любой инфинитезимальной симметрии X уравнения $\mathcal{E}$ ее l-е поднятие также является симметрией $\mathcal{E}^l$.

Предложение 3.23. *Симметрии формально интегрируемого уравнения $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ совпадают с симметриями любого продолжения этого уравнения. То же самое верно и для инфинитезимальных симметрий.*

Доказательство. Выше мы показали, что любой (инфинитезимальной) симметрии $\mathcal{E}$ соответствует (инфинитезимальная) симметрия $\mathcal{E}^l$. Рассмотрим (инфинитезимальную) симметрию $\mathcal{E}^l$. По теоремам 3.12 на с. 38 и 3.13 на с. 39 она (ее однопараметрическая группа) действует $\pi_{k+l,k}$-послойно и, таким образом, порождает (инфинитезимальную) симметрию уравнения $\mathcal{E}$. $\square$

Доказанный результат означает, что симметрия $\mathcal{E}$ порождает симметрию $\mathcal{E}^\infty$, которая сохраняет всякое продолжение конечного порядка. Естественным шагом к обобщению понятия симметрий является анализ «всех симметрий» $\mathcal{E}^\infty$. Напомним обозначение:

$$\mathcal{C}\mathrm{D}(\pi) = \{\, X \in \mathrm{D}(\pi) \mid X \text{ лежит в } \mathcal{C}(\pi)\,\}$$

(ср. с равенством (3.23) на с. 38).

Определение 3.28. Пусть π — векторное расслоение. Векторное поле $X \in \mathrm{D}(\pi)$ называется *симметрией* распределения Картана $\mathcal{C}(\pi)$ на $J^\infty(\pi)$, если $[X, \mathcal{C}\mathrm{D}(\pi)] \subset \mathcal{C}\mathrm{D}(\pi)$.

Таким образом, множество симметрий совпадает с $\mathrm{D}_\mathcal{C}(\pi)$ (см. равенство (3.24) на с. 38) и образует алгебру Ли над $\mathbb{R}$ и модуль над $\mathcal{F}(\pi)$. Отметим, что поскольку распределение Картана на $J^\infty(\pi)$ интегрируемо, $\mathcal{C}\mathrm{D}(\pi) \subset \mathrm{D}_\mathcal{C}(\pi)$ и, более того, $\mathcal{C}\mathrm{D}(\pi)$ является идеалом в алгебре Ли $\mathrm{D}_\mathcal{C}(\pi)$.

Отметим также, что симметрии, лежащие в $\mathcal{C}\mathrm{D}(\pi)$, касаются всякого интегрального многообразия распределения Картана. Поэтому будем называть такие симметрии *тривиальными*. Соответственно, элементы факторалгебры Ли

$$\mathrm{sym}(\pi) = \mathrm{D}_\mathcal{C}(\pi)/\mathcal{C}\mathrm{D}(\pi)$$

называются *нетривиальными симметриями* распределения Картана на $J^\infty(\pi)$.

Пусть теперь $\mathcal{E}^\infty$ — бесконечное продолжение уравнения $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$. Тогда, поскольку $\mathcal{C}\mathrm{D}(\pi)$ натянуто на поля вида $\mathcal{C}Y$, где $Y \in \mathrm{D}(M)$ (см. замечание 3.4 на с. 41), любое векторное поле из $\mathcal{C}\mathrm{D}(\pi)$ касается $\mathcal{E}^\infty$. Следовательно, либо все элементы класса эквивалентности $[X] = X \bmod \mathcal{C}\mathrm{D}(\pi)$, $X \in \mathrm{D}(\pi)$, касаются уравнения $\mathcal{E}^\infty$, либо ни один из них его не касается. В первом случае говорят, что класс $[X]$ *касается* $\mathcal{E}^\infty$.

Определение 3.29. Элемент $[X] = X \bmod \mathcal{C}\mathrm{D}(\pi)$, $X \in \mathrm{D}(\pi)$ называется *высшей симметрией* уравнения $\mathcal{E}$, если он касается $\mathcal{E}^\infty$.

Множество всех высших симметрий образует алгебру Ли над $\mathbb{R}$ и обозначается через $\mathrm{sym}(\mathcal{E})$. В дальнейшем мы обычно будем опускать прилагательное «высшая».

Рассмотрим векторное поле $X \in \mathrm{D}(\pi)$. Тогда, подставляя X в структурный элемент $U_\mathcal{C}$ (см. равенство (3.35) на с. 43), мы получим поле $X^v \in \mathrm{D}(\pi)$. Соответствие $U_\mathcal{C}\colon X \mapsto X^v = \mathrm{i}_X U_\mathcal{C}$ обладает следующими свойствами:

1) Поле X^v вертикально, т. е. $X^v(C^\infty(M)) = 0$.
2) $X^v = X$ для любого вертикального поля.
3) $X^v = 0$ тогда и только тогда, когда поле X лежит в $\mathcal{C}\mathrm{D}(\pi)$.

Следовательно, мы получаем разложение в прямую сумму $\mathcal{F}(\pi)$-модулей

$$\mathrm{D}(\pi) = \mathrm{D}^v(\pi) \oplus \mathcal{C}\mathrm{D}(\pi),$$

где $\mathrm{D}^v(\pi)$ означает алгебру Ли вертикальных полей. Непосредственным следствием этих свойств служит следующий результат.

Предложение 3.24. *В любом классе эквивалентности $[X] \in \mathrm{sym}(\mathcal{E})$ имеется ровно один вертикальный представитель, и, таким образом,*

$$\mathrm{sym}(\mathcal{E}) = \{\, X \in \mathrm{D}^v(\mathcal{E}) \mid [X, \mathcal{C}\mathrm{D}(\mathcal{E})] \subset \mathcal{C}\mathrm{D}(\mathcal{E})\,\}, \tag{3.43}$$

где $\mathcal{C}\mathrm{D}(\mathcal{E})$ натянуто на поля $\mathcal{C}Y$, $Y \in \mathrm{D}(M)$.

Лемма 3.25. *Пусть $X \in \mathrm{sym}(\pi)$ — вертикальное векторное поле. Тогда оно полностью определяется своим ограничением на $\mathcal{F}_0(\pi) \subset \mathcal{F}(\pi)$.*

Доказательство. Пусть X удовлетворяет условиям леммы и $Y \in \mathrm{D}(M)$. Тогда для любой функции $f \in C^\infty(M)$ имеем

$$[X, \mathcal{C}Y](f) = X(\mathcal{C}Y(f)) - \mathcal{C}Y(X(f)) = X(Y(f)) = 0$$

и, следовательно, коммутатор $[X, \mathcal{C}Y]$ — вертикальное векторное поле. С другой стороны, $[X, \mathcal{C}Y] \in \mathcal{C}\mathrm{D}(\pi)$, так как $\mathcal{C}\mathrm{D}(\pi)$ — идеал в алгебре Ли. Следовательно, $[X, \mathcal{C}Y] = 0$. Заметим, что в специальных координатах справедливы равенства $D_i(u^j_\sigma) = u^j_{\sigma i}$ при всех σ и j. Из вышесказанного следует, что

$$X(u^j_{\sigma i}) = D_i(X(u^j_\sigma)). \tag{3.44}$$

Но вертикальное дифференцирование определяется своими значениями на координатных функциях u^j_σ. □

Пусть теперь $X_0\colon \mathcal{F}_0(\pi) \to \mathcal{F}(\pi)$ — дифференцирование. Тогда равенства (3.44) позволяют локально восстановить вертикальное дифференцирование $X \in \mathrm{D}(\pi)$, удовлетворяющее условию $X\big|_{\mathcal{F}_0(\pi)} = X_0$. Очевидно, что дифференцирование X лежит в $\mathrm{sym}(\pi)$ над рассматриваемой окрестностью. Рассмотрим две окрестности $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2 \subset J^\infty(\pi)$ с соответствующими специальными координатами в каждой из них и две локальные симметрии $X^i \in \mathrm{sym}(\pi\,|_{\mathcal{U}_i})$, $i = 1, 2$, возникающие при помощи описанной процедуры. Поскольку ограничения X^1 и X^2 на $\mathcal{F}_0(\pi\,|_{\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2})$ совпадают, то, по лемме 3.25 на предыдущей странице, поле X^1 совпадает с X^2 над пересечением $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$. Следовательно, процедура восстановления $X_0 \mapsto X$ является глобальной. Так мы установили взаимно-однозначное соответствие между элементами $\mathrm{sym}(\pi)$ и дифференцированиями $\mathcal{F}_0(\pi) \to \mathcal{F}(\pi)$.

Заметим теперь, что благодаря наличию структуры векторного расслоения в $\pi\colon E \to M$ дифференцирования $\mathcal{F}_0(\pi) \to \mathcal{F}(\pi)$ отождествляются с сечениями расслоения $\pi^*_\infty(\pi)$, т. е. с элементами модуля $\mathcal{F}(\pi, \pi)$.

Теорема 3.26. *Пусть $\pi\colon E \to M$ — векторное расслоение. Тогда*:

1) $\mathcal{F}(\pi)$*-модуль* $\mathrm{sym}(\pi)$ *находится во взаимно-однозначном соответствии с элементами модуля* $\mathcal{F}(\pi, \pi)$.
2) *В специальных координатах соответствие* $\mathcal{F}(\pi, \pi) \to \mathrm{sym}(\pi)$ *выражается формулой*

$$\varphi \mapsto \mathcal{Э}_\varphi = \sum_{j,\sigma} D_\sigma(\varphi^j)\frac{\partial}{\partial u^j_\sigma}, \tag{3.45}$$

где $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^m)$ — покомпонентное представление сечения $\varphi \in \mathcal{F}(\pi, \pi)$.

Доказательство. Первая часть теоремы уже доказана. Для доказательства второй части достаточно использовать равенство (3.44). □

Определение 3.30. Пусть $\pi\colon E \to M$ — векторное расслоение.

1) Поле $\mathcal{Э}_\varphi$ вида (3.45) называется *эволюционным векторным полем* на $J^\infty(\pi)$.
2) Сечение $\varphi \in \mathcal{F}(\pi, \pi)$ называется *производящей функцией* поля $\mathcal{Э}_\varphi$.

Замечание 3.5. Пусть $\zeta\colon N \to M$ — произвольное гладкое расслоение и $\xi\colon P \to M$ — векторное расслоение. Тогда легко показать, что любое ζ-вертикальное векторное поле X на N можно единственным образом поднять до такого $\mathbb{R}$-линейного отображения $X^\xi\colon \Gamma(\zeta^*(\xi)) \to \Gamma(\zeta^*(\xi))$, что

$$X^\xi(f\psi) = X(f)\psi + fX^\xi(\psi), \quad f \in C^\infty(N), \quad \psi \in \Gamma(\zeta^*(\xi)). \tag{3.46}$$

В частности, взяв π_∞ вместо ζ, для любого эволюционного векторного поля $\mathcal{Э}_\varphi$ мы получаем семейство отображений $\mathcal{Э}^\xi_\varphi\colon \mathcal{F}(\pi, \xi) \to \mathcal{F}(\pi, \xi)$, удовлетворяющих условиям (3.46).

Рассмотрим отображение $\mathcal{Э}^\pi_\varphi\colon \mathcal{F}(\pi, \pi) \to \mathcal{F}(\pi, \pi)$ и элемент $\rho_0 \in \mathcal{F}_0(\pi, \pi) \subset \mathcal{F}(\pi, \pi)$ (см. пример 3.1 на с. 29). Легко заметить, что

$$\mathcal{Э}^\pi_\varphi(\rho_0) = \varphi, \tag{3.47}$$

и это равенство можно взять за определение производящего сечения.

Пусть $\partial_\varphi, \partial_\psi$ — два эволюционных векторных поля. Тогда, вследствие того, что $\mathrm{sym}(\pi)$ — алгебра Ли, и в силу теоремы 3.26 на предшествующей странице, существует единственное сечение $\{\varphi,\psi\}$, удовлетворяющее условию $[\partial_\varphi, \partial_\psi] = \partial_{\{\varphi,\psi\}}$.

Определение 3.31. Сечение $\{\varphi,\psi\} \in \mathcal{F}(\pi,\pi)$ называется (*высшей*) *скобкой Якоби* сечений $\varphi, \psi \in \mathcal{F}(\pi)$.

Предложение 3.27. *Пусть* φ, $\psi \in \mathcal{F}(\pi,\pi)$ — *два сечения. Тогда*:

1) $\{\varphi,\psi\} = \partial^\pi_\varphi(\psi) - \partial^\pi_\psi(\varphi)$.

2) *В специальных координатах скобка Якоби сечений* φ *и* ψ *выражается формулой*

$$\{\varphi,\psi\}^j = \sum_{\alpha,\sigma}\left(D_\sigma(\varphi^\alpha)\frac{\partial\psi^j}{\partial u^\alpha_\sigma} - D_\sigma(\psi^\alpha)\frac{\partial\varphi^j}{\partial u^\alpha_\sigma}\right), \tag{3.48}$$

где верхний индекс j *означает* j*-ю компоненту соответствующего сечения.*

Доказательство. Для доказательства первого утверждения воспользуемся формулой (3.47) на предыдущей странице:

$$\{\varphi,\psi\} = \partial^\pi_{\{\varphi,\psi\}}(\rho_0) = \partial^\pi_\varphi(\partial^\pi_\psi(\rho_0)) - \partial^\pi_\psi(\partial^\pi_\varphi(\rho_0)) = \partial^\pi_\varphi(\psi) - \partial^\pi_\psi(\varphi).$$

Второе утверждение следует из первого, если воспользоваться равенством (3.45) на предшествующей странице. □

Рассмотрим теперь нелинейный оператор $\Delta\colon \Gamma(\pi) \to \Gamma(\xi)$; пусть $\psi_\Delta \in \mathcal{F}(\pi,\xi)$ — соответствующее сечение. Тогда для любого $\varphi \in \mathcal{F}(\pi,\pi)$ определено сечение $\partial^\xi_\varphi(\psi_\Delta) \in \mathcal{F}(\pi,\xi)$ и можно положить

$$\ell_\Delta(\varphi) = \partial^\xi_\varphi(\psi_\Delta). \tag{3.49}$$

Определение 3.32. Оператор $\ell_\Delta\colon \mathcal{F}(\pi,\pi) \to \mathcal{F}(\pi,\xi)$, заданный равенством (3.49), называется *оператором универсальной линеаризации*[6] оператора $\Delta\colon \Gamma(\pi) \to \Gamma(\xi)$.

Из определения и равенства (3.45) на предшествующей странице мы получаем, что для скалярного дифференциального оператора

$$\Delta\colon \varphi \mapsto F(x_1,\dots,x_n,\dots,\frac{\partial^{|\sigma|}\varphi^j}{\partial x_\sigma},\dots)$$

имеем $\ell_\Delta = (\ell^1_\Delta,\dots,\ell^m_\Delta)$, $m = \dim\pi$, где

$$\ell^\alpha_\Delta = \sum_\sigma \frac{\partial F}{\partial u^\alpha_\sigma} D_\sigma. \tag{3.50}$$

Если $\dim\xi = r > 1$ и $\Delta = (\Delta_1,\dots,\Delta_r)$, то

$$\ell_\Delta = \left\|\ell^\alpha_{\Delta_\beta}\right\|, \quad \alpha = 1,\dots,m, \quad \beta = 1,\dots,r. \tag{3.51}$$

В частности, мы видим, что справедливо следующее утверждение:

Предложение 3.28. *Для любого дифференциального оператора* Δ *его универсальная линеаризация является* $\mathcal{C}$*-дифференциальным оператором.*

Теперь мы можем описать алгебру $\mathrm{sym}(\mathcal{E})$, где $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ — формально интегрируемое уравнение. Пусть $I(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}(\pi)$ — идеал уравнения $\mathcal{E}$ (см. с. 41). Тогда по определению ∂_φ является симметрией уравнения $\mathcal{E}$ в том и только том случае, если

$$\partial_\varphi(I(\mathcal{E})) \subset I(\mathcal{E}). \tag{3.52}$$

Допустим теперь, что $\mathcal{E}$ задано дифференциальным оператором $\Delta\colon \Gamma(\pi) \to \Gamma(\xi)$ и локально описывается системой уравнений $F^1 = 0,\dots,F^r = 0$, $F^j \in \mathcal{F}(\pi)$. Тогда функции $F^1,\dots,F^r$ являются

[6] Ср. с алгебраическим определением на с. 26.

дифференциальными образующими идеала $I(\mathcal{E})$ и условие (3.52) на предыдущей странице можно переписать в виде

$$Э_\varphi(F^j) = \sum_{\alpha,\sigma} a^\alpha_{\sigma,j} D_\sigma(F^\alpha), \quad j = 1,\dots,m, \quad a^\alpha_\sigma \in \mathcal{F}(\pi). \tag{3.53}$$

С помощью равенства (3.49) на предшествующей странице последнее уравнение приобретает вид[7]

$$\ell_{F^j}(\varphi) = \sum_{\alpha,\sigma} a^\alpha_{\sigma,j} D_\sigma(F^\alpha), \quad j = 1,\dots,m, \quad a^\alpha_\sigma \in \mathcal{F}(\pi). \tag{3.54}$$

Однако, согласно предложению 3.28 на предыдущей странице, универсальная линеаризация — это $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор и, следовательно, она может быть ограничена на $\mathcal{E}^\infty$ (см. следствие 3.22 на с. 45). Это означает, что мы можем переписать (3.54) в виде

$$\ell_{F^j}\,|_{\mathcal{E}^\infty}\,(\varphi\,|_{\mathcal{E}^\infty}) = 0, \quad j = 1,\dots,m. \tag{3.55}$$

Объединяя эти уравнения с равенствами (3.50) и (3.51) на предшествующей странице, мы получаем следующий фундаментальный результат:

Т е о р е м а 3.29. *Пусть $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ — формально интегрируемое уравнение и $\Delta = \Delta_\mathcal{E}\colon \Gamma(\pi) \to \Gamma(\xi)$ — оператор, соответствующий уравнению $\mathcal{E}$. Тогда эволюционное векторное поле $Э_\varphi$, $\varphi \in \mathcal{F}(\pi,\pi)$, является симметрией уравнения $\mathcal{E}$ тогда и только тогда, когда*

$$\ell_\mathcal{E}(\bar\varphi) = 0, \tag{3.56}$$

где $\ell_\mathcal{E}$ и $\bar\varphi$ — ограничения ℓ_Δ и φ, соответственно, на $\mathcal{E}^\infty$. Другими словами, $\mathrm{sym}(\mathcal{E}) = \ker \ell_\mathcal{E}$.

У п р а ж н е н и е 3.3. Покажите, что классические симметрии (см. §3.6) вложены в $\mathrm{sym}\,\mathcal{E}$ как подалгебра Ли. Опишите их производящие функции.

З а м е ч а н и е 3.6. Из полученного результата следует, что высшие симметрии уравнения $\mathcal{E}$ можно отождествить с элементами модуля $\mathcal{F}(\mathcal{E},\pi)$, удовлетворяющими уравнению (3.56). Ниже мы будем говорить, что *сечение* $\varphi \in \mathcal{F}(\mathcal{E},\pi)$ *является симметрией* уравнения $\mathcal{E}$, имея в виду это отождествление. Заметим, что вследствие того, что $\mathrm{sym}(\mathcal{E})$ — алгебра Ли, для любых двух симметрий $\varphi,\psi \in \mathcal{F}(\mathcal{E},\pi)$ их скобка Якоби $\{\varphi,\psi\}_\mathcal{E} \in \mathcal{F}(\mathcal{E},\pi)$ корректно определена и также является симметрией. Мы будем опускать индекс $\mathcal{E}$ в обозначении скобки Якоби, если это не ведет к недоразумению.

В заключение мы дадим одно полезное описание модулей $\mathrm{D}^v(\mathcal{E})$ и $\mathcal{C}^k\Lambda(\mathcal{E})$. Введем обозначение $\varkappa = \mathcal{F}(\mathcal{E},\pi)$.

Сначала рассмотрим случай $\mathcal{E}^\infty = J^\infty(\pi)$. Из координатного выражения (3.45) на с. 48 для эволюционного векторного поля немедленно следует, что любое вертикальное касательное поле в точке $\theta \in J^\infty(\pi)$ может быть представлено в виде $Э_\varphi|_\theta$ при некотором φ. Это показывает, что отображение $\varphi \mapsto Э_\varphi$ порождает канонический изоморфизм

$$\mathrm{D}^v(\pi) = \bar{\mathcal{J}}^\infty(\varkappa).$$

Двойственный изоморфизм будет иметь вид:

$$\mathcal{C}^1\Lambda(\pi) = \mathcal{C}\mathrm{Diff}(\varkappa,\mathcal{F}).$$

В координатах этот изоморфизм переводит форму ω^j_σ в оператор

$$(0,\dots,0,D_\sigma,0,\dots,0),$$

с D_σ на j-м месте.

Ясно, что p-формы Картана можно отождествить с полилинейными кососимметрическими $\mathcal{C}$-дифференциальными операторами от p аргументов:

$$\mathcal{C}^p\Lambda(\pi) = \mathcal{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{alt}}_{(p)}(\varkappa,\mathcal{F}).$$

[7]Мы используем обозначение ℓ_F, $F \in \mathcal{F}(\pi,\xi)$, как синоним ℓ_Δ, где $\Delta\colon \Gamma(\pi) \to \Gamma(\xi)$ — оператор, соответствующий сечению F.

Теперь рассмотрим общий случай. Предположим, что уравнение $\mathcal{E}$ задано оператором $\Delta\colon \Gamma(\pi) \to \Gamma(\xi)$. Введем обозначение $P = \mathcal{F}(\mathcal{E}, \xi)$, так что $\ell_{\mathcal{E}}\colon \varkappa \to P$. Из равенства (3.55) на предыдущей странице получаем

Предложение 3.30. *Пусть* $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ *— дифференциальное уравнение. Тогда*:

1) *Модуль* $\mathrm{D}^v(\mathcal{E})$ *изоморфен ядру гомоморфизма* $\psi_{\infty}^{\ell_{\mathcal{E}}}\colon \bar{\mathcal{J}}^{\infty}(\varkappa) \to \bar{\mathcal{J}}^{\infty}(P)$.
2) *Модуль* $\mathcal{C}^p\Lambda(\mathcal{E})$ *изоморфен фактормодулю модуля* $\mathcal{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{alt}}_{(p)}(\varkappa, \mathcal{F})$ *по подмодулю, состоящему из операторов вида* $\nabla \circ \ell_{\mathcal{E}}$, *где* $\nabla \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P, \mathcal{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{alt}}_{(p-1)}(\varkappa, \mathcal{F}))$.

4. Накрытия и нелокальные симметрии

Факты, изложенные в этой главе, составляют формальное основание для введения *нелокальных переменных* в рассматривавшееся до сих пор дифференциальное исчисление, т. е. переменных вида $\int \varphi\, dx$, где φ — функция на бесконечно продолженном уравнении. Детальное изложение этого материала можно найти в [47] и [15].

4.1. **Накрытия.** Начнем с описания ситуации, в которой мы будем работать. Для этого расширим универсум бесконечно продолженных уравнений следующим образом. Пусть $\mathcal{N}$ — цепочка гладких отображений $\ldots \to N^{i+1} \xrightarrow{\tau_{i+1,i}} N^i \to \ldots$, где N^i — гладкие конечномерные многообразия. Определим алгебру $\mathcal{F}(\mathcal{N})$ гладких функций на $\mathcal{N}$ как прямой предел гомоморфизмов $\ldots \to C^\infty(N^i) \xrightarrow{\tau^*_{i+1,i}} C^\infty(N^{i+1}) \to \ldots$. Тогда существуют естественные гомоморфизмы $\tau^*_{\infty,i}\colon C^\infty(N^i) \to \mathcal{F}(\mathcal{N})$, и алгебру $\mathcal{F}(\mathcal{N})$ можно рассматривать как фильтрованную образами этих отображений. Рассмотрим дифференциальное исчисление (см. главу 1) над $\mathcal{F}(\mathcal{N})$, согласованное с этой фильтрацией. Определим категорию *Inf* следующим образом:

1) *Объекты* категории *Inf* — это введенные выше цепочки $\mathcal{N}$, снабженные *интегрируемыми распределениями* $\mathcal{D}_\mathcal{N} \subset \mathrm{D}(\mathcal{F}(\mathcal{N}))$, где слово «интегрируемые» означает, что $[\mathcal{D}_\mathcal{N}, \mathcal{D}_\mathcal{N}] \subset \mathcal{D}_\mathcal{N}$.
2) Если $\mathcal{N}_1 = \{N_1^i, \tau^1_{i+1,i}\}$, $\mathcal{N}_2 = \{N_2^i, \tau^2_{i+1,i}\}$ — два объекта категории *Inf*, то *морфизм* $\varphi\colon \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ — это система гладких отображений $\varphi_i\colon N_1^{i+\alpha} \to N_2^i$, где $\alpha \in \mathbb{Z}$ не зависит от i, удовлетворяющая условиям $\tau^2_{i+1,i} \circ \varphi_{i+1} = \varphi_i \circ \tau^1_{i+\alpha+1,i+\alpha}$ и такая, что $\varphi_{*,\theta}(\mathcal{D}_{\mathcal{N}_1,\theta}) \subset \mathcal{D}_{\mathcal{N}_2,\varphi(\theta)}$ для любой точки $\theta \in \mathcal{N}_1$.

Определение 4.1. Морфизм $\varphi\colon \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ называется *накрытием* в категории *Inf*, если $\varphi_{*,\theta}\big|_{\mathcal{D}_{\mathcal{N}_1,\theta}}\colon \mathcal{D}_{\mathcal{N}_1,\theta} \to \mathcal{D}_{\mathcal{N}_2,\varphi(\theta)}$ — изоморфизм для любой точки $\theta \in \mathcal{N}_1$.

В частности, многообразия $J^\infty(\pi)$ и $\mathcal{E}^\infty$, снабженные соответствующими распределениями Картана, являются объектами категории *Inf*, и можно рассмотреть накрытия над этими объектами.

Пример 4.1. Пусть $\Delta\colon \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi')$ — дифференциальный оператор порядка $\leqslant k$. Тогда система отображений $\Phi^{(l)}_\Delta\colon J^{l+l}(\pi) \to J^l(\pi')$ (см. доказательство леммы 3.3 на с. 29) — это морфизм из $J^\infty(\pi)$ в $J^\infty(\pi')$. При неограничительных условиях регулярности, его образ имеет вид $\mathcal{E}^\infty$ для некоторого уравнения $\mathcal{E}$ в расслоении π', а отображение $J^\infty(\pi) \to \mathcal{E}^\infty$ — накрытие.

Определение 4.2. Пусть $\varphi'\colon \mathcal{N}' \to \mathcal{N}$ и $\varphi''\colon \mathcal{N}'' \to \mathcal{N}$ — два накрытия.

1) Говорят, что морфизм $\psi\colon \mathcal{N}' \to \mathcal{N}''$ — это *морфизм накрытий*, если $\varphi' = \varphi'' \circ \psi$.
2) Накрытия φ', φ'' называются *эквивалентными*, если существует морфизм $\psi\colon \mathcal{N}' \to \mathcal{N}''$, являющийся диффеоморфизмом.

Определение 4.3. Накрытие $\varphi : \mathcal{N}' \to \mathcal{N}$ называется *линейным*, если

1) φ — векторное расслоение;
2) любой элемент $X \in \mathcal{D}(\mathcal{N}')$ сохраняет подмодуль послойно линейных (относительно проекции φ) функций в $\mathcal{F}(\mathcal{N}')$.

Пусть $\mathcal{N}$ — объект категории *Inf* и W — гладкое многообразие. Рассмотрим проекцию $\tau_W : \mathcal{N}\times W \to \mathcal{N}$ на первый сомножитель. Тогда из проекции τ_W можно сделать накрытие, поднимая распределение $\mathcal{D}_\mathcal{N}$ на $\mathcal{N} \times W$ тривиальным способом.

Определение 4.4. Накрытие $\tau\colon \mathcal{N}' \to \mathcal{N}$ называется *тривиальным*, если оно эквивалентно накрытию τ_W при некотором W.

Пусть снова $\varphi'\colon \mathcal{N}' \to \mathcal{N}$, $\varphi''\colon \mathcal{N}'' \to \mathcal{N}$ — два накрытия. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{N}' \times_\mathcal{N} \mathcal{N}'' & \xrightarrow{\varphi''^*(\varphi')} & \mathcal{N}'' \\
{\scriptstyle \varphi'^*(\varphi'')}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \varphi''} \\
\mathcal{N}' & \xrightarrow{\varphi'} & \mathcal{N},
\end{array}$$

где

$$\mathcal{N}' \times_{\mathcal{N}} \mathcal{N}'' = \{ (\theta', \theta'') \in \mathcal{N}' \times \mathcal{N}'' \mid \varphi'(\theta') = \varphi''(\theta'') \},$$

а $\varphi'^*(\varphi'')$, $\varphi''^*(\varphi')$ — естественные проекции. Многообразие $\mathcal{N}' \times_{\mathcal{N}} \mathcal{N}''$ наделяется естественной структурой объекта категории *Inf*, а отображения $(\varphi')^*(\varphi'')$ и $(\varphi'')^*(\varphi')$ становятся накрытиями.

Определение 4.5. Композиция

$$\varphi' \times_{\mathcal{N}} \varphi'' = \varphi' \circ \varphi'^*(\varphi'') = \varphi'' \circ \varphi''^*(\varphi') \colon \mathcal{N}' \times_{\mathcal{N}} \mathcal{N}'' \to \mathcal{N}$$

называется *суммой Уитни* накрытий φ' и φ''.

Определение 4.6. Говорят, что накрытие *приводимо*, если оно эквивалентно накрытию вида $\varphi \times_{\mathcal{N}} \tau$, где τ — тривиальное накрытие. В противном случае оно называется *неприводимым*.

Начиная с этого места, все рассматриваемые накрытия будут предполагаться гладкими расслоениями. Размерность слоя называется *размерностью* рассматриваемого накрытия φ и обозначается $\dim \varphi$.

Предложение 4.1. *Пусть $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ — некоторое уравнение в расслоении $\pi \colon E \to M$ и $\varphi \colon \mathcal{N} \to \mathcal{E}^\infty$ — гладкое расслоение. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) *Расслоение φ снабжено структурой накрытия.*
2) *Существует такая связность $\mathcal{C}^\varphi$ в расслоении $\pi_\infty \circ \varphi \colon \mathcal{N} \to M$, $\mathcal{C}^\varphi \colon X \mapsto X^\varphi$, $X \in \mathrm{D}(M)$, $X^\varphi \in \mathrm{D}(\mathcal{N})$, что*
   а) $[X^\varphi, Y^\varphi] = [X, Y]^\varphi$, *т. е. $\mathcal{C}^\varphi$ — плоская связность, и*
   б) *любое векторное поле X^φ проектируется на $\mathcal{E}^\infty$ при помощи проекции φ_* и $\varphi_*(X^\varphi) = \mathcal{C}X$, где $\mathcal{C}$ — связность Картана на $\mathcal{E}^\infty$.*

Доказательство сводится к проверке определений. □

Теперь, используя этот результат, мы получим координатное описание накрытий. А именно, пусть $x_1, \dots, x_n$, $u^1, \dots, u^m$ — локальные координаты в $J^0(\pi)$; предположим, что в $\mathcal{E}^\infty$ выбраны внутренние координаты. Предположим также, что над рассматриваемой окрестностью расслоение $\varphi \colon \mathcal{N} \to \mathcal{E}^\infty$ тривиально со слоем W, и $w^1, w^2, \dots, w^s, \dots$ — локальные координаты в W. Функции w^j называются *нелокальными координатами* в накрытии φ. Связность $\mathcal{C}^\varphi$ ставит в соответствие каждой частной производной $\partial/\partial x_i$ векторное поле $\mathcal{C}^\varphi(\partial/\partial x_i) = \tilde{D}_i$. Согласно предложению 4.1, эти векторные поля должны иметь вид

$$\tilde{D}_i = D_i + X_i^v = D_i + \sum_\alpha X_i^\alpha \frac{\partial}{\partial w^\alpha}, \quad i = 1, \dots, n, \tag{4.1}$$

где D_i — ограничения полных производных на $\mathcal{E}^\infty$, а также удовлетворять условиям

$$[\tilde{D}_i, \tilde{D}_i] = [D_i, D_j] + [D_i, X_j^v] + [X_i^v, D_j] + [X_i^v, X_j^v] = [D_i, X_j^v] + [X_i^v, D_j] + [X_i^v, X_j^v] = 0 \tag{4.2}$$

для всех $i, j = 1, \dots, n$.

Докажем теперь несколько утверждений, упрощающих проверку тривиальности и эквивалентности накрытий.

Предложение 4.2. *Пусть $\varphi_1 \colon \mathcal{N}_1 \to \mathcal{E}^\infty$ и $\varphi_2 \colon \mathcal{N}_2 \to \mathcal{E}^\infty$ — два накрытия одинаковой размерности $r < \infty$. Они эквивалентны тогда и только тогда, когда существует такое подмногообразие $X \subset \mathcal{N}_1 \times_{\mathcal{E}^\infty} \mathcal{N}_2$, что*

1) $\operatorname{codim} X = r$;
2) *Ограничения $\varphi_1^*(\varphi_2)\,|_X$ и $\varphi_2^*(\varphi_1)\,|_X$ сюръективны*;
3) $(\mathcal{D}_{\mathcal{N}_1 \times_{\mathcal{E}^\infty} \mathcal{N}_2})_\theta \subset T_\theta X$ *для любой точки $\theta \in X$.*

Доказательство. Действительно, если отображение $\psi \colon \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ — эквивалентность, то его график $G_\psi = \{ (y, \psi(y)) \mid y \in \mathcal{N}_1 \}$ есть требуемое многообразие X. Обратно, если X — многообразие, обладающее свойствами 1)–3), то соответствие

$$y \mapsto \varphi_1^*(\varphi_2)\big((\varphi_1^*(\varphi_2))^{-1}(y) \cap X\big)$$

является эквивалентностью. □

Подмногообразия X, удовлетворяющие условию 3) предыдущего предложения, называются *инвариантными*.

Предложение 4.3. *Пусть* $\varphi_1 \colon \mathcal{N}_1 \to \mathcal{E}^\infty$ *и* $\varphi_2 \colon \mathcal{N}_2 \to \mathcal{E}^\infty$ *— два неприводимых накрытия одинаковой размерности* $r < \infty$. *Предположим, что сумма Уитни* φ_1 *и* φ_2 *приводима и существует инвариантное подмногообразие* X *в* $\mathcal{N}_1 \times_{\mathcal{E}^\infty} \mathcal{N}_2$ *коразмерности* r. *Тогда* φ_1 *и* φ_2 *почти всюду эквивалентны.*

Доказательство. Так как φ_1, φ_2 неприводимы, многообразие X должно почти всюду сюръективно отображаться в $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$ соответственно при помощи $\varphi_1^*(\varphi_2)$ и $\varphi_2^*(\varphi_1)$ (иначе их образы были бы инвариантными подмногообразиями). Следовательно, накрытия эквивалентны согласно предложению 4.2 на предшествующей странице. □

Следствие 4.4. *Если* φ_1 *и* φ_2 *— одномерные накрытия над* $\mathcal{E}^\infty$ *и их сумма Уитни приводима, то они эквивалентны.*

Предложение 4.5. *Пусть* $\varphi \colon \mathcal{N} \to \mathcal{E}^\infty$ *— накрытие и* $\mathcal{U} \subset \mathcal{E}^\infty$ *— такая область, что многообразие* $\tilde{\mathcal{U}} = \varphi^{-1}(\mathcal{U})$ *представлено в виде* $\mathcal{U} \times \mathbb{R}^r$, $r \leqslant \infty$, *а* $\varphi|_{\tilde{\mathcal{U}}}$ *— проекция на первый сомножитель. Тогда накрытие* φ *локально неприводимо, если единственными решениями системы*

$$D_1^\varphi(f) = 0, \ldots, D_n^\varphi(f) = 0 \tag{4.3}$$

являются константы.

Доказательство. Предположим, что существует решение $f \neq \mathrm{const}$ системы (4.3). Тогда, вследствие того что все решения системы

$$D_1(f) = 0, \ldots, D_n(f) = 0,$$

где D_i — ограничение i-й полной производной на $\mathcal{E}^\infty$, постоянны, f зависит по меньшей мере от одной нелокальной переменной w^α. Без потери общности можно предположить, что $\partial f/\partial w^1 \neq 0$ в некоторой окрестности $\mathcal{U}' \times V$, $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$, $V \subset \mathbb{R}^r$. Определим диффеоморфизм $\psi \colon \mathcal{U}' \subset \mathcal{U} \to \psi(\mathcal{U}')$, положив

$$\psi(\ldots, x_i, \ldots, p_\sigma^j, \ldots, w^\alpha, \ldots) = (\ldots, x_i, \ldots, p_\sigma^j, \ldots, f, w^2, \ldots, w^\alpha, \ldots).$$

Тогда $\psi_*(D_i^\varphi) = D_i + \sum_{\alpha > 1} X_i^\alpha \partial/\partial w^\alpha$, и, следовательно, φ приводимо.

Пусть теперь φ — приводимое накрытие, т. е. $\varphi = \varphi' \times_{\mathcal{E}^\infty} \tau$, где τ тривиально. Тогда, если f — гладкая функция на тотальном пространстве накрытия τ, то функция $f^* = \big(\tau^*(\varphi')\big)^*(f)$ является решением системы (4.3). Очевидно, что существует такая функция f, что $f^* \neq \mathrm{const}$. □

4.2. **Нелокальные симметрии и тени.** Пусть $\mathcal{N}$ — объект категории *Inf* с интегрируемым распределением $\mathcal{D} = \mathcal{D}_\mathcal{N}$. Определим модуль

$$\mathrm{D}_\mathcal{D}(\mathcal{N}) = \{\, X \in \mathrm{D}(\mathcal{N}) \mid [X, \mathcal{D}] \subset \mathcal{D} \,\}$$

и положим $\mathrm{sym}\,\mathcal{N} = \mathrm{D}_\mathcal{D}(\mathcal{N})/\mathcal{D}_\mathcal{N}$. Очевидно, что $\mathrm{D}_\mathcal{D}(\mathcal{N})$ — $\mathbb{R}$-алгебра Ли и $\mathcal{D}$ — ее идеал. Элементы алгебры Ли $\mathrm{sym}\,\mathcal{N}$ называются *симметриями* объекта $\mathcal{N}$.

Определение 4.7. Пусть $\varphi \colon \mathcal{N} \to \mathcal{E}^\infty$ — накрытие. *Нелокальная φ-симметрия* уравнения $\mathcal{E}$ — это элемент алгебры Ли $\mathrm{sym}\,\mathcal{N}$. Алгебра таких симметрий обозначается через $\mathrm{sym}_\varphi \mathcal{E}$.

Основой для вычисления нелокальных симметрий служат следующие две теоремы.

Теорема 4.6. *Пусть* $\varphi \colon \mathcal{N} \to \mathcal{E}^\infty$ *— накрытие. Алгебра* $\mathrm{sym}_\varphi \mathcal{E}$ *изоморфна алгебре Ли таких векторных полей* X *на* $\mathcal{N}$, *что*

1) X *вертикально, т. е.* $X(\varphi^*(f)) = 0$ *для любой функции* $f \in C^\infty(M) \subset \mathcal{F}(\mathcal{E})$;
2) $[X, D_i^\varphi] = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Заметим, что первое условие означает, что в координатном представлении коэффициенты поля X при всех частных производных $\partial/\partial x_i$ равны нулю. Значит, пересечение множества вертикальных полей с $\mathcal{D}$ тривиально. С другой стороны, в любом классе эквивалентности $[X] \in \mathrm{sym}_\varphi \mathcal{E}$ существует единственный вертикальный элемент X^v. Действительно, пусть X — произвольный элемент из $[X]$. Тогда $X^v = X - \sum_i a_i D_i^\varphi$, где a_i — коэффициент поля X при $\partial/\partial x_i$. □

Теорема 4.7. *Пусть* $\varphi\colon \mathcal{N} = \mathcal{E}^\infty \times \mathbb{R}^r \to \mathcal{E}^\infty$ — *накрытие, локально заданное полями*

$$D_i^\varphi = D_i + \sum_{\alpha=1}^r X_i^\alpha \frac{\partial}{\partial w^\alpha}, \quad i = 1, \dots, n, \quad X_i^\alpha \in \mathcal{F}(\mathcal{N}),$$

где w^1, $w^2, \dots$ — *координаты в* $\mathbb{R}^r$ *(нелокальные переменные). Тогда любая нелокальная* φ*-симметрия уравнения* $\mathcal{E} = \{F = 0\}$ *имеет вид*

$$\tilde{Э}_{\psi,a} = \tilde{Э}_\psi + \sum_{\alpha=1}^r a_\alpha \frac{\partial}{\partial w^\alpha}, \tag{4.4}$$

где $\psi = (\psi^1, \dots, \psi^m)$, $a = (a^1, \dots, a^r)$, ψ^i, $a^\alpha \in \mathcal{F}(\mathcal{N})$ — *функции, удовлетворяющие условиям*

$$\tilde{\ell}_F(\psi) = 0, \tag{4.5}$$

$$\tilde{D}_i(a^\alpha) = \tilde{Э}_{\psi,a}(X_i^\alpha), \tag{4.6}$$

а

$$\tilde{Э}_\psi = \sum_{j,\sigma} \tilde{D}_\sigma(\psi) \frac{\partial}{\partial u_\sigma^j} \tag{4.7}$$

и $\tilde{\ell}_F$ *получается из* ℓ_F *заменой полных производных* D_i *на* D_i^φ.

Доказательство. Пусть $X \in \mathrm{sym}_\varphi \mathcal{E}$. Согласно теореме 4.6 на предыдущей странице поле X можно записать в виде

$$X = {\sum_{\sigma,j}}' b_\sigma^j \frac{\partial}{\partial u_\sigma^j} + \sum_{\alpha=1}^r a^\alpha \frac{\partial}{\partial w^\alpha}, \tag{4.8}$$

где штрих около первого знака суммы означает, что суммирование распространяется только на внутренние координаты в $\mathcal{E}^\infty$. Тогда, приравнивая к нулю коэффициент при $\partial/\partial u_\sigma^j$ в коммутаторе $[X, D_i^\varphi]$, мы получим следующие уравнения:

$$D_i^\varphi(b_\sigma^j) = \begin{cases} b_{\sigma i}^j, & \text{если } b_{\sigma i}^j \text{ — внутренняя координата,} \\ X(u_{\sigma i}^j) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Решая эти уравнения, получим, что первое слагаемое в (4.8) имеет вид $\tilde{Э}_\psi$, где ψ удовлетворяет условию (4.5), а a — условию (4.6). ☐

Сравнивая полученный результат с описанием локальных симметрий (см. теорему 3.29 на с. 50), мы видим, что в нелокальном случае возникает дополнительное препятствие, представленное уравнением (4.6). Так что, вообще говоря, не любое решение уравнения (4.5) соответствует нелокальной φ-симметрии. Мы называем векторные поля $\tilde{Э}_\psi$ вида (4.7), где ψ удовлетворяет уравнению (4.5), φ*-тенями*. В следующем параграфе будет показано, что для любой φ-тени $\tilde{Э}_\psi$ существуют такое накрытие $\varphi'\colon \mathcal{N}' \to \mathcal{N}$ и такая нелокальная $\varphi \circ \varphi'$-симметрия S, что $\varphi'_*(S) = \tilde{Э}_\psi$.

4.3. **Теоремы о восстановлении.** Пусть $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ — дифференциальное уравнение. Установим сначала связь между горизонтальными когомологиями уравнения $\mathcal{E}$ (см. определение 3.27 на с. 45) и накрытиями над $\mathcal{E}^\infty$. Ниже все построения будут ограничиваться локальной картой $\mathcal{U} \subset \mathcal{E}^\infty$.

Рассмотрим горизонтальную 1-форму $\omega = \sum_{i=1}^n X_i\, dx_i \in \bar{\Lambda}^1(\mathcal{E})$ и определим на пространстве $\mathcal{E}^\infty \times \mathbb{R}$ векторные поля

$$D_i^\omega = D_i + X_i \frac{\partial}{\partial w}, \qquad X_i \in \mathcal{F}(\mathcal{E}), \tag{4.9}$$

где w — координата вдоль $\mathbb{R}$. Непосредственные вычисления показывают, что условия $[D_i^\omega, D_j^\omega] = 0$ выполнены тогда и только тогда, когда $\bar{d}\omega = 0$. Таким образом, если $\bar{d}\omega = 0$, (4.9) определяет структуру накрытия в расслоении $\varphi\colon \mathcal{E}^\infty \times \mathbb{R} \to \mathcal{E}^\infty$; это накрытие обозначается φ^ω. Очевидно также, что накрытия φ^ω и $\varphi^{\omega'}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда формы ω и ω' когомологичны, т. е. если $\omega - \omega' = \bar{d}f$ при некотором $f \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$.

Пусть $[\omega_1], \dots, [\omega^\alpha], \dots$ — $\mathbb{R}$-базис векторного пространства $\bar{H}^1(\mathcal{E})$. Определим накрытие $\mathfrak{a}_{1,0}\colon \mathcal{A}^1(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}^\infty$ как сумму Уитни всех накрытий φ^{ω_α}. Можно показать, что класс эквивалентности накрытия $\mathfrak{a}_{1,0}$ не зависит от выбора базиса. Теперь, буквально тем же способом, как это было сделано в определении 3.27 на с. 45 для $\mathcal{E}^\infty$, мы можем определить горизонтальные когомологии для $\mathcal{A}^1(\mathcal{E})$ и построить накрытие $\mathfrak{a}_{2,1}\colon \mathcal{A}^2(\mathcal{E}) \to \mathcal{A}^1(\mathcal{E})$ и т. д.

Определение 4.8. Обратный предел цепочки

$$\dots \to \mathcal{A}^k(\mathcal{E}) \xrightarrow{\mathfrak{a}_{k,k-1}} \mathcal{A}^{k-1}(\mathcal{E}) \to \dots \to \mathcal{A}^1(\mathcal{E}) \xrightarrow{\mathfrak{a}_{1,0}} \mathcal{E}^\infty \tag{4.10}$$

называется *универсальным абелевым накрытием* уравнения $\mathcal{E}$ и обозначается через $\mathfrak{a}\colon \mathcal{A}(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}^\infty$.

Очевидно, что $\bar{H}^1(\mathcal{A}(\mathcal{E})) = 0$.

Теорема 4.8 (см. [17]). *Пусть $\mathfrak{a}\colon \mathcal{A}(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}^\infty$ — универсальное абелево накрытие уравнения $\mathcal{E} = \{F = 0\}$. Тогда любая $\mathfrak{a}$-тень восстанавливается до нелокальной $\mathfrak{a}$-симметрии, т. е. для любого решения $\psi = (\psi^1, \dots, \psi^m)$, $\psi^j \in \mathcal{F}(\mathcal{A}(\mathcal{E}))$, уравнения $\tilde{\ell}_F(\psi) = 0$ существует такое множество функций $a = (a_{\alpha,i})$, где $a_{\alpha,i} \in \mathcal{F}(\mathcal{A}(\mathcal{E}))$, что $\tilde{\mathcal{Э}}_{\psi,a}$ — нелокальная $\mathfrak{a}$-симметрия.*

Доказательство. Пусть $w^{j,\alpha}$, $j \leqslant k$, — нелокальные переменные в $\mathcal{A}^k(\mathcal{E})$. Предположим, что структура накрытия в $\mathfrak{a}$ определяется векторными полями $D_i^{\mathfrak{a}} = D_i + \sum_{j,\alpha} X_i^{j,\alpha}\partial/\partial w^{j,\alpha}$, где, по построению, $X_i^{j,\alpha} \in \mathcal{F}(\mathcal{A}^{j-1}(\mathcal{E}))$, т. е. функции $X_i^{j,\alpha}$ не зависят от $w^{k,\alpha}$ для всех $k \geqslant j$ (Мы полагаем $\mathcal{A}^0(\mathcal{E}) = \mathcal{E}^\infty$).

Нашей целью является доказательство того, что система

$$D_i^{\mathfrak{a}}(a_{j,\alpha}) = \tilde{\mathcal{Э}}_{\psi,a}(X_i^{j,\alpha}) \tag{4.11}$$

разрешима относительно $a = (a_{j,\alpha})$ для любого $\psi \in \ker \tilde{\ell}_F$. Мы сделаем это, используя индукцию по j. Заметим, что

$$[D_i^{\mathfrak{a}}, \tilde{\mathcal{Э}}_{\psi,a}] = \sum_{j,\alpha} \big(D_i^{\mathfrak{a}}(a_{j,\alpha}) - \tilde{\mathcal{Э}}_{\psi,a}(X_i^{j,\alpha})\big)\frac{\partial}{\partial w^{j,\alpha}}$$

для любого множества функций $(a_{j,\alpha})$. Тогда при $j = 1$ имеем $[D_i^{\mathfrak{a}}, \tilde{\mathcal{Э}}_{\psi,a}](X_k^{1,\alpha}) = 0$, или

$$D_i^{\mathfrak{a}}\big(\tilde{\mathcal{Э}}_{\psi,a}(X_k^{1,\alpha})\big) = \tilde{\mathcal{Э}}_{\psi,a}\big(D_i^{\mathfrak{a}}(X_k^{1,\alpha})\big),$$

так как $X_k^{1,\alpha}$ — функции на $\mathcal{E}^\infty$.

Но из построения накрытия $\mathfrak{a}$ следует, что $D_i^{\mathfrak{a}}(X_k^{1,\alpha}) = D_k^{\mathfrak{a}}(X_i^{1,\alpha})$, и, значит, мы получаем

$$D_i^{\mathfrak{a}}\big(\mathcal{Э}_\psi(X_k^{1,\alpha})\big) = D_k^{\mathfrak{a}}\big(\mathcal{Э}_\psi(X_i^{1,\alpha})\big).$$

Заметим, что из равенства $\bar{H}^1(\mathcal{A}(\mathcal{E})) = 0$ следует существование функций $a_{1,\alpha}$, удовлетворяющих условиям

$$D_i^{\mathfrak{a}}(a_{1,\alpha}) = \mathcal{Э}_\psi(X_i^{1,\alpha}),$$

т. е. уравнение (4.11) разрешимо при $j = 1$.

Теперь предположим, что разрешимость системы (4.11) доказана для $j < s$ и ее решениями служат некоторые функции $(a_{1,\alpha}, \dots, a_{j-1,\alpha})$. Тогда, вследствие равенства $[D_i^{\mathfrak{a}}, \tilde{\mathcal{Э}}_{\psi,a}]\big|_{\mathcal{A}^{j-1}(\mathcal{E})} = 0$, мы получаем требуемые функции $a_{j,\alpha}$ буквальным повторением доказательства, проведенного в случае $j = 1$. □

Пусть теперь $\varphi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{E}^\infty$ — произвольное накрытие. Следующая теорема показывает, что любая φ-тень восстановима.

Теорема 4.9 (см. также [37]). *Для любой φ-тени, т. е. для решения $\psi = (\psi^1, \dots, \psi^m)$, $\psi^j \in \mathcal{F}(\mathcal{N})$, уравнения $\tilde{\ell}_F(\psi) = 0$, существуют накрытие $\varphi_\psi\colon \mathcal{N}_\psi \to \mathcal{N} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{E}^\infty$ и φ_ψ-симметрия S_ψ, для которых $S_\psi\,|_{\mathcal{E}^\infty} = \tilde{\mathcal{Э}}_\psi\,|_{\mathcal{E}^\infty}$.*

Доказательство. Пусть накрытие φ локально задается векторными полями

$$D_i^{\varphi} = D_i + \sum_{\alpha=1}^{r} X_i^{\alpha} \frac{\partial}{\partial w^{\alpha}},$$

где $r \leqslant \infty$ — размерность φ. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^{\infty}$ с координатами w_l^{α}, $\alpha = 1, \ldots, r$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, $w_0^{\alpha} = w^{\alpha}$, и положим $\mathcal{N}_{\psi} = \mathcal{N} \times \mathbb{R}^{\infty}$. Введем векторные поля

$$D_i^{\varphi\psi} = D_i + \sum_{l,\alpha} \left(\tilde{\Im}_{\psi} + S_w\right)^l (X_i^{\alpha}) \frac{\partial}{\partial w_l^{\alpha}}, \tag{4.12}$$

где

$$\tilde{\Im}_{\psi} = \sum_{\sigma,k}{}' D_{\sigma}^{\varphi}(\psi^k) \frac{\partial}{\partial u_{\sigma}^k}, \quad S_w = \sum_{\alpha,l} w_{l+1}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial w_l^{\alpha}} \tag{4.13}$$

и штрих у знака суммы, как и раньше, означает суммирование по внутренним координатам.

Пусть $S_{\psi} = \tilde{\Im}_{\psi} + S_w$. Тогда

$$[S_{\psi}, D_i^{\varphi\psi}] = \sum_{\sigma,k}{}' \tilde{\Im}_{\psi}(\bar{u}_{\sigma i}^k) \frac{\partial}{\partial u_{\sigma}^k} + \sum_{l,\alpha} \left(\tilde{\Im}_{\psi} + S_w\right)^{l+1} (X_i^{\alpha}) \frac{\partial}{\partial w_l^{\alpha}} - \sum_{\sigma,k}{}' D_i^{\varphi\psi}(D_{\sigma}^{\varphi}(\psi^k)) \frac{\partial}{\partial u_{\sigma}^k} -$$

$$- \sum_{l,\alpha} \left(\tilde{\Im}_{\psi} + S_w\right)^{l+1} (X_i^{\alpha}) \frac{\partial}{\partial w_l^{\alpha}} = \sum_{\sigma,k}{}' \left(\tilde{\Im}_{\psi}(\bar{u}_{\sigma i}^k) - D_{\sigma i}^{\varphi}(\psi^k)\right) \frac{\partial}{\partial u_{\sigma}^k} = 0.$$

Здесь, по определению, $\bar{u}_{\sigma i}^k = D_i^{\varphi}(u_{\sigma}^k)\,|_{\mathcal{N}}$.

Теперь, благодаря доказанному выше равенству, мы имеем

$$[D_i^{\varphi\psi}, D_j^{\varphi\psi}] = \sum_{l,\alpha} \left(D_j^{\varphi\psi}\big(\tilde{\Im}_{\psi} + S_w\big)^l (X_j^{\alpha}) - D_j^{\varphi\psi}\big(\tilde{\Im}_{\psi} + S_w\big)^l (X_i^{\alpha})\right) \frac{\partial}{\partial w_l^{\alpha}} =$$

$$= \sum_{l,\alpha} \big(\tilde{\Im}_{\psi} + S_w\big)^l \big(D_i^{\varphi\psi}(X_j^{\alpha}) - D_j^{\varphi\psi}(X_i^{\alpha})\big) \frac{\partial}{\partial w_l^{\alpha}} = 0,$$

так как $D_i^{\varphi\psi}(X_j^{\alpha}) - D_j^{\varphi\psi}(X_i^{\alpha}) = D_i^{\varphi}(X_j^{\alpha}) - D_j^{\varphi}(X_i^{\alpha}) = 0$. □

Пусть теперь $\varphi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{E}^{\infty}$ — накрытие и $\varphi'\colon \mathcal{N}' \to \mathcal{N} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{E}^{\infty}$ — другое накрытие. Тогда, по очевидной причине, любая φ-тень ψ является также φ'-тенью. Применяя построения теоремы 4.9 на предыдущей странице к накрытиям φ и φ', мы получаем два накрытия, φ_{ψ} и φ'_{ψ} соответственно.

Лемма 4.10. *Имеет место следующая коммутативная диаграмма из накрытий*:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{N}'_{\psi} & \longrightarrow & \mathcal{N}_{\psi} & & \\
\big\downarrow & & \big\downarrow & & \\
\mathcal{N}' & \longrightarrow & \mathcal{N} & \longrightarrow & \mathcal{E}^{\infty}
\end{array}$$

Более того, если S_{ψ} и S'_{ψ} — соответствующие нелокальные симметрии в $\mathcal{N}_{\psi}$ и $\mathcal{N}'_{\psi}$, построенные согласно теореме 4.9 *на предшествующей странице, то* $S'_{\psi}\Big|_{\mathcal{F}(\mathcal{N}_{\psi})} = S_{\psi}$.

Доказательство. Достаточно сравнить выражения (4.12) и (4.13) для накрытий $\mathcal{N}_{\psi}$ и $\mathcal{N}'_{\psi}$. □

Как следствие теоремы 4.9 на предшествующей странице и предыдущей леммы, мы получаем следующую теорему:

Теорема 4.11. *Пусть $\varphi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{E}^{\infty}$, $\mathcal{E} = \{F = 0\}$, — произвольное накрытие и $\psi_1, \ldots, \psi_s \in \mathcal{F}(\mathcal{N})$ — решения уравнения $\tilde{\ell}_F(\psi) = 0$. Тогда существуют накрытие $\varphi_{\Psi}\colon \mathcal{N}_{\Psi} \to \mathcal{N} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{E}^{\infty}$ и φ_{Ψ}-симметрии $S_{\psi_1}, \ldots, S_{\psi_s}$, для которых $S_{\psi_s}\,|_{\mathcal{E}^{\infty}} = \tilde{\Im}_{\psi_i}\,|_{\mathcal{E}^{\infty}}$, $i = 1, \ldots, s$.*

Доказательство. Рассмотрим сечение ψ_1 и накрытие $\varphi_{\psi_1}\colon \mathcal{N}_{\psi_1} \xrightarrow{\bar{\varphi}_{\psi_1}} \mathcal{N} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{E}^\infty$ вместе с симметрией S_{ψ_1}, построенные в теореме 4.9 на с. 56. Тогда ψ_2 является φ_{ψ_1}-тенью, и можно построить накрытие $\varphi_{\psi_1,\psi_2}\colon \mathcal{N}_{\psi_1,\psi_2} \xrightarrow{\bar{\varphi}_{\psi_1,\psi_2}} \mathcal{N}_{\psi_1} \xrightarrow{\varphi_{\psi_1}} \mathcal{E}^\infty$ с симметрией S_{ψ_2}. Применяя шаг за шагом эту процедуру, мы получаем последовательность накрытий

$$\mathcal{N}_{\psi_1,\dots,\psi_s} \xrightarrow{\bar{\varphi}_{\psi_1,\dots,\psi_s}} \mathcal{N}_{\psi_1,\dots,\psi_{s-1}} \xrightarrow{\bar{\varphi}_{\psi_1,\dots,\psi_{s-1}}} \dots \xrightarrow{\bar{\varphi}_{\psi_1,\psi_2}} \mathcal{N}_{\psi_1} \xrightarrow{\bar{\varphi}_{\psi_1}} \mathcal{N} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{E}^\infty$$

с симметриями $S_{\psi_1},\dots,S_{\psi_s}$. Но ψ_1 является $\varphi_{\psi_1,\dots,\psi_s}$-тенью, и мы можем построить накрытие $\varphi_{\psi_1}\colon \mathcal{N}_{\psi_1}^{(1)} \to \mathcal{N}_{\psi_1,\dots,\psi_s} \to \mathcal{E}^\infty$ с симметрией $S_{\psi_1}^{(1)}$, удовлетворяющей равенству $S_{\psi_1}^{(1)}\Big|_{\mathcal{F}(\mathcal{N}_{\psi_1})} = S_{\psi_1}$ (см. лемму 4.10 на предшествующей странице), и т. д. Переходя к обратному пределу, мы получаем желаемое накрытие $\mathcal{N}_\Psi$. $\square$

В этой главе мы возвращаемся к общей алгебраической ситуации главы 1 и распространяем стандартные конструкции дифференциального исчисления на модули дифференцирований со значениями в дифференциальных формах[8]. Ниже мы определим *скобку Фролихера–Нийенхейса* и построим когомологическую теорию ($\mathcal{C}$-когомологии), ассоциированную с коммутативными алгебрами с *плоскими связностями.* Применяя эту теорию к дифференциальным уравнениям с частными производными, мы получим алгебраическое описание операторов рекурсии для симметрий и опишем эффективные способы вычисления этих операторов. Примеры и описание технических деталей читатель может найти в [39, 43, 42] и [44, 46, 45].

В §6.4 $\mathcal{C}$-когомологии будут обсуждаться в более общем контексте *горизонтальных когомологий с коэффициентами.*

5.1. **Дифференциальное исчисление векторнозначных форм.** Пусть $\Bbbk$ — поле характеристики нуль и A — коммутативная унитарная $\Bbbk$-алгебра. Напомним основные обозначения главы 1:

- $\mathrm{D}(P)$ — модуль P-значных дифференцирований $A \to P$, где P — A-модуль;
- $\mathrm{D}_i(P)$ — модуль P-значных кососимметрических i-дифференцирований. В частности, $\mathrm{D}_1(P) = \mathrm{D}(P)$;
- $\Lambda^i(A)$ — модуль дифференциальных i-форм над алгеброй A;
- $d\colon \Lambda^i(A) \to \Lambda^{i+1}(A)$ — дифференциал де Рама.

Напомним также, что модули $\Lambda^i(A)$ суть представляющие объекты для функторов $\mathrm{D}_i\colon P \Rightarrow \mathrm{D}_i(P)$, т. е. $\mathrm{D}_i(P) = \mathrm{Hom}_A(\Lambda^i(A), P)$. Изоморфизм $\mathrm{D}(P) = \mathrm{Hom}_A(\Lambda^1(A), P)$ может быть определен таким образом: для любого дифференцирования $X\colon A \to P$ существует однозначно определенный гомоморфизм $\varphi^X : \Lambda^1(A) \to P$, удовлетворяющий условию $X = \varphi^X \circ d$. Обозначим через $\langle Z, \omega\rangle \in P$ значение дифференцирования $Z \in \mathrm{D}_i(P)$ на форме $\omega \in \Lambda^i(A)$.

Оба модуля, $\Lambda^*(A) = \bigoplus_{i\geqslant 0} \Lambda^i(A)$ и $\mathrm{D}_*(A) = \bigoplus_{i\geqslant 0} \mathrm{D}_i(A)$, наделены структурами супералгебр относительно операции внешнего произведения $\wedge\colon \Lambda^i(A)\otimes\Lambda^j(A) \to \Lambda^{i+j}(A)$ и $\wedge\colon \mathrm{D}_i(A)\otimes \mathrm{D}_j(A) \to \mathrm{D}_{i+j}(A)$; дифференциал де Рама $d\colon \Lambda^*(A) \to \Lambda^*(A)$ становится дифференцированием в $\Lambda^*(A)$. Заметим также, что $\mathrm{D}_*(P) = \bigoplus_{i\geqslant 0} \mathrm{D}_i(P)$ является $\mathrm{D}_*(A)$-модулем.

Используя спаривание $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ и внешнее произведение, мы определим *внутренне произведение* (или *подстановку*) $\mathrm{i}_X\omega \in \Lambda^{j-i}(A)$: для $X \in \mathrm{D}_i(A)$ и $\omega \in \Lambda^j(A)$, $i \leqslant j$ положим

$$\langle Y, \mathrm{i}_X\omega\rangle = (-1)^{i(j-i)}\langle X \wedge Y, \omega\rangle, \tag{5.1}$$

где Y — произвольный элемент $\mathrm{D}_{j-i}(P)$, P — A-модуль. При $i > j$ мы формально полагаем $\mathrm{i}_X\omega = 0$. Когда $i = 1$, это определение совпадает с определением, данным в главе 1. Напомним, что справедливо следующее равенство:

$$\langle X, da \wedge \omega\rangle = \langle X(a), \omega\rangle, \tag{5.2}$$

где $\omega \in \Lambda^i(A)$, $X \in \mathrm{D}_{i+1}(P)$, $a \in A$ (см. пример 1.4 на с. 12). Используя свойство (5.2), можно показать, что

$$\mathrm{i}_X(\omega \wedge \theta) = \mathrm{i}_X(\omega) \wedge \theta + (-1)^{X\omega}\omega \wedge \mathrm{i}_X(\omega)$$

для любых $\omega, \theta \in \Lambda^*(A)$, где, как и всюду ниже, символ $(-1)^\gamma$, где γ — элемент градуированного модуля, употребляется как синоним $(-1)^{\deg\gamma}$.

Теперь мы определим *производную Ли* формы $\omega \in \Lambda^*(A)$ вдоль $X \in \mathrm{D}_*(A)$:

$$\mathrm{L}_X\omega = \big(\mathrm{i}_X \circ d - (-1)^X d \circ \mathrm{i}_X\big)\omega = [\mathrm{i}_X, d]\omega, \tag{5.3}$$

где скобка $[\cdot\,,\cdot]$ означает суперкоммутатор: если $\Delta, \Delta'\colon \Lambda^*(A) \to \Lambda^*(A)$ — градуированное дифференцирование, то $[\Delta, \Delta'] = \Delta \circ \Delta' - (-1)^{\Delta\Delta'}\Delta' \circ \Delta$. Для $X \in \mathrm{D}(A)$ это определение совпадает с определением (1.9) на с. 12.

[8] Мы будем называть такие дифференцирования *векторнозначными дифференциальными формами.*

Рассмотрим теперь градуированный модуль $\mathrm{D}(\Lambda^*(A))$, состоящий из $\Lambda^*(A)$-значных дифференцирований $A \to \Lambda^*(A)$.[9] Заметим, градуированная структура в $\mathrm{D}(\Lambda^*(A))$ определяется разложением $\mathrm{D}(\Lambda^*(A)) = \bigoplus_{i \geqslant 0} \mathrm{D}(\Lambda^i(A))$ и, таким образом, элементы градуировки i — это такие дифференцирования X, что $\operatorname{im} X \subset \Lambda^i(A)$. Нам понадобятся три алгебраические структуры, ассоциированные с $\mathrm{D}(\Lambda^*(A))$. Во-первых, напомним, что $\mathrm{D}(\Lambda^*(A))$ — градуированный $\Lambda^*(A)$-модуль: для любых $X \in \mathrm{D}(\Lambda^*(A))$, $\omega \in \Lambda^*(A)$ и $a \in A$ мы положим $(\omega \wedge X)a = \omega \wedge X(a)$. Во-вторых, мы можем определить внутреннее произведение $\mathrm{i}_X\omega \in \Lambda^{i+j-1}(A)$ элементов $X \in \mathrm{D}(\Lambda^i(A))$ и $\omega \in \Lambda^j(A)$ следующим образом. Если $j = 0$, мы положим $\mathrm{i}_X\omega = 0$. Далее, используя индукцию по j и тот факт, что $\Lambda^*(A)$ — градуированная A-алгебра, порожденная элементами вида da, $a \in A$, положим

$$\mathrm{i}_X(da \wedge \omega) = X(a) \wedge \omega - (-1)^X da \wedge \mathrm{i}_X(\omega), \quad a \in A. \tag{5.4}$$

Наконец, мы можем определить подстановку элементов из $\mathrm{D}(\Lambda^*(A))$ друг в друга следующим образом:

$$(\mathrm{i}_X Y)a = \mathrm{i}_X(Ya), \quad X, Y \in \mathrm{D}(\Lambda^*(A)), \quad a \in A. \tag{5.5}$$

Три свойства подстановки описаны в следующем предложении.

Предложение 5.1. *Пусть X, $Y \in \mathrm{D}(\Lambda^*(A))$, ω, $\theta \in \Lambda^*(A)$. Тогда выполнены равенства*

$$\mathrm{i}_X(\omega \wedge \theta) = \mathrm{i}_X(\omega) \wedge \theta + (-1)^{\omega(X-1)}\omega \wedge \mathrm{i}_X(\theta), \tag{5.6}$$

$$\mathrm{i}_X(\omega \wedge Y) = \mathrm{i}_X(\omega) \wedge Y + (-1)^{\omega(X-1)}\omega \wedge \mathrm{i}_X(Y), \tag{5.7}$$

$$[\mathrm{i}_X, \mathrm{i}_Y] = \mathrm{i}_{[\![X,Y]\!]^{\mathrm{rn}}}, \tag{5.8}$$

где

$$[\![X, Y]\!]^{\mathrm{rn}} = \mathrm{i}_X(Y) - (-1)^{(X-1)(Y-1)}\mathrm{i}_Y(X). \tag{5.9}$$

Доказательство. Равенство (5.6) очевидным образом следует из (5.4). Доказательство равенства (5.7) использует определение и выражения (5.5), (5.6).

Докажем теперь равенство (5.8). Для этого заметим, что равенство (5.5) достаточно проверить для элементов $\omega \in \Lambda^j(A)$. Проведем индукцию по j. Случай $j = 0$ очевиден. Пусть $a \in A$; тогда получаем

$$[\mathrm{i}_X, \mathrm{i}_Y](da \wedge \omega) = \big(\mathrm{i}_X \circ \mathrm{i}_Y - (-1)^{(X-1)(Y-1)}\mathrm{i}_Y \circ \mathrm{i}_X\big)(da \wedge \omega) = \\ = \mathrm{i}_X(\mathrm{i}_Y(da \wedge \omega)) - (-1)^{(X-1)(Y-1)}\mathrm{i}_Y(\mathrm{i}_X(da \wedge \omega)).$$

Но

$$\mathrm{i}_X(\mathrm{i}_Y(da \wedge \omega)) = \mathrm{i}_X(Y(a) \wedge \omega - (-1)^Y da \wedge \mathrm{i}_Y\omega) = \\ = \mathrm{i}_X(Y(a)) \wedge \omega + (-1)^{(X-1)Y}Y(a) \wedge \mathrm{i}_X\omega - (-1)^Y(X(a) \wedge \mathrm{i}_Y\omega - (-1)^X da \wedge \mathrm{i}_X(\mathrm{i}_Y\omega)),$$

в то время как

$$\mathrm{i}_Y(\mathrm{i}_X(da \wedge \omega) = \mathrm{i}_Y(X(a) \wedge \omega - (-1)^X da \wedge \mathrm{i}_X\omega) = \\ = \mathrm{i}_Y(X(a)) \wedge \omega + (-1)^{X(Y-1)}X(a) \wedge \mathrm{i}_Y\omega - (-1)^X(Y(a) \wedge \omega - (-1)^Y da \wedge \mathrm{i}_Y(\mathrm{i}_X\omega)).$$

Следовательно,

$$[\mathrm{i}_X, \mathrm{i}_Y](da \wedge \omega) = \big(\mathrm{i}_X(Y(a)) - (-1)^{(X-1)(Y-1)}\mathrm{i}_Y(X(a))\big) \wedge \omega + \\ + (-1)^{X+Y} da \wedge \big(\mathrm{i}_X(\mathrm{i}_Y\omega) - (-1)^{(X-1)(Y-1)}\mathrm{i}_Y(\mathrm{i}_X\omega)\big).$$

Но, по определению,

$$\mathrm{i}_X(Y(a)) - (-1)^{(X-1)(Y-1)}\mathrm{i}_Y(X(a)) = (\mathrm{i}_X Y - (-1)^{(X-1)(Y-1)}\mathrm{i}_Y X)(a) = [\![X, Y]\!]^{\mathrm{rn}}(a),$$

[9]Если A — алгебра гладких функций на конечномерном многообразии, то такие дифференцирования отождествляются с векторнозначными дифференциальными формами. Для произвольной алгебры A это, вообще говоря, неверно, но, как было сказано выше, мы по-прежнему будем *называть* такие дифференцирования векторнозначными формами.

тогда как

$$\mathrm{i}_X(\mathrm{i}_Y\omega) - (-1)^{(X-1)(Y-1)}\mathrm{i}_Y(\mathrm{i}_X\omega) = \mathrm{i}_{[\![X,Y]\!]^{\mathrm{rn}}}(\omega)$$

по предположению индукции. $\square$

Определение 5.1. Элемент $[\![X,Y]\!]^{\mathrm{rn}}$, определенный равенством (5.9) на предыдущей странице, называется *скобкой Ричардсона–Нийенхейса* элементов X и Y.

Из предложения 5.1 на предшествующей странице мы получаем следующее

Предложение 5.2. *Для любых дифференцирований* X, Y, $Z \in \mathrm{D}(\Lambda^*(A))$ *и любой формы* $\omega \in \Lambda^*(A)$ *справедливы равенства*

$$[\![X,Y]\!]^{\mathrm{rn}} + (-1)^{(X+1)(Y+1)}[\![Y,X]\!]^{\mathrm{rn}} = 0, \tag{5.10}$$

$$\oint (-1)^{(Y+1)(X+Z)}[\![[\![X,Y]\!]^{\mathrm{rn}}, Z]\!]^{\mathrm{rn}} = 0, \tag{5.11}$$

$$[\![X,\omega\wedge Y]\!]^{\mathrm{rn}} = \mathrm{i}_X(\omega)\wedge Y + (-1)^{(X+1)\omega}\omega\wedge[\![X,Y]\!]^{\mathrm{rn}}. \tag{5.12}$$

Здесь и далее символ $\oint$ означает сумму по циклическим перестановкам.

Замечание 5.1. Заметим, что предложение 5.2 означает, что $\mathrm{D}(\Lambda^*(A))^{\downarrow}$ является алгеброй Герстенхабера относительно скобки Ричардсона–Нийенхейса [38]. Здесь знак $\downarrow$ обозначает сдвиг градуировки на единицу.

По аналогии с определением (5.3) на с. 59 определим производную Ли формы $\omega \in \Lambda^*(A)$ вдоль элемента $X \in \mathrm{D}(\Lambda^*(A))$ по правилу

$$\mathrm{L}_X\omega = (\mathrm{i}_X\circ d + (-1)^X d\circ \mathrm{i}_X)\omega = [\mathrm{i}_X, d]\omega \tag{5.13}$$

(смена знака вызвана тем фактом, что $\deg(\mathrm{i}_X) = \deg(X) - 1$). Из свойств операций i_X и d мы получаем следующее

Предложение 5.3. *Для любых* $X \in \mathrm{D}(\Lambda^*(A))$ *и* $\omega, \theta \in \Lambda^*(A)$ *выполнены следующие тождества*:

$$\mathrm{L}_X(\omega\wedge\theta) = \mathrm{L}_X(\omega)\wedge\theta + (-1)^{X\omega}\omega\wedge\mathrm{L}_X(\theta), \tag{5.14}$$

$$\mathrm{L}_{\omega\wedge X} = \omega\wedge\mathrm{L}_X + (-1)^{\omega+X}d(\omega)\wedge\mathrm{i}_X, \tag{5.15}$$

$$[\mathrm{L}_X, d] = 0. \tag{5.16}$$

Наша главная задача состоит в анализе свойств коммутатора $[\mathrm{L}_X, \mathrm{L}_Y]$ двух производных Ли. Для простоты мы проделаем это для произвольной гладкой алгебры (см. определение 1.9 на с. 15), хотя условие гладкости не является ограничительным.

Предложение 5.4. *Пусть A — гладкая алгебра. Тогда для любых дифференцирований* X, $Y \in \mathrm{D}(\Lambda^*(A))$ *существует однозначно определенный элемент* $[\![X,Y]\!]^{\mathrm{fn}} \in \mathrm{D}(\Lambda^*(A))$, *для которого*

$$[L_X, L_Y] = L_{[\![X,Y]\!]^{\mathrm{fn}}}. \tag{5.17}$$

Доказательство. Для доказательства существования напомним, что в случае гладких алгебр справедливы изоморфизмы

$$\mathrm{D}_i(P) = \mathrm{Hom}_A(\Lambda^i(A), P) = P\otimes_A \mathrm{Hom}_A(\Lambda^i(A), A) = P\otimes_A \mathrm{D}_i(A)$$

для любых A-модулей P и целых $i \geqslant 0$. Используя это отождествление, представим элементы $X, Y \in \mathrm{D}(\Lambda^*(A))$ в виде

$$X = \omega\otimes X' \text{ и } Y = \theta\otimes Y' \text{ для } \omega,\theta\in\Lambda^*(A), \quad X', Y' \in \mathrm{D}(A).$$

Теперь легко проверить, что элемент

$$\begin{aligned} Z = \omega\wedge\theta\otimes[X',Y'] + \omega\wedge\mathrm{L}_{X'}\theta\otimes Y + (-1)^{\omega}d\omega\wedge\mathrm{i}_{X'}\theta\otimes Y' -\\ - (-1)^{\omega\theta}\theta\wedge\mathrm{L}_{Y'}\omega\otimes X' - (-1)^{(\omega+1)\theta}d\theta\wedge\mathrm{i}_{Y'}\omega\otimes X' =\\ = \omega\wedge\theta\otimes[X',Y'] + \mathrm{L}_X\theta\otimes Y' - (-1)^{\omega\theta}\mathrm{L}_Y\omega\otimes X' \end{aligned} \tag{5.18}$$

удовлетворяет равенству (5.17) на предшествующей странице.

Единственность следует из того факта, что $\mathrm{L}_X(a) = X(a)$ для любых $a \in A$. $\square$

Определение 5.2. Элемент $[\![X,Y]\!]^{\mathrm{fn}} \in \mathrm{D}^{i+j}(\Lambda^*(A))$, определенный формулой (5.17) на предыдущей странице называется *скобкой Фролихера–Нийенхейса* элементов $X \in \mathrm{D}^i(\Lambda^*(A))$ и $Y \in \mathrm{D}^j(\Lambda^*(A))$.

Основные свойства этой скобки описаны в следующем предложении.

Предложение 5.5. *Пусть A — гладкая алгебра, X, Y, $Z \in \mathrm{D}(\Lambda^*(A))$ — дифференцирования и $\omega \in \Lambda^*(A)$ — дифференциальная форма. Тогда выполнены следующие тождества*:

$$[\![X,Y]\!]^{\mathrm{fn}} + (-1)^{XY}[\![Y,X]\!]^{\mathrm{fn}} = 0, \tag{5.19}$$

$$\oint (-1)^{Y(X+Z)}[\![X,[\![Y,Z]\!]^{\mathrm{fn}}]\!]^{\mathrm{fn}} = 0, \tag{5.20}$$

$$\mathrm{i}_{[\![X,Y]\!]^{\mathrm{fn}}} = [\mathrm{L}_X, \mathrm{i}_Y] + (-1)^{X(Y+1)}\mathrm{L}_{\mathrm{i}_Y X}, \tag{5.21}$$

$$\mathrm{i}_Z[\![X,Y]\!]^{\mathrm{fn}} = [\![\mathrm{i}_Z X, Y]\!]^{\mathrm{fn}} + (-1)^{X(Z+1)}[\![X,\mathrm{i}_Z Y]\!]^{\mathrm{fn}} + (-1)^X \mathrm{i}_{[\![Z,X]\!]^{\mathrm{fn}}}Y - (-1)^{(X+1)Y}\mathrm{i}_{[\![Z,Y]\!]^{\mathrm{fn}}}X, \tag{5.22}$$

$$[\![X,\omega\wedge Y]\!]^{\mathrm{fn}} = \mathrm{L}_X\omega\wedge Y - (-1)^{(X+1)(Y+\omega)}d\omega\wedge \mathrm{i}_Y X + (-1)^{X\omega}\omega\wedge[\![X,Y]\!]^{\mathrm{fn}}. \tag{5.23}$$

Заметим, что первые два равенства в предыдущем предложении означают, что модуль $\mathrm{D}(\Lambda^*(A))$ является супералгеброй Ли относительно скобки Фролихера–Нийенхейса.

Замечание 5.2. Приведенная выше алгебраическая схема имеет геометрическую реализацию, если взять $A = C^\infty(M)$, где M — гладкое конечномерное многообразие. Алгебра $A = C^\infty(M)$ в этом случае будет гладкой. Однако, в геометрической теории дифференциальных уравнений мы имеем дело бесконечномерными многообразиями,[10] имеющими вид $N = \varprojlim_{\{\pi_{k+1,k}\}} N_k$, где все отображения $\pi_{k+1,k}\colon N_{k+1} \to N_k$ являются конечномерными гладкими многообразиями. Соответствующий алгебраический объект — это фильтрованная алгебра $A = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} A_k$, $A_k \subset A_{k+1}$, где все A_k — подалгебры в A. Как уже было замечено, замкнутое дифференциальное исчисление над A строится, если рассматривать категорию всех фильтрованных A-модулей с фильтрованными гомоморфизмами в качестве морфизмов между ними. Тогда все функторы дифференциального исчисления в этой категории становятся фильтрованными, как и их представляющие объекты.

В частности, A-модули $\Lambda^i(A)$ фильтрованы A_k-модулями $\Lambda^i(A_k)$. Будем говорит, что алгебра A *финитно гладкая*, если $\Lambda^1(A_k)$ является проективным A_k-модулем конечного типа для любого $k \in \mathbb{Z}$. Для финитно гладких алгебр элементы модулей $\mathrm{D}(P)$ можно представлять как такие формальные бесконечные суммы вида $\sum_k p_k \otimes X_k$, что любая конечная сумма $S_n = \sum_{k\leqslant n} p_k\otimes X_k$ является дифференцированием $A_n \to P_{n+s}$ для некоторого фиксированного $s \in \mathbb{Z}$. Любое дифференцирование X однозначно определяется системой $\{S_n\}$, и поэтому утверждения предложений 5.4 на предшествующей странице и 5.5 остаются справедливыми.

5.2. Алгебры с плоскими связностями и когомологии. Теперь мы введем второй из интересующих нас объектов. Пусть A — $\Bbbk$-алгебра, где $\Bbbk$ — поле нулевой характеристики, и B — алгебра над A. Мы будем предполагать, что соответствующий гомоморфизм $\varphi\colon A \to B$ — вложение. Пусть P — B-модуль; тогда он также является и A-модулем. Рассмотрим B-модуль $\mathrm{D}(A,P)$, состоящий из P-значных дифференцирований $A \to P$.

Определение 5.3. Пусть $\nabla^\bullet\colon \mathrm{D}(A,\cdot) \Rightarrow \mathrm{D}(\cdot)$ — естественное преобразование функторов $\mathrm{D}(A,\cdot)\colon P \Rightarrow \mathrm{D}(A,P)$ и $\mathrm{D}(\cdot)\colon P \Rightarrow \mathrm{D}(P)$ в категории B-модулей, т. е. такая система гомоморфизмов $\nabla^P\colon \mathrm{D}(A,P) \to \mathrm{D}(P)$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{D}(A,P) & \xrightarrow{\nabla^P} & \mathrm{D}(P) \\ {\scriptstyle \mathrm{D}(A,f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{D}(f)} \\ \mathrm{D}(A,Q) & \xrightarrow{\nabla^Q} & \mathrm{D}(Q) \end{array}$$

[10] Бесконечные джеты, бесконечные продолжения дифференциальных уравнений, тотальные пространства накрытий и т. д.

коммутативна для любого B-гомоморфизма $f\colon P \to Q$. Мы скажем, что $\nabla^\bullet$ — *связность* в тройке (A, B, φ), если $\nabla^P(X)\,|_A = X$ для любого $X \in \mathrm{D}(A, P)$.

Здесь и далее мы используем обозначение $Y\,|_A = Y \circ \varphi$ для любого $Y \in \mathrm{D}(P)$.

Замечание 5.3. Если $A = C^\infty(M)$, $B = C^\infty(E)$, $\varphi = \pi^*$, где M и E — гладкие многообразия и $\pi\colon E \to M$ — гладкое расслоение, то определение 5.3 на предшествующей странице сводится к обычному определению связности в расслоении π. Действительно, если мы имеем связность $\nabla^\bullet$ в смысле определения 5.3 на предыдущей странице, то соответствие

$$\mathrm{D}(A) \hookrightarrow \mathrm{D}(A, B) \xrightarrow{\nabla^B} \mathrm{D}(B)$$

позволяет поднять любое векторное поле на M до поля на E, которое проектируется в исходное с помощью отображения π. Обратно, если ∇ — такое соответствие, то мы можем построить естественное преобразование $\nabla^\bullet$ функторов $\mathrm{D}(A, \cdot)$ и $\mathrm{D}(\cdot)$ благодаря тому, что для любых конечномерных многообразий и произвольного B-модуля P имеют место имеют место изоморфизмы $\mathrm{D}(A, P) = P \otimes_A \mathrm{D}(A)$ и $\mathrm{D}(P) = P \otimes_B \mathrm{D}(A)$. В дальнейшем мы используем обозначение $\nabla = \nabla^B$.

Определение 5.4. Пусть $\nabla^\bullet$ — связность в (A, B, φ) и $X, Y \in \mathrm{D}(A, B)$ — дифференцирования. *Форма кривизны* связности $\nabla^\bullet$ на паре X, Y определяется по формуле

$$R_\nabla(X, Y) = [\nabla(X), \nabla(Y)] - \nabla(\nabla(X) \circ Y - \nabla(Y) \circ X). \tag{5.24}$$

Заметим, что (5.24) имеет смысл, поскольку $\nabla(X) \circ Y - \nabla(Y) \circ X$ — B-значное дифференцирование алгебры A.

Рассмотрим теперь дифференциал де Рама $d = d_B\colon B \to \Lambda^1(B)$. Тогда композиция $d_B \circ \varphi\colon A \to \Lambda^1(B)$ является дифференцированием. Следовательно, мы можем рассмотреть дифференцирование $\nabla(d_B \circ \varphi) \in \mathrm{D}(\Lambda^1(B))$.

Определение 5.5. Элемент $U_\nabla \in \mathrm{D}(\Lambda^1(B))$, определенный по формуле

$$U_\nabla = \nabla(d_B \circ \varphi) - d_B \tag{5.25}$$

называется *формой связности.*

Из этого определения мы немедленно получаем следующий результат:

Лемма 5.6. *Для любого $X \in \mathrm{D}(B)$ справедливо равенство*

$$\mathrm{i}_X(U_\nabla) = X - \nabla(X\,|_A) \tag{5.26}$$

Теперь, используя этот результат, мы докажем

Предложение 5.7. *Если B — гладкая алгебра, то*

$$\mathrm{i}_Y \mathrm{i}_X [\![U_\nabla, U_\nabla]\!]^{\mathrm{fn}} = 2R_\nabla(X\,|_A\,, Y\,|_A) \tag{5.27}$$

для любых X, $Y \in \mathrm{D}(B)$.

Доказательство. Во первых, заметим, что $\deg U_\nabla = 1$. Тогда, используя равенства (5.22) и (5.19) на предыдущей странице, мы получаем

$$\begin{aligned}\mathrm{i}_X [\![U_\nabla, U_\nabla]\!]^{\mathrm{fn}} = [\![\mathrm{i}_X U_\nabla, U_\nabla]\!]^{\mathrm{fn}} + [\![U_\nabla, \mathrm{i}_X U_\nabla]\!]^{\mathrm{fn}} - \mathrm{i}_{[\![X, U_\nabla]\!]^{\mathrm{fn}}} U_\nabla - \mathrm{i}_{[\![X, U_\nabla]\!]^{\mathrm{fn}}} U_\nabla = \\ = 2\big([\![\mathrm{i}_X U_\nabla, U_\nabla]\!]^{\mathrm{fn}} - \mathrm{i}_{[\![X, U_\nabla]\!]^{\mathrm{fn}}} U_\nabla\big).\end{aligned}$$

Применяя i_Y к последнему выражению и используя равенства (5.20) и (5.22) на предшествующей странице, мы получаем

$$\mathrm{i}_Y \mathrm{i}_X [\![U_\nabla, U_\nabla]\!]^{\mathrm{fn}} = 2\big([\![\mathrm{i}_X U_\nabla, \mathrm{i}_Y U_\nabla]\!]^{\mathrm{fn}} - \mathrm{i}_{[\![X, Y]\!]^{\mathrm{fn}}} U_\nabla\big).$$

Но $[\![V, W]\!]^{\mathrm{fn}} = [V, W]$ для любых $V, W \in \mathrm{D}(\Lambda^0(A)) = \mathrm{D}(A)$. Следовательно, из (5.26) мы имеем

$$\mathrm{i}_Y \mathrm{i}_X [\![U_\nabla, U_\nabla]\!]^{\mathrm{fn}} = 2([X - \nabla(X\,|_A), Y - \nabla(Y\,|_A)] - ([X, Y] - \nabla([X, Y]\,|_A))).$$

Наконец, заметим, что $\nabla(X\,|_A)\,|_A = X\,|_A$ и $[X, Y]\,|_A = X \circ Y\,|_A - Y \circ X\,|_A$. $\square$

Определение 5.6. Связность ∇ в (A, B, φ) называется *плоской*, если $R_\nabla = 0$.

Таким образом, для любой плоской связности мы имеем

$$[\![U_\nabla, U_\nabla]\!]^{\mathrm{fn}} = 0. \tag{5.28}$$

Пусть $U \in \mathrm{D}(\Lambda^1(B))$ — элемент, удовлетворяющий условию (5.28). Тогда из градуированного тождества Якоби (5.20) на с. 62 мы получаем, что $2[\![U, [\![U, X]\!]^{\mathrm{fn}}]\!]^{\mathrm{fn}} = [\![[\![U, U]\!]^{\mathrm{fn}}, X]\!]^{\mathrm{fn}} = 0$ для любого дифференцирования $X \in \mathrm{D}(\Lambda^*(A))$. Следовательно, оператор $\partial_U = [\![U, \cdot]\!]^{\mathrm{fn}} \colon \mathrm{D}(\Lambda^i(B)) \to \mathrm{D}(\Lambda^{i+1}(B))$, определяемый равенством $\partial_U(X) = [\![U, X]\!]^{\mathrm{fn}}$, обладает свойством $\partial_U \circ \partial_U = 0$.

Рассмотрим теперь случай $U = U_\nabla$, где ∇ — плоская связность.

Определение 5.7. Элемент $X \in \mathrm{D}(\Lambda^*(B))$ называется *вертикальным*, если $X(a) = 0$ для любого $a \in A$. Обозначим B-подмодуль таких элементов через $\mathrm{D}^v(\Lambda^*(B))$.

Лемма 5.8. *Пусть ∇ — связность в (A, B, φ). Тогда*

1) *элемент $X \in \mathrm{D}(\Lambda^*(B))$ является вертикальным, тогда и только тогда, когда $\mathrm{i}_X U_\nabla = X$;*
2) *форма связности U_∇ является вертикальным элементом: $U_\nabla \in \mathrm{D}^v(\Lambda^1(B))$;*
3) *отображение ∂_{U_∇} сохраняет вертикальность, т. е. имеют место вложения*

$$\partial_{U_\nabla}(\mathrm{D}^v(\Lambda^i(B))) \subset \mathrm{D}^v(\Lambda^{i+1}(B)).$$

Доказательство. Для доказательства 1) воспользуемся леммой 5.6 на предшествующей странице: из равенства (5.26) на предыдущей странице следует, что $\mathrm{i}_X U_\nabla = X$ тогда и только тогда, когда $\nabla(X\,|_A) = 0$. Но $\nabla(X\,|_A)\,|_A = X\,|_A$. Второе утверждение следует из той же леммы и из первого утверждения:

$$\mathrm{i}_{U_\nabla} U_\nabla = U_\nabla - \nabla(U_\nabla\,|_A) = U_\nabla - \nabla((U_\nabla - \nabla(U_\nabla\,|_A))\,|_A) = U_\nabla.$$

Наконец, 3) следует из (5.22) на с. 62. ☐

Определение 5.8. Обозначим ограничение $\partial_{U_\nabla}\big|_{\mathrm{D}^v(\Lambda^*(A))}$ через ∂_∇ и назовем комплекс

$$0 \to \mathrm{D}^v(B) \xrightarrow{\partial_\nabla} \mathrm{D}^v(\Lambda^1(B)) \to \ldots \to \mathrm{D}^v(\Lambda^i(B)) \xrightarrow{\partial_\nabla} \mathrm{D}^v(\Lambda^{i+1}(B)) \to \ldots \tag{5.29}$$

∇-*комплексом* тройки (A, B, φ). Соответствующие когомологии обозначаются $H^*_\nabla(B; A, \varphi) = \bigoplus_{i \geqslant 0} H^i_\nabla(B; A, \varphi)$ и называются ∇-*когомологиями* тройки (A, B, φ).

Введем обозначение

$$d^v_\nabla = \mathrm{L}_{U_\nabla} \colon \Lambda^i(B) \to \Lambda^{i+1}(B). \tag{5.30}$$

Предложение 5.9. *Пусть ∇ — плоская связность в тройке (A, B, φ) и B — гладкая (или финитно гладкая) алгебра. Тогда для любых X, $Y \in \mathrm{D}^v(\Lambda^*(A))$ и $\omega \in \Lambda^*(A)$ выполнены равенства*

$$\partial_\nabla [\![X, Y]\!]^{\mathrm{fn}} = [\![\partial_\nabla X, Y]\!]^{\mathrm{fn}} + (-1)^X [\![X, \partial_\nabla Y]\!]^{\mathrm{fn}}, \tag{5.31}$$

$$[\mathrm{i}_X, \partial_\nabla] = (-1)^X \mathrm{i}_{\partial_\nabla X}, \tag{5.32}$$

$$\partial_\nabla(\omega \wedge X) = (d^v_\nabla - d)(\omega) \wedge X + (-1)^\omega \omega \wedge \partial_\nabla X, \tag{5.33}$$

$$[d^v_\nabla, \mathrm{i}_X] = \mathrm{i}_{\partial_\nabla X} + (-1)^X \mathrm{L}_X. \tag{5.34}$$

Доказательство. Равенство (5.31) непосредственно следует из (5.20) на с. 62. Равенство (5.32) следует из (5.22) на с. 62. Равенство (5.33) следует из (5.23) на с. 62 и (5.26) на предыдущей странице. Наконец, (5.34) получается из (5.21) на с. 62. ☐

Следствие 5.10. *Модуль когомологий $H^*_\nabla(B; A, \varphi)$ наследует операцию подстановки и структуру градуированной алгебры Ли относительно скобки Фролихера–Нийенхейса $[\![\cdot\,, \cdot]\!]^{\mathrm{fn}}$.*

Доказательство. Заметим, что $\mathrm{D}^v(\Lambda^*(A))$ замкнут относительно скобки Фролихера–Нийенхейса: для доказательства этого факта достаточно применить тождество (5.22) на с. 62. Тогда первое утверждение следует из (5.32), а второе — из (5.31). ☐

З а м е ч а н и е 5.4. Мы сохраняем обозначения для структур, наследуемых когомологиями. Заметим, в частности, что $H^0_\nabla(B; A, \varphi)$ — алгебра Ли относительно скобки Фролихера–Нийенхейса (которая в этом случае сводится к обычной скобке Ли). Кроме того, $H^1_\nabla(B; A, \varphi)$ — ассоциативная алгебра относительно операции подстановки, а действие

$$\mathcal{R}_\Omega\colon X \mapsto \mathrm{i}_X\Omega, \quad X \in H^0_\nabla(B; A, \varphi), \quad \Omega \in H^1_\nabla(B; A, \varphi)$$

— представление этой алгебры в алгебре эндоморфизмов модуля $H^0_\nabla(B; A, \varphi)$.

Рассмотрим теперь отображение $d^v_\nabla\colon \Lambda^*(B) \to \Lambda^*(B)$, определенное равенством (5.30) на предыдущей странице и определим оператор $d^h_\nabla = d_B - d^v_\nabla$.

П р е д л о ж е н и е 5.11. *Пусть B — (финитно) гладкая алгебра и ∇ — плоская связность в тройке $(B; A, \varphi)$. Тогда*

1) *Пара (d^h_∇, d^v_∇) порождает бикомплекс, т. е.*

$$d^v_\nabla \circ d^v_\nabla = 0, \quad d^h_\nabla \circ d^h_\nabla = 0, \quad d^h_\nabla \circ d^v_\nabla + d^v_\nabla \circ d^h_\nabla = 0. \tag{5.35}$$

2) *Дифференциал d^h_∇ обладает следующими свойствами*

$$[d^h_\nabla, \mathrm{i}_X] = -\mathrm{i}_{\partial_\nabla X}, \tag{5.36}$$

$$\partial_\nabla(\omega \wedge X) = -d^h_\nabla(\omega) \wedge X + (-1)^\omega \omega \wedge \partial_\nabla X, \tag{5.37}$$

где $\omega \in \Lambda^*(B)$, $X \in \mathrm{D}^v(\Lambda^*(B))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Так как $\deg d^v_\nabla = 1$, мы получаем

$$2d^v_\nabla \circ d^v_\nabla = [d^v_\nabla, d^v_\nabla] = [\mathrm{L}_{U_\nabla}, \mathrm{L}_{U_\nabla}] = \mathrm{L}_{[\![U_\nabla, U_\nabla]\!]^{\mathrm{fn}}} = 0.$$

Так как $d^v_\nabla = \mathrm{L}_{U_\nabla}$, справедливо тождество $[d_B, d^v_\nabla] = 0$ (см. (5.16) на с. 61), и это заканчивает доказательство первой части.

2) Для доказательства (5.36) заметим, что

$$[d^h_\nabla, \mathrm{i}_X] = [d_B - d^h_\nabla, \mathrm{i}_X] = (-1)^X \mathrm{L}_X - [d^v_\nabla, \mathrm{i}_X],$$

и (5.36) следует из (5.34) на предыдущей странице. Наконец, (5.37) есть равенство (5.33) на предыдущей странице, переписанное в другой форме. □

О п р е д е л е н и е 5.9. Пусть ∇ — связность в тройке (A, B, φ).

1) Бикомплекс $(B, d^h_\nabla, d^v_\nabla)$ называется *вариационным бикомплексом*, ассоциированным со связностью ∇.
2) Соответствующая спектральная последовательность называется ∇-*спектральной последовательностью* тройки (A, B, φ).

Очевидно, что ∇-спектральная последовательность сходится к когомологиям де Рама алгебры B.

В заключение этого параграфа заметим следующее. Так как модуль $\Lambda^1(B)$ порожден образом оператора $d_B\colon B \to \Lambda^1(B)$, тогда как градуированная алгебра $\Lambda^*(B)$ порождена элементами модуля $\Lambda^1(B)$, имеет место разложение в прямую сумму

$$\Lambda^*(B) = \bigoplus_{i\geqslant 0} \bigoplus_{p+q=i} \Lambda^p_v(B) \otimes \Lambda^q_h(B),$$

где

$$\Lambda^p_v(B) = \underbrace{\Lambda^1_v(B) \wedge \ldots \wedge \Lambda^1_v(B)}_{p \text{ экземпляров}}, \quad \Lambda^q_h(B) = \underbrace{\Lambda^1_h(B) \wedge \ldots \wedge \Lambda^1_h(B)}_{q \text{ экземпляров}},$$

а подмодули $\Lambda^1_v(B) \subset \Lambda^1(B)$ и $\Lambda^1_h(B) \subset \Lambda^1(B)$ порождены в $\Lambda^1(B)$ образами дифференциалов d^v_∇ и d^h_∇ соответственно. Очевидно, что мы имеем следующие вложения:

$$d^h_\nabla\left(\Lambda^p_v(B) \otimes \Lambda^q_h(B)\right) \subset \Lambda^p_v(B) \otimes \Lambda^{q+1}_h(B),$$
$$d^v_\nabla\left(\Lambda^p_v(B) \otimes \Lambda^q_h(B)\right) \subset \Lambda^{p+1}_v(B) \otimes \Lambda^q_h(B).$$

Обозначим через $\mathrm{D}^{p,q}(B)$ модуль $\mathrm{D}^v(\Lambda_v^p(B) \otimes \Lambda_h^q(B))$. Тогда, очевидно, $\mathrm{D}^v(B) = \bigoplus_{i\geqslant 0}\bigoplus_{p+q=i}\mathrm{D}^{p,q}(B)$, и из равенств (5.36) и (5.37) на предшествующей странице следует, что

$$\partial_\nabla(\mathrm{D}^{p,q}(B)) \subset \mathrm{D}^{p,q+1}(B).$$

Следовательно, модуль $H^*_\nabla(B;A,\varphi)$ представляется в виде прямой суммы

$$H^*_\nabla(B;A,\varphi) = \bigoplus_{i\geqslant 0}\bigoplus_{p+q=i} H^{p,q}_\nabla(B;A,\varphi), \tag{5.38}$$

где смысл обозначения $H^{p,q}_\nabla(B;A,\varphi)$ очевиден.

5.3. **Применение к дифференциальным уравнениям: операторы рекурсии.** Теперь мы применим полученные выше алгебраические результаты к бесконечно продолженным дифференциальным уравнениям. Начнем с установления соответствия между геометрическими конструкциями главы 3 и алгебраической схемой, представленной в двух предыдущих параграфах.

Пусть $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ — формально интегрируемое уравнение (см. определение 3.20 на с. 41) и $\mathcal{E}^\infty \subset J^\infty(\pi)$ — его бесконечное продолжение. Тогда расслоение $\pi_\infty : \mathcal{E}^\infty \to M$ наделено связностью Картана $\mathcal{C}$ (определение 3.23 на с. 43), и эта связность — плоская (утверждение 3.19 на с. 43). Таким образом, тройка

$$\big(A = C^\infty(M),\ B = \mathcal{F}(\mathcal{E}),\ \varphi = \pi_\infty^*\big)$$

с $\nabla = \mathcal{C}$ — это алгебра с плоской связностью, причем A — гладкая, а B — финитно гладкая алгебры. Соответствующая форма связности является в точности структурным элементом $U_\mathcal{C}$ уравнения $\mathcal{E}$ (см. определение 3.24 на с. 43).

Таким образом, с любым формально интегрируемым уравнением $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ мы можем связать комплекс

$$0 \to \mathrm{D}^v(\mathcal{E}) \xrightarrow{\partial_\mathcal{C}} \mathrm{D}^v(\Lambda^1(\mathcal{E})) \to \ldots \to \mathrm{D}^v(\Lambda^i(\mathcal{E})) \xrightarrow{\partial_\mathcal{C}} \mathrm{D}^v(\Lambda^{i+1}(\mathcal{E})) \to \ldots \tag{5.39}$$

и соответствующую теорию когомологий, определяемую связностью Картана. Мы обозначим возникающие таким образом модули когомологий через $H^*_\mathcal{C}(\mathcal{E}) = \bigoplus_{i\geqslant 0} H^i_\mathcal{C}(\mathcal{E})$. В случае «пустого» уравнения ($\mathcal{E}^\infty = J^\infty(\pi)$) мы используем обозначение $H^*_\mathcal{C}(\pi) = \bigoplus_{i\geqslant 0} H^i_\mathcal{C}(\pi)$.

Определение 5.10. Пусть $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ — формально интегрируемое уравнение и $\mathcal{C}$ — связность Картана в расслоении $\pi_\infty\colon \mathcal{E}^\infty \to M$. Тогда модуль $H^*_\mathcal{C}(\mathcal{E})$ называется $\mathcal{C}$-*когомологиями* уравнения $\mathcal{E}$.

Замечание 5.5. Заметим, что введенные выше модули $\Lambda_h^q(B)$ совпадают с модулями $\bar\Lambda^q(\mathcal{E})$ горизонтальных q-форм на $\mathcal{E}^\infty$, модули $\Lambda_v^p(B)$ совпадают с модулями картановских форм $\mathcal{C}^p\Lambda(\mathcal{E})$, дифференциал d^h_∇ является горизонтальным дифференциалом де Рама $\bar d$, а d^v_∇ — дифференциалом Картана $d_\mathcal{C}$ (ср. с конструкциями на с. 45–46). Таким образом, мы опять получили полное соответствие между алгебраическим и геометрическим подходами. В частности, ∇-спектральная последовательность (определение 5.9 на предыдущей странице) — это $\mathcal{C}$-спектральная последовательность Виноградова (см. главу 7).

Следующий результат содержит интерпретацию первых двух групп $\mathcal{C}$-когомологий.

Теорема 5.12. *Для любого формально интегрируемого уравнения $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ справедливы следующие утверждения*:

1) *Модуль $H^0_\mathcal{C}(\mathcal{E})$ как алгебра Ли изоморфен алгебре Ли $\operatorname{sym}\mathcal{E}$ высших симметрий*[11] *уравнения $\mathcal{E}$.*
2) *Модуль $H^1_\mathcal{C}(\mathcal{E})$ совпадает с множеством классов эквивалентности нетривиальных вертикальных деформаций структуры уравнения (т. е. структурного элемента) на $\mathcal{E}$.*

[11] См. определение 3.29 на с. 47.

Доказательство. Для доказательства первого утверждения рассмотрим вертикальное векторное поле $Y \in \mathrm{D}^v(\mathcal{E})$ и произвольное поле $Z \in \mathrm{D}(\mathcal{E})$. Тогда из (5.22) на с. 62 получаем

$$\mathrm{i}_Z \partial_{\mathcal{C}} Y = \mathrm{i}_Z [\![U_{\mathcal{C}}, Y]\!]^{\mathrm{fn}} = [\mathrm{i}_Z U_{\mathcal{C}}, Y] - \mathrm{i}_{[Z,Y]} U_{\mathcal{C}} = [Z^v, Y] - [Z, Y]^v = [Z^v - Z, Y]^v,$$

где $Z^v = \mathrm{i}_Z U_{\mathcal{C}}$. Следовательно, $\partial_{\mathcal{C}} Y = 0$ тогда и только тогда, когда $[Z - Z^v, Y]^v = 0$ для любого $Z \in \mathrm{D}(\mathcal{E})$. Но последнее равенство верно в том и только том случае, если $[\mathcal{C}X, Y] = 0$ для любого $X \in \mathrm{D}(M)$, что означает, что

$$\ker\left(\partial_{\mathcal{C}} \colon \mathrm{D}^v(\mathcal{E}) \to \mathrm{D}^v(\Lambda^1(\mathcal{E}))\right) = \operatorname{sym} \mathcal{E}.$$

Рассмотрим теперь второе утверждение. Пусть $U(\varepsilon) \in \mathrm{D}^v(\Lambda^1(\mathcal{E}))$ — деформация структурного элемента, удовлетворяющая условиям $[\![U(\varepsilon), U(\varepsilon)]\!]^{\mathrm{fn}} = 0$ и $U(0) = U_{\mathcal{C}}$. Тогда $U(\varepsilon) = U_{\mathcal{C}} + U_1\varepsilon + O(\varepsilon^2)$. Поэтому,

$$[\![U(\varepsilon), U(\varepsilon)]\!]^{\mathrm{fn}} = [\![U_{\mathcal{C}}, U_{\mathcal{C}}]\!]^{\mathrm{fn}} + 2[\![U_{\mathcal{C}}, U_1]\!]^{\mathrm{fn}}\varepsilon + O(\varepsilon^2) = 0,$$

откуда видно, что $[\![U_{\mathcal{C}}, U_1]\!]^{\mathrm{fn}} = \partial_{\mathcal{C}} U_1 = 0$. Следовательно, линейная часть деформации $U(\varepsilon)$ определяется элементом из модуля $H^1_{\mathcal{C}}(\mathcal{E})$ и наоборот. С другой стороны, пусть $A \colon \mathcal{E}^\infty \to \mathcal{E}^\infty$ — диффеоморфизм[12] многообразия $\mathcal{E}^\infty$. Определим действие A^* в A на элементах $\Omega \in \mathrm{D}(\Lambda^*(\mathcal{E}))$ таким образом, чтобы диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
\Lambda^*(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\mathrm{L}_\Omega} & \Lambda^*(\mathcal{E}) \\
{\scriptstyle A^*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle A^*} \\
\Lambda^*(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\mathrm{L}_\Omega} & \Lambda^*(\mathcal{E})
\end{array}$$

была коммутативна. Тогда, если A_t — однопараметрическая группа диффеоморфизмов, мы имеем, очевидно,

$$\frac{d}{dt} A_{t,*}(\mathrm{L}_\Omega)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt} A_t^* \circ \mathrm{L}_\Omega \circ (A_t^*)^{-1}\bigg|_{t=0} = [\mathrm{L}_X, \mathrm{L}_\Omega] = \mathrm{L}_{[\![X,\Omega]\!]^{\mathrm{fn}}}.$$

Следовательно инфинитезимальное действие определяется скобкой Фролихера–Нийенхейса. Беря элементы $\Omega = U_{\mathcal{C}}$ и $X \in \mathrm{D}^v(\mathcal{E})$, мы видим, что множество $\operatorname{im} \partial_{\mathcal{C}}$ состоит из инфинитезимальных деформаций, определяемых инфинитезимальным действием диффеоморфизмов на структурном элементе. Такие деформации естественно назвать тривиальными. □

Замечание 5.6. Из общей теории [28] следует, что модуль $H^2_{\mathcal{C}}(\mathcal{E})$ состоит из препятствий к продолжению инфинитезимальных деформаций до формальных. В рассматриваемом случае элементы модуля $H^2_{\mathcal{C}}(\mathcal{E})$ имеют и другую полезную интерпретацию, которую мы обсудим позднее (см. замечание 5.8 на с. 71).

Опишем теперь модули $H^p_{\mathcal{C}}(\pi)$, $p \geqslant 0$. Для этого напомним, что имеет место разложение $\Lambda^i(\mathcal{E}) = \bigoplus_{p+q=i} \mathcal{C}^p\Lambda(\mathcal{E}) \otimes \bar{\Lambda}^q(\mathcal{E})$ (см. §5.1).

Теорема 5.13. *Для любого $p \geqslant 0$ имеем*

$$H^p_{\mathcal{C}}(\pi) = \mathcal{F}(\pi, \pi) \otimes_{\mathcal{F}(\pi)} \mathcal{C}^p\Lambda(\pi).$$

Доказательство. Определим фильтрацию в $\mathrm{D}^v(\Lambda^*(\pi))$, полагая

$$F^l\mathrm{D}^v(\Lambda^p(\pi)) = \{X \in \mathrm{D}^v(\Lambda^p(\pi)) \mid X\,\big|_{\mathcal{F}_{l-p-1}} = 0\}.$$

Очевидно, что

$$F^l\mathrm{D}^v(\Lambda^p(\pi)) \subset F^{l+1}\mathrm{D}^v(\Lambda^p(\pi)), \quad \partial_{\mathcal{C}}\big(F^l\mathrm{D}^v(\Lambda^p(\pi))\big) \subset F^l\mathrm{D}^v(\Lambda^{p+1}(\pi)).$$

[12] Так как $\mathcal{E}^\infty$, вообще говоря, бесконечномерное многообразие, векторные поля на $\mathcal{E}^\infty$, как правило, не обладают однопараметрическими группами диффеоморфизмов. Таким образом, приводимые ниже аргументы имеют эвристический характер.

Таким образом, мы получаем спектральную последовательность, ассоциированную с этой фильтрацией. Для вычисления члена E_0, выберем локальные координаты $x_1, \dots, x_n, u^1, \dots, u^m$ в расслоении π и рассмотрим соответствующие специальные координаты u^j_σ в $J^\infty(\pi)$. В этих координатах структурный элемент представляется в виде

$$U_{\mathcal{C}} = \sum_{|\sigma|\geqslant 0} \sum_{j=1}^{m} \left(du^j_\sigma - \sum_{i=1}^{n} u^j_{\sigma i}\, dx_i \right) \otimes \frac{\partial}{\partial u^j_\sigma}, \tag{5.40}$$

а для $X = \sum_{\sigma,j} \theta^j_\sigma \otimes \partial/\partial u^j_\sigma$ и $\theta \in \Lambda^*(\pi)$ имеем

$$\partial_{\mathcal{C}}(X) = \sum_{|\sigma|\geqslant 0} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge \left(\theta^j_{\sigma i} - D_i(\theta^j_\sigma) \right) \otimes \frac{\partial}{\partial u^j_\sigma}. \tag{5.41}$$

Очевидно, что член

$$E_0^{p,-q} = F^p \mathrm{D}^v(\Lambda^{p-q}(\pi))/F^{p-1}\mathrm{D}^v(\Lambda^{p-q}(\pi)), \quad p \geqslant 0, \quad 0 \leqslant q \leqslant p,$$

отождествляется с тензорным произведением $\Lambda^{p-q}(\pi) \otimes_{\mathcal{F}(\pi)} \Gamma(\pi^*_{\infty,q-1}(\pi_{q,q-1}))$. Эти модули могут быть локально представлены в виде $\mathcal{F}(\pi,\pi) \otimes \Lambda^{p-q}(\pi)$-значных однородных многочленов степени q. При этом дифференциал $\partial_0^{p,-q} \colon E_0^{p,-q} \to E_0^{p,-q+1}$ действует как δ-оператор Спенсера (или, что то же самое, как дифференциал Кошуля; см. упражнение 1.7 на с. 16). Следовательно, гомологические группы тривиальны во всех членах исключая члены $E_0^{p,0}$, причем

$$\operatorname{coker} \partial_0^{p,0} = \mathcal{F}(\pi,\pi) \otimes_{\mathcal{F}(\pi)} \mathcal{C}^p\Lambda(\pi).$$

Следовательно, в члене E_1 «выживает» только нулевая строка и эта строка имеет вид

$$\mathcal{F}(\pi,\pi) \xrightarrow{\partial_1^{0,0}} \mathcal{F}(\pi,\pi) \otimes_{\mathcal{F}(\pi)} \mathcal{C}^1\Lambda(\pi) \to \dots$$
$$\dots \to \mathcal{F}(\pi,\pi) \otimes_{\mathcal{F}(\pi)} \mathcal{C}^p\Lambda(\pi) \xrightarrow{\partial_1^{p,0}} \mathcal{F}(\pi,\pi) \otimes_{\mathcal{F}(\pi)} \mathcal{C}^{p+1}\Lambda(\pi) \to \dots$$

Но элементы образа дифференциала $\partial_{\mathcal{C}}$ содержат по крайней мере одну горизонтальную компоненту (см. равенство (5.33) на с. 64, где по определению $d^v_\nabla - d = d_{\mathcal{C}} - d = -\bar{d}$). Поэтому, все дифференциалы $\partial_1^{p,0}$ тривиальны. □

Теперь мы установим соответствие между последним результатом, описывающем $\mathcal{C}$-когомологии в членах $\mathcal{C}^*\Lambda(\pi)$), и представлением $H^*_{\mathcal{C}}(\pi)$ как классов дифференцирований $\mathcal{F}(\pi) \to \Lambda^*(\pi)$. Чтобы сделать это, для каждого элемента $\omega = (\omega^1, \dots, \omega^m) \in \mathcal{F}(\pi,\pi) \otimes_{\mathcal{F}(\pi)} \mathcal{C}^*\Lambda(\pi)$ положим

$$Э_\omega = \sum_{\sigma,j} D_\sigma(\omega^j) \otimes \frac{\partial}{\partial u^j_\sigma}, \tag{5.42}$$

где $D_\sigma = D_{i_1} \circ \dots \circ D_{i_r}$ для $\sigma = i_1 \dots i_r$.

Определение 5.11. Элемент $Э_\omega \in \mathrm{D}^v(\Lambda^*(\pi))$, определенный равенством (5.42), называется *эволюционным супердифференцированием*, с *производящим сечением* $\omega \in \mathcal{F}(\pi,\pi) \otimes_{\mathcal{F}(\pi)} \mathcal{C}^*\Lambda(\pi)$.

Предложение 5.14. *Дифференцирование $Э_\omega$ не зависит от выбора координат.*

Доказательство. Легко проверить, что

$$Э_\omega\big(\mathcal{F}(\pi)\big) \subset \Lambda^*_v(\pi), \quad Э_\omega \in \ker \partial_{\mathcal{C}}.$$

Но дифференцирования, обладающие этими свойствами, однозначно определяются своими ограничениями на $\mathcal{F}_0(\pi)$, а последние совпадают с действием дифференцирования $\omega\colon \mathcal{F}_0(\pi) \to \mathcal{C}^*\Lambda(\pi)$. Докажем этот факт.

Положим $X = Э_\omega$ и напомним, что дифференцирование X единственным образом определяет соответствующую производную Ли $\mathrm{L}_X \colon \Lambda^*(\pi) \to \Lambda^*(\pi)$. Далее, так как $\mathrm{L}_X d\theta = (-1)^X d(\mathrm{L}_X\theta)$ (см. (5.16) на с. 61) для любого $\theta \in \Lambda^*(\pi)$, дифференцирование L_X определяется своим ограничением на $\Lambda^0(\pi) = \mathcal{F}(\pi)$.

Далее, из тождества $\partial_{\mathcal{C}} X = 0$ следует, что

$$0 = [\![U_{\mathcal{C}}, X]\!]^{\mathrm{fn}}(f) = \mathrm{L}_{U_{\mathcal{C}}}(\mathrm{L}_X(f)) - (-1)^X \mathrm{L}_X(\mathrm{L}_{U_{\mathcal{C}}}(f)), \quad f \in \mathcal{F}(\mathcal{E}). \tag{5.43}$$

Пусть теперь элемент X таков, что $\mathrm{L}_X \big|_{\mathcal{F}_0(\pi)} = 0$. Предположим, что $\mathrm{L}_X \big|_{\mathcal{F}_r(\pi)} = 0$ для некоторого $r > 0$. Тогда, рассматривая функции $f = u_\sigma^j$, $|\sigma| = r$ и используя равенство (5.43), мы получаем

$$\mathrm{L}_X \left(du_\sigma^j - \sum_{i=1}^n u_{\sigma i}^j dx_i \right) = \mathrm{L}_X d_{\mathcal{C}} u_\sigma^j = (-1)^X d_{\mathcal{C}}(L_X(u_\sigma^j)) = 0.$$

Другими словами,

$$\mathrm{L}_X \left(\sum_{i=1}^n u_{\sigma i}^j dx_i \right) = \sum_{i=1}^n \mathrm{L}_X(u_{\sigma i}^j dx_i)) = \sum_{i=1}^n \mathrm{L}_X(du_\sigma^j) = (-1)^X \sum_{i=1}^n d(\mathrm{L}_X u_\sigma^j) = 0.$$

Следовательно, $\mathrm{L}_X(u_\sigma^j) = 0$ и, таким образом, $\mathrm{L}_X \big|_{\mathcal{F}_{r+1}(\pi)} = 0$. □

Из этого результата и из следствия 5.10 на с. 64 вытекает, что если заданы два эволюционных супердифференцирования $\mathcal{Э}_\omega$, $\mathcal{Э}_\theta$, то элементы

а) $[\![\mathcal{Э}_\omega, \mathcal{Э}_\theta]\!]^{\mathrm{fn}}$,
б) $\mathrm{i}_{\mathcal{Э}_\omega}(\mathcal{Э}_\theta)$,

также являются супердифференцированиями.

В первом случае, соответствующая производящая функция называется *суперскобкой Якоби* элементов $\omega = (\omega^1, \ldots, \omega^m)$ и $\theta = (\theta^1, \ldots, \theta^m)$ и обозначается через $\{\omega, \theta\}$. Компоненты этой скобки выражаются формулой

$$\{\omega, \theta\}^j = \mathrm{L}_{\mathcal{Э}_\omega}(\theta^j) - (-1)^{\omega\theta} \mathrm{L}_{\mathcal{Э}_\theta}(\omega^j), \quad j = 1, \ldots, m. \tag{5.44}$$

Очевидно, что модуль $\mathcal{F}(\pi,\pi) \otimes_{\mathcal{F}(\pi)} \mathcal{C}^*\Lambda(\pi)$ является градуированной алгеброй Ли относительно суперскобки Якоби. Ограничение скобки $\{\cdot\,,\cdot\}$ на $\mathcal{F}(\pi,\pi) \otimes \mathcal{C}^0\Lambda(\pi) = \mathcal{F}(\pi,\pi)$ совпадает с высшей скобкой Якоби (см. определение 3.31 на с. 49).

В случае б), производящая функция — это $\mathrm{i}_{\mathcal{Э}_\omega}(\theta)$. Заметим теперь, что любой элемент $\rho \in \mathcal{C}^1\Lambda(\pi)$ имеет вид $\rho = \sum_{\sigma,\alpha} a_{\sigma,\alpha}\omega_\sigma^\alpha$, где, как и прежде, $\omega_\sigma^\alpha = d_{\mathcal{C}} u_\sigma^\alpha = du_\sigma^\alpha - \sum_{i=1}^n u_{\sigma i}^\alpha\, dx_i$ — формы Картана на $J^\infty(\pi)$. Ясно, что если $\theta \in \mathcal{F}(\pi,\pi) \otimes_{\mathcal{F}(\pi)} \mathcal{C}^1\Lambda(\pi)$ и $\theta^j = \sum_{\sigma,\alpha} a_{\sigma,\alpha}^j \omega_\sigma^\alpha$, то

$$\left(\mathrm{i}_{\mathcal{Э}_\omega}(\theta)\right)^j = \sum_{\sigma,\alpha} a_{\sigma,\alpha}^j D_\sigma(\omega^\alpha). \tag{5.45}$$

В частности, мы видим, что равенство (5.45) устанавливает изоморфизм между модулями $\mathcal{F}(\pi,\pi) \otimes_{\mathcal{F}(\pi)} \mathcal{C}^*\Lambda(\pi)$ и $\mathcal{C}\mathrm{Diff}(\pi,\pi)$ и определяет действие $\mathcal{C}$-дифференциальных операторов на элементах $\mathcal{C}^*\Lambda(\pi)$. Это действительно корректно определенное действие, т. к. $\mathrm{i}_{\mathcal{C}X}\omega = 0$ для любых $X \in \mathrm{D}(M)$ и $\omega \in \mathcal{F}(\pi,\pi) \otimes_{\mathcal{F}(\pi)} \mathcal{C}^*\Lambda(\pi)$.

Рассмотрим теперь формально интегрируемое уравнение $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ и предположим, что оно определяется дифференциальным оператором $\Delta \in \mathcal{F}(\pi,\xi)$. Обозначим, как и в главе 3, через $\ell_{\mathcal{E}}$ ограничение оператора универсальной линеаризации ℓ_Δ на $\mathcal{E}^\infty$. Пусть $\ell_{\mathcal{E}}^{[p]}$ — продолжение $\ell_{\mathcal{E}}$ на $\mathcal{F}(\pi,\pi) \otimes_{\mathcal{F}(\pi)} \mathcal{C}^p\Lambda(\mathcal{E})$, которое, как следует из сказанного выше, определено корректно. Тогда модуль $H_{\mathcal{C}}^{p,0}(\mathcal{E})$ отождествляется с множеством эволюционных дифференцирований $\mathcal{Э}_\omega$, чьи производящие функции $\omega \in \mathcal{F}(\pi,\pi) \otimes_{\mathcal{F}(\pi)} \mathcal{C}^p\Lambda(\mathcal{E})$ удовлетворяют уравнению

$$\ell_{\mathcal{E}}^{[p]}(\omega) = 0. \tag{5.46}$$

Если, кроме того, $\mathcal{E}$ удовлетворяет условиям теоремы о двух строчках (см. §6.4), то $H_{\mathcal{C}}^{p,1}(\mathcal{E})$ отождествляется с коядром оператора $\ell_{\mathcal{E}}^{[p-1]}$ и, таким образом,

$$H_{\mathcal{C}}^i(\mathcal{E}) = \ker \ell_{\mathcal{E}}^{[i]} \oplus \operatorname{coker} \ell_{\mathcal{E}}^{[i-1]}$$

в этом случае. Оба эти утверждения будут доказаны в §6.4.

Как было сказано в замечании 5.4 на с. 65, $H_{\mathcal{C}}^1(\mathcal{E})$ — ассоциативная алгебра относительно операции подстановки и представленная в алгебре эндоморфизмов модуля $H_{\mathcal{C}}^0(\mathcal{E})$. Легко видеть, что действие компоненты $H^{0,1}_{\mathcal{C}}(\mathcal{E})$ тривиально, тогда как $H^{1,0}_{\mathcal{C}}(\mathcal{E})$ действует на $H^{0}_{\mathcal{C}}(\mathcal{E}) = \operatorname{sym}\mathcal{E}$ с помощью $\mathcal{C}$-дифференциальных операторов (см. выше).

Определение 5.12. Элементы модуля $H^{1,0}_{\mathcal{C}}(\mathcal{E})$ называются *операторами рекурсии* для симметрий уравнения $\mathcal{E}$.

Обозначим через $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ алгебру операторов рекурсии.

Замечание 5.7. Алгебра $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ всегда непуста, так как она содержит структурный элемент $U_{\mathcal{E}}$, который является единицей в этой алгебре. «Обычно» это единственное решение уравнения (5.46) на предшествующей странице для $p = 1$ (см. пример 5.1 ниже). Этот факт очевидным образом противоречит практическим вычислениям (хорошо известны операторы рекурсии для уравнения КдФ и других интегрируемых систем [14]). Причина в том, что эти операторы содержат нелокальные члены типа D^{-1} или еще более сложные нелокальности. В следующем параграфе будет описано, как следует работать с такими объектами.

Пример 5.1. Рассмотрим уравнение Бюргерса
$$u_t = uu_x + u_{xx}. \tag{5.47}$$
В качестве внутренних координатами на $\mathcal{E}^\infty$ выберем функции x, t, $u = u_0, \dots, u_k, \dots$, где u_k соответствует частной производной $\partial^k u/\partial x^k$.

Мы докажем, что единственными решениями уравнения $\ell^{[1]}_{\mathcal{E}}(\omega) = 0$ для (5.47) являются формы вида $\omega = \alpha\omega_0$, $\alpha = \mathrm{const}$, где
$$\omega_k = d_{\mathcal{C}} u_k = du_k - u_{k+1}\,dx - D_x^k(uu_1 + u_2)\,dt.$$

Пусть $\omega = \phi^0\omega_0 + \ldots + \phi^r\omega_r$. Тогда уравнение (5.46) на предыдущей странице для $p = 1$ имеет вид
$$\begin{aligned}
&u_0 D_x(\phi^0) + D_x^2(\phi^0) = D_t(\phi^0) + \sum_{j=1}^{r} u_{j+1}\phi^j,\\
&u_0 D_x(\phi^1) + D_x^2(\phi^1) + 2D_x(\phi^0) = D_t(\phi^1) + \sum_{j=2}^{r}(j+1)u_j\phi^j,\\
&\dots\\
&u_0 D_x(\phi^i) + D_x^2(\phi^i) + 2D_x(\phi^0) = D_t(\phi^i) + \sum_{j=i+1}^{r}\binom{j+1}{i}u_{j-i+1}\phi^j,\\
&\dots\\
&u_0 D_x(\phi^r) + D_x^2(\phi^r) + 2D_x(\phi^{r-1}) = D_t(\phi^r) + ru_1\phi^r,\\
&D_x(\phi^r) = 0.
\end{aligned} \tag{5.48}$$
Для доказательства искомого результата мы используем схему, предложенную в [8] для описания алгебры симметрий уравнения Бюргерса.

Обозначим через $\mathcal{K}_r$ множество решений уравнения (5.48). Прямое вычисление показывает, что
$$\mathcal{K}_1 = \{\alpha\omega_0 \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \tag{5.49}$$
и что любой элемент $\omega \in \mathcal{K}_r$, $r > 1$, имеет вид
$$\omega = \alpha_r + \left(\frac{r}{2}u_0\alpha_r + \frac{1}{2}x\alpha_r^{(1)} + \alpha_{r-1}\right) + \Omega[r-2], \tag{5.50}$$
где $\alpha_r = \alpha_r(t)$, $\alpha_{r-1} = \alpha_{r-1}(t)$, $\alpha^{(i)}$ обозначает производную $d^i\alpha/dt^i$, а $\Omega[s]$ — произвольная линейная комбинация форм $\omega_0, \dots, \omega_s$ с коэффициентами из $\mathcal{F}(\mathcal{E})$.

Заметим теперь, что для любого эволюционного уравнения имеет место вложение
$$[\![\operatorname{sym}\mathcal{E}, \ker\ell^{[1]}_{\mathcal{E}}]\!]^{\mathrm{fn}} \subset \ker\ell^{[1]}_{\mathcal{E}}.$$

Поэтому, если $\psi \in \operatorname{sym}\mathcal{E}$ и $\omega \in \ker \ell_{\mathcal{E}}^{[1]}$, то $\{\psi, \omega\} \in \ker \ell_{\mathcal{E}}^{[1]}$.

Так как функция u_1 — это симметрия уравнения Бюргерса (трансляция вдоль оси x), имеем

$$\{u_1, \omega\} = \left(\sum_k u_{k+1}\frac{\partial}{\partial u_k}\right)\omega - D_x\omega = -\frac{\partial}{\partial x}\omega.$$

Следовательно, если $\omega \in \mathcal{K}_r$, то из (5.50) на предыдущей странице мы получаем, что

$$\operatorname{ad}_{u_1}^{(r-1)}(\omega) = \alpha_r^{(r-1)}\omega_1 + \Omega[0] \in \mathcal{K}_1,$$

где $\operatorname{ad}_\psi = \{\psi, \cdot\}$. Учитывая уравнение (5.49) на предшествующей странице, мы получаем, что $\alpha_r^{r-1} = 0$, или

$$\alpha_r = a_0 + a_1 t + \ldots + a_{r-2}t^{r-2}, \quad a_i \in \mathbb{R}. \tag{5.51}$$

Воспользуемся теперь тем фактом, что элемент $\Phi = t^2u_2 + (t^2u_0 + tx)u_1 + tu_0 + 1$ является симметрией уравнения Бюргерса (см. [8]). Тогда, так как действие симметрий перестановочно с дифференциалом Картана $d_{\mathcal{C}}$, мы имеем

$$\{\Phi, \phi^s\omega_s\} = \partial_\Phi(\phi^s\omega_s) - \partial_{\phi^s\omega_s}(\Phi) = \partial_\Phi(\phi^s)\omega_s + \phi^s\partial_\Phi(\omega_s) - \partial_{\phi^s\omega_s}(\Phi).$$

Но

$$\begin{aligned}\partial_\Phi(\omega_s) = \partial_\Phi d_{\mathcal{C}}(u_s) = d_{\mathcal{C}}\partial_\Phi(u_s) = d_{\mathcal{C}}D_x^s(\Phi) = \\ = d_{\mathcal{C}}\big(t^2u_{s+2} + (t^2u_0 + tx)u_{s+1} + (s+1)(t^2u_1 + t)u_s\big) + \Omega[s-1].\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\partial_{\phi^s\omega_s}(\Phi) = t^2\phi^s\omega_{s+2} + \big(2t^2D_x^2(\phi^s) + (t^2u_0 + tx)\phi^s\big)\omega_{s+1} + \\ + \big(t^2D_x^2(\phi^s) + (t^2u_0 + tx)D_x(\phi^s) + (t^2u_1 + t)\phi^s\big)\omega_s.\end{aligned}$$

Таким образом, в итоге мы получаем, что

$$\{\Phi, \phi^s\omega_s\} = \{\Phi, \phi^s\}\omega_s + (s+1)(t^2u_1 + t)\omega_s - 2t^2D_x(\phi^s)\omega_{s+1} + \Omega[s-1]. \tag{5.52}$$

Применяя равенство (5.52) к (5.50) на предыдущей странице, получаем

$$\operatorname{ad}_\Phi(\omega) = (rt\alpha_r - t^2\alpha_r^{(1)})\omega_r + \Omega[r-1]. \tag{5.53}$$

Пусть теперь $\omega \in \mathcal{K}_r$. Предположим, что ω имеет нетривиальный коэффициент α_r вида (5.51), и a_i — первый нетривиальный коэффициент в α_r. Тогда из представления (5.53) следует, что

$$\operatorname{ad}_\Phi^{r-i}(\omega) = \alpha_r'\omega_r + \Omega[r-1] \in \mathcal{K}_r,$$

где α_r' — многочлен степени $r-1$. Это противоречит равенству (5.51) и, таким образом, завершает доказательство.

З а м е ч а н и е 5.8. Пусть $\varphi \in \operatorname{sym}\mathcal{E}$ — симметрия и $R \in \mathcal{R}(\mathcal{E})$ — оператор рекурсии. Тогда возникает последовательность симметрий $\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_1 = R(\varphi), \ldots, \varphi_n = R^n(\varphi), \ldots$. Используя тождество (5.22) на с. 62, можно вычислить коммутаторы $[\varphi_m, \varphi_n]$ в терминах скобок $[\![\varphi, R]\!]^{\mathrm{fn}} \in H_{\mathcal{C}}^{1,0}(\mathcal{E})$ и $[\![R, R]\!]^{\mathrm{fn}} \in H_{\mathcal{C}}^{2,0}(\mathcal{E})$. В частности, можно показать, что когда и $[\![\varphi, R]\!]^{\mathrm{fn}}$, и $[\![R, R]\!]^{\mathrm{fn}}$ тривиальны, все симметрии φ_n попарно коммутируют (см. [42]).

Например, если $\mathcal{E}$ — эволюционное уравнение, $H_{\mathcal{C}}^{p,0}(\mathcal{E}) = 0$ для всех $p \geqslant 2$ (см. теорему 6.8 на с. 83). Следовательно, если φ — симметрия и $\mathcal{R}$ — *φ-инвариантный* оператор рекурсии (т. е. такой, что $[\![\varphi, \mathcal{R}]\!]^{\mathrm{fn}} = 0$), то $\mathcal{R}$ порождает коммутативную серию симметрий. Это верно в случае уравнения КдФ и многих других интегрируемых эволюционных уравнений.

5.4. **Переход к нелокальной картине.** Введем теперь в описанную выше ситуацию нелокальные переменные. Точнее говоря, пусть $\mathcal{E}$ — уравнение и $\varphi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{E}^\infty$ — накрытие над бесконечным продолжением этого уравнения. Тогда из предложения 4.1 на с. 53 следует, что тройка $\big(\mathcal{F}(\mathcal{N}), C^\infty(M), (\pi_\infty \circ \varphi)^*\big)$ — алгебра с плоской связностью $\mathcal{C}^\varphi$. Следовательно, мы можем применить все конструкции §§5.1–5.3 на с. 59–66. Поскольку наши рассуждения связаны с накрытием φ, мы будем добавлять символ φ ко всем обозначениям, используемым в этом параграфе. Обозначим через $U^\varphi_\mathcal{C}$ соответствующую форму связности, ассоциированную со связностью $\mathcal{C}^\varphi$ (структурный элемент накрытия φ).

В частности, на $\mathcal{N}$ определен $\mathcal{C}^\varphi$-дифференциал $\partial^\varphi_\mathcal{C} = [\![U^\varphi_\mathcal{C}, \cdot]\!]^{\mathrm{fn}}\colon \mathrm{D}^v(\Lambda^i(\mathcal{N})) \to \mathrm{D}^v(\Lambda^{i+1}(\mathcal{N}))$, чьи 0-когомологии $H^0_\mathcal{C}(\mathcal{E},\varphi)$ совпадают с алгеброй Ли $\mathrm{sym}_\varphi \mathcal{E}$ нелокальных φ-симметрий, в то время как модуль $H^{1,0}_\mathcal{C}(\mathcal{E},\varphi)$ отождествляется с операторами рекурсии, действующими на этих симметриях; обозначим его через $\mathcal{R}(\mathcal{E},\varphi)$. Мы также имеем горизонтальный дифференциал де Рама $\bar{d}^\varphi$ и вертикальный дифференциал (дифференциал Картана) $d^\varphi_\mathcal{C}$ на $\mathcal{N}$. Им соответствует разложение в прямую сумму $\Lambda^i(\mathcal{N}) = \bigoplus_{p+q=i} \mathcal{C}^p\Lambda^p(\mathcal{N}) \otimes \bar{\Lambda}^q(\mathcal{N})$.

Выберем тривиализацию расслоения $\varphi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{E}^\infty$ и нелокальные координаты $w^1, w^2, \dots$ в слое. Тогда любое дифференцирование $X \in \mathrm{D}^v(\Lambda^i(\mathcal{N}))$ представляется в виде суммы $X = X_\mathcal{E} + X^v$, где $X_\mathcal{E}(w^j) = 0$, а X^v — φ-вертикальное дифференцирование.

Лемма 5.15. *Пусть $\varphi\colon \mathcal{E}^\infty \times \mathbb{R}^N \to \mathcal{E}^\infty$ — накрытие, $N \leqslant \infty$. Тогда $H^{p,0}_\mathcal{C}(\mathcal{E},\varphi) = \ker \partial^\varphi_\mathcal{C}\big|_{\mathcal{C}^p\Lambda(\mathcal{N})}$. Таким образом, модуль $H^{p,0}_\mathcal{C}(\mathcal{E},\varphi)$ состоит из таких дифференцирований $\Omega\colon \mathcal{F}(\mathcal{N}) \to \mathcal{C}^p\Lambda(\mathcal{N})$, что*

$$[\![U^\varphi_\mathcal{C}, \Omega]\!]^{\mathrm{fn}}_\mathcal{E} = 0, \quad \big([\![U^\varphi_\mathcal{C}, \Omega]\!]^{\mathrm{fn}}\big)^v = 0. \tag{5.54}$$

Доказательство. Из равенства (5.33) на с. 64 следует, любой элемент из образа оператора $\partial^\varphi_\mathcal{C}$ содержит по крайней мере одну горизонтальную компоненту, т. е.

$$\partial^\varphi_\mathcal{C}\big(\mathrm{D}^v(\mathcal{C}^p\Lambda(\mathcal{N}))\big) \subset \mathrm{D}^v(\mathcal{C}^p\Lambda(\mathcal{N}) \otimes \bar{\Lambda}^1(\mathcal{N})),$$

откуда немедленно следует справедливость (5.54). □

Назовем первое уравнение в (5.54) *уравнением для теней*, а второе — *уравнением связи*. Эта терминология объясняется следующим результатом (ср. с теоремой 4.7 на с. 55).

Предложение 5.16. *Пусть $\mathcal{E}$ — эволюционное уравнение вида*

$$u_t = f(x, t, u, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial u^k})$$

и $\varphi\colon \mathcal{N} = \mathcal{E}^\infty \times \mathbb{R}^N \to \mathcal{E}^\infty$ — накрытие, заданное векторными полями[13]

$$\tilde{D}_x = D_x + X, \quad \tilde{D}_t = D_t + T,$$

где $[\tilde{D}_x, \tilde{D}_t] = 0$ и

$$X = \sum_s X^s \frac{\partial}{\partial w^s}, \quad T = \sum_s T^s \frac{\partial}{\partial w^s},$$

а $w^1, \dots, w^s, \dots$ суть нелокальные координаты на φ. Тогда модуль $H^{p,0}_\mathcal{C}(\mathcal{E},\varphi)$ состоит из элементов вида

$$\Psi = \sum_i \Psi_i \otimes \frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_s \psi^s \frac{\partial}{\partial w^s} \in \mathrm{D}^v(\mathcal{C}^p\Lambda(\mathcal{N})),$$

[13] Упрощая обозначения, введенные в главе 4, мы обозначаем поднятие $\mathcal{C}$-дифференциального оператора Δ на $\mathcal{N}$ через $\tilde{\Delta}$.

для которых $\Psi_i = \tilde{D}_x^i \Psi_0$ *и*

$$\tilde{\ell}_{\mathcal{E}}^{[p]}(\Psi_0) = 0, \tag{5.55}$$

$$\sum_\alpha \frac{\partial X^s}{\partial u_\alpha} \tilde{D}_x^\alpha(\Psi_0) + \sum_\beta \frac{\partial X^s}{\partial w^\beta} \psi^\beta = \tilde{D}_x(\psi^s), \tag{5.56}$$

$$\sum_\alpha \frac{\partial T^s}{\partial u_\alpha} \tilde{D}_x^\alpha(\Psi_0) + \sum_\beta \frac{\partial T^s}{\partial w^\beta} \psi^\beta = \tilde{D}_t(\psi^s), \tag{5.57}$$

$s = 1, 2, \ldots,$ *где* $\tilde{\ell}_{\mathcal{E}}^{[p]}$ — *естественное поднятие оператора* $\ell_{\mathcal{E}}^{[p]}$ *на* $\mathcal{N}$.

Доказательство. Рассмотрим формы Картана

$$\omega_i = du_i - u_{i+1}\,dx - D_x^i(f)\,dt, \quad \theta^s = dw^s - X^s\,dx - T^s\,dt$$

на $\mathcal{N}$. Тогда дифференцирование

$$U_{\mathcal{C}}^{\varphi} = \sum_i \omega_i \otimes \frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_s \theta^s \otimes \frac{\partial}{\partial w^s}$$

— это структурный элемент накрытия φ. Теперь, используя представление (5.18) на с. 61, мы получаем

$$\begin{aligned}\partial_{\mathcal{C}}^{\varphi}\Psi = dx \wedge \sum_i \big(\Psi_{i+1} - \tilde{D}_x(\Psi_i)\big) \otimes \frac{\partial}{\partial u_i} + dt \wedge \sum_i \Big(\sum_\alpha \frac{\partial(D_x^i f)}{\partial u_\alpha}\Psi_\alpha - \tilde{D}_t\Psi_i\Big) \otimes \frac{\partial}{\partial u_i} +\\ + dx \wedge \sum_s \Big(\sum_\alpha \frac{\partial X^s}{\partial u_\alpha}\Psi_\alpha + \sum_\beta \frac{\partial X^s}{\partial w^\beta}\psi^\beta - \tilde{D}_x(\psi^s)\Big) \otimes \frac{\partial}{\partial w^s} +\\ + dt \wedge \sum_s \Big(\sum_\alpha \frac{\partial T^s}{\partial u_\alpha}\Psi_\alpha + \sum_\beta \frac{\partial T^s}{\partial w^\beta}\psi^\beta - \tilde{D}_t(\psi^s)\Big) \otimes \frac{\partial}{\partial w^s},\end{aligned}$$

что и дает искомый результат. □

Заметим, что соотношение $\Psi_i = \tilde{D}_x^i(\Psi_0)$ вместе с уравнением (5.55) эквивалентно уравнениям для теней. В случае $p = 1$ решение уравнения (5.55) будет называться *тенью оператора рекурсии* в накрытии φ. Уравнения (5.56) и (5.57) в рассматриваемом случае в точности совпадают с уравнениями связи.

Упражнение 5.1. Попытайтесь обобщить полученный выше результат на произвольные уравнения, используя доказательство, аналогичное доказательству теоремы 4.7 на с. 55.

Таким образом, любой элемент модуля $H_{\mathcal{C}}^{1,0}(\mathcal{E}, \varphi)$ имеет вид

$$\Psi = \sum_i \tilde{D}_x^i(\psi) \otimes \frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_s \psi^s \otimes \frac{\partial}{\partial w^s}, \tag{5.58}$$

где формы $\psi = \Psi_0$, $\psi^s \in \mathcal{C}^1\Lambda(\mathcal{N})$ удовлетворяют системе уравнений 5.55–5.57.

Как прямое следствие сказанного, мы получаем следующее утверждение.

Следствие 5.17. *Пусть* Ψ — *дифференцирование вида* (5.58) *с* ψ, $\psi^s \in \mathcal{C}^p\Lambda(\mathcal{N})$. *Тогда* ψ *является решением уравнения* (5.55) *в накрытии* φ *в том и только том случае, если* $\partial_{\mathcal{C}}^{\varphi}(\Psi)$ — φ*-вертикальное дифференцирование.*

Теперь мы можем сформулировать главный результат этого параграфа:

Теорема 5.18. *Пусть* $\varphi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{E}^\infty$ — *накрытие,* $S \in \mathrm{sym}_\varphi \mathcal{E}$ — *нелокальная* φ*-симметрия и* $\psi \in \mathcal{C}^1\Lambda(\mathcal{N})$ — *тень оператора рекурсии в накрытии* φ. *Тогда* $\psi' = \mathrm{i}_S\psi$ — *тень симметрии в* φ, *т. е.* $\tilde{\ell}_{\mathcal{E}}(\psi') = 0$.

Доказательство. Действительно, пусть Ψ — дифференцирование вида (5.58) на предшествующей странице. Тогда, из равенства (5.32) на с. 64 получаем

$$\partial_{\mathcal{C}}^{\varphi}(\mathrm{i}_S\Psi) = \mathrm{i}_{\partial_{\mathcal{C}}^{\varphi}S} - \mathrm{i}_S(\partial_{\mathcal{C}}^{\varphi}\Psi) = -\mathrm{i}_S(\partial_{\mathcal{C}}^{\varphi}\Psi),$$

поскольку S — симметрия. Но из утверждения 5.17 на предшествующей странице следует, что $\partial_{\mathcal{C}}^{\varphi}\Psi$ — φ-вертикальное дифференцирование и, значит, $\partial_{\mathcal{C}}^{\varphi}(\mathrm{i}_S\Psi) = -\mathrm{i}_S(\partial_{\mathcal{C}}^{\varphi}\Psi)$ также φ-вертикально. Следовательно, $\mathrm{i}_S\Psi$ — φ-тень некоторой симметрии. □

Используя последний результат вместе с теоремой 4.11 на с. 57, мы можем описать процесс порождения серий симметрий под действием теней операторов рекурсии. Именно, пусть ψ — симметрия и $\omega \in \mathcal{C}^1\Lambda(\mathcal{N})$ — тень оператора рекурсии в накрытии $\varphi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{E}^\infty$. В частности, ψ является φ-тенью. Тогда, по теореме 4.9 на с. 56, существует накрытие $\varphi_\psi\colon \mathcal{N}_\psi \to \mathcal{N} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{E}^\infty$, куда $Э_\psi$ можно поднять как φ_ψ-симметрию. Очевидно, что ω остается тенью в этом новом накрытии. Поэтому, мы можем подействовать элементом ω на ψ и получить тень ψ_1 новой симметрии на $\mathcal{N}_\psi$. По теореме 4.11 на с. 57 существует такое накрытие, в котором и ψ, и ψ_1 реализуются как нелокальные симметрии. Таким образом, мы можем продолжить эту процедуру и применить ω к ψ_1. В конечном итоге получится накрытие, в котором реализована вся серия $\{\psi_k\}$.

Пример 5.2. Рассмотрим уравнение Бюргерса $u_t = uu_x + u_{xx}$. Пусть $\varphi\colon \mathcal{E}^\infty \times \mathbb{R} \to \mathcal{E}^\infty$ — одномерное накрытие с нелокальной переменной w, определяемое векторными полями

$$D_x^{\varphi} = D_x + u_0\frac{\partial}{\partial w}, \quad D_t^{\varphi} = D_t + \left(\frac{u_0^2}{2} + u_1\right)\frac{\partial}{\partial w}.$$

Тогда легко проверить, что форма

$$\omega = \omega_1 + \frac{1}{2}\omega_0 + \frac{1}{2}\theta,$$

где $\omega_0 = d_{\mathcal{C}}u_0$ и $\omega_1 = d_{\mathcal{C}}u_1$ — формы Картана и $\theta = dw - u_0\,dx - (u_0^2/2 + u_1)\,dt$, является решением уравнения $\tilde{\ell}_{\mathcal{E}}^{[1]}\omega = 0$. Если $Э_\psi$ — симметрия уравнения Бюргерса, то соответствующее действие элемента ω на ψ имеет вид

$$D_x\psi + \frac{1}{2}\psi + \frac{1}{2}D_x^{-1}\psi$$

и, таким образом, совпадает с хорошо известным оператором рекурсии для этого уравнения, см. [14].

Упражнение 5.2. Рассмотрим уравнение КдФ $u_t = uu_x + u_{xxx}$ и одномерное накрытие $\varphi\colon \mathcal{E}^\infty \times \mathbb{R} \to \mathcal{E}^\infty$ с нелокальной переменной w, определяемое векторными полями

$$D_x^{\varphi} = D_x + u_0\frac{\partial}{\partial w}, \quad D_t^{\varphi} = D_t + \left(\frac{u_0^2}{2} + u_2\right)\frac{\partial}{\partial w}.$$

Решите уравнение $\tilde{\ell}_{\mathcal{E}}^{[1]}\omega = 0$ в этом накрытии и найдите соответствующие операторы рекурсии.

Замечание 5.9. Операторы рекурсии можно понимать как суперсимметрии (см. §7.9) некоторого суперуравнения, естественным образом связанного с исходным. К таким симметриям и уравнениям можно также применить нелокальную теорию, изложенную в главе 4, и доказать соответствующие теоремы о восстановлении, см. [43, 45].

6. Горизонтальные когомологии

В этой главе мы рассматриваем горизонтальные когомологии дифференциальных уравнений, т. е. когомологии горизонтального комплекса де Рама (см. определение 3.27 на с. 45). Эти когомологии имеют множество физических приложений. Возьмем, в качестве иллюстрации, понятие сохраняющегося тока. Пусть $\mathcal{E}$ — дифференциальное уравнение. *Сохраняющимся током* называют такую вектор-функцию $J = (J_1, \ldots, J_n)$, где $J_k \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$, которая сохраняется по модулю рассматриваемого уравнения, т. е. которая удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{n} D_k(J_k) = 0, \tag{6.1}$$

где D_k — ограничения полных производных на $\mathcal{E}^\infty$. Рассмотрим, например, нелинейное уравнение Шрёдингера[14]

$$i\psi_t = \Delta\psi + |\psi|^2\psi, \qquad \Delta = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}. \tag{6.2}$$

Прямая проверка показывает, что вектор-функция

$$J = (|\psi|^2, i(\bar{\psi}\psi_{x_1} - \psi\bar{\psi}_{x_1}), \ldots, i(\bar{\psi}\psi_{x_{n-1}} - \psi\bar{\psi}_{x_{n-1}}))$$

является сохраняющимся током, т. е. выражение

$$D_t(|\psi|^2) + \sum_{k=1}^{n-1} D_k(i(\bar{\psi}\psi_{x_k} - \psi\bar{\psi}_{x_k}))$$

обращается в нуль в силу уравнения (6.2).

Сохраняющийся ток называется *тривиальным*, если он имеет вид

$$J_k = \sum_{l=1}^{n} D_l(\mathcal{L}_{kl}) \tag{6.3}$$

для некоторой кососимметрической матрицы $\|\mathcal{L}_{kl}\|$, $\mathcal{L}_{kl} = -\mathcal{L}_{lk}$, где $\mathcal{L}_{kl} \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$. Название «тривиальные токи» указывает на то, что они сохраняются в независимости от рассматриваемого уравнения. Два сохраняющихся тока называются *эквивалентными*, если они отличаются на тривиальный ток. *Законы сохранения* определяются как классы эквивалентных сохраняющихся токов.

Каждому сохраняющемуся току $J = (J_1, \ldots, J_n)$ мы сопоставим горизонтальную $(n-1)$-форму $\omega_J = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} J_k \, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \ldots \wedge dx_n$. Тогда уравнения (6.1) и (6.3) примут вид $\bar{d}\omega_J = 0$ и $\omega_J = \bar{d}\eta$ соответственно, где $\eta = \sum_{k>l}(-1)^{k+l}\mathcal{L}_{kl} \, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_l} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \ldots \wedge dx_n$. Таким образом мы видим, что $(n-1)$-я группа горизонтальных когомологий уравнения $\mathcal{E}$ состоит из законов сохранения этого уравнения.

В физических приложениях встречаются также группы горизонтальных когомологий размерности меньшей, чем $n-1$. Например, уравнения Максвелла можно записать в следующем виде

$$\bar{d}(*F) = 0,$$

где F — тензор напряженности электромагнитного поля и $*$ — оператор Ходжа. Ясно, что форма $*F$ не точна. Другая причина, заставляющая изучать горизонтальные когомологии низких размерностей, состоит в том, что они появляются при вычислении БРСТ-когомологий [22]. Недавно с помощью горизонтальных когомологий были полностью вычислены деформации и аномалии для калибровочных теорий Янга–Миллса и теории гравитации [23, 21].

Горизонтальным когомологиям также принадлежит центральная роль в лагранжевом формализме. Действительно, легко видеть, что n-мерная группа горизонтальных когомологий в точности совпадает с совокупностью функционалов действия вариационных задач со связями, выражаемыми уравнением $\mathcal{E}$.

[14] Здесь ψ — комплексно-значная функция, так что (6.2) надо понимать как систему из двух уравнений.

Для вычисления горизонтальных когомологий существует общий метод основанный на $\mathcal{C}$-спектральной последовательности Виноградова [5, 6, 64]. В двух словах он может быть описан следующим образом. Группы горизонтальных когомологий суть члены $E_1^{0,\bullet}$ $\mathcal{C}$-спектральной последовательности Виноградова и тем самым они связаны с членами $E_1^{p,\bullet}$ для $p > 0$. Эти члены также являются горизонтальными когомологиями, но с некоторыми нетривиальными коэффициентами. Оказывается, и это имеет решающее значение, что в соответствующих модулях коэффициентов можно ввести такую фильтрацию, что дифференциалы возникающих факторкомплексов линейны над алгеброй функций. Следовательно, когомологии могут быть вычислены алгебраически. Детальное описание этого метода является нашей основной задачей в этой и следующей главах.

6.1. **$\mathcal{C}$-модули на дифференциальных уравнениях.** Мы начнем с определения $\mathcal{C}$-модулей, т. е. левых дифференциальных модулей (см. определение 1.7 на с. 13) в $\mathcal{C}$-дифференциальном исчислении, служащих модулями коэффициентов в горизонтальных комплексах де Рама. Рассмотрим уравнение $\mathcal{E}$ и алгебру $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{E})$ гладких функций на $\mathcal{E}^\infty$.

Предложение 6.1. *Три определения $\mathcal{C}$-модуля, приведенные ниже, эквивалентны*:

1) *$\mathcal{F}$-модуль Q называется* $\mathcal{C}$-модулем, *если он наделен структурой левого модуля над кольцом $\mathcal{C}\mathrm{Diff}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$, т. е. каждому скалярному $\mathcal{C}$-дифференциальному оператору сопоставляется такой оператор $\Delta_Q \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}_k(Q, Q)$, что*
   1) $(\sum_i f_i\Delta_i)_Q = \sum_i f_i(\Delta_i)_Q$, $\quad f_i \in \mathcal{F}$,
   2) $(\mathrm{id}_{\mathcal{F}})_Q = \mathrm{id}_Q$,
   3) $(\Delta_1 \circ \Delta_2)_Q = (\Delta_1)_Q \circ (\Delta_2)_Q$.
2) *$\mathcal{C}$-модуль — модуль с* плоской горизонтальной связностью, *т. е. действием $X \mapsto \nabla_X$ модуля $\mathcal{C}\mathrm{D} = \mathcal{C}\mathrm{D}(\mathcal{E})$ на модуле Q, которое $\mathcal{F}$-линейно*
$$\nabla_{fX+gY} = f\nabla_X + g\nabla_Y, \quad f, g \in \mathcal{F}, \quad X, Y \in \mathcal{C}\mathrm{D},$$
удовлетворяет правилу Лейбница
$$\nabla_X(fq) = X(f)q + f\nabla_X(q), \quad q \in Q, \quad X \in \mathcal{C}\mathrm{D}, \quad f \in \mathcal{F},$$
и является гомоморфизмом алгебр Ли
$$[\nabla_X, \nabla_Y] = \nabla_{[X,Y]}.$$
3) *$\mathcal{C}$-модуль — модуль сечений линейного накрытия, т. е. Q — модуль сечений некоторого векторного расслоения $\tau\colon W \to \mathcal{E}^\infty$, $Q = \Gamma(\tau)$, на тотальном пространстве W которого имеется n-мерное линейное распределение (см. определение 4.3 на с. 52), проектирующееся на распределение Картана на $\mathcal{E}^\infty$.*

Доказательство элементарно. □

Упражнение 6.1. Покажите, что

1) оператор $(D_i)_Q = \|\Delta_j^k\|$ в координатах имеет вид
$$\Delta_j^k = D_i\delta_j^k + \Gamma_{ij}^k, \quad \Gamma_{ij}^k \in \mathcal{F},$$
где δ_j^k — символ Кронекера;
2) координатное описание соответствующей плоской горизонтальной связности выглядит так:
$$\nabla_{D_i}(s_j) = \sum_k \Gamma_{ij}^k s_k$$
где s_j — базис в Q;
3) соответствующее линейное накрытие имеет вид
$$\tilde{D}_i = D_i + \sum_{j,k} \Gamma_{ij}^k w^j \frac{\partial}{\partial w^k},$$
где w^i координаты вдоль слоев W.

Приведем основные примеры $\mathcal{C}$-модулей.

П р и м е р 6.1. Простейшим примером $\mathcal{C}$-модуля служит $Q = \mathcal{F}$ с обычным действием $\mathcal{C}$-дифференциальных операторов.

П р и м е р 6.2. Модуль вертикальных векторных полей $Q = \mathrm{D}^v = \mathrm{D}^v(\mathcal{E})$ со связностью

$$\nabla_X(Y) = [X, Y]^v, \quad X \in \mathcal{C}\mathrm{D}, \quad Y \in \mathrm{D}^v,$$

где $Z^v = U_{\mathcal{C}}(Z)$, является $\mathcal{C}$-модулем.

П р и м е р 6.3. Следующий пример — модуль форм Картана $Q = \mathcal{C}^k\Lambda = \mathcal{C}^k\Lambda(\mathcal{E})$.

Векторное поле $X \in \mathcal{C}\mathrm{D}$ действует на $\mathcal{C}^k\Lambda$ как производная Ли L_X. Легко видеть, что в координатах выполняется равенство

$$(D_i)_{\mathcal{C}^k\Lambda}(\omega^j_\sigma) = \omega^j_{\sigma i}.$$

П р и м е р 6.4. Модуль бесконечных горизонтальных джетов $Q = \bar{\mathcal{J}}^\infty(P)$ некоторого $\mathcal{F}$-модуля P превратится в $\mathcal{C}$-модуль, если положить

$$\Delta_{\bar{\mathcal{J}}^\infty(P)}(f\bar{\jmath}_\infty(p)) = \Delta(f)\bar{\jmath}_\infty(p),$$

где $\Delta \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$, $f \in \mathcal{F}$, $p \in P$.

П р и м е р 6.5. Рассмотрим конструкцию, двойственную предыдущему примеру. Ясно, что для каждого $\mathcal{F}$-модуля P, модуль $Q = \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P, \mathcal{F})$ является $\mathcal{C}$-модулем. Действие горизонтальных операторов задается композицией:

$$\Delta_Q(\nabla) = \Delta \circ \nabla,$$

где $\Delta \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$, $\nabla \in Q = \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P, \mathcal{F})$.

П р и м е р 6.6. Обобщим два последних примера. Пусть $\Delta\colon P \to P_1$ — $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор и $\psi^\Delta_\infty\colon \bar{\mathcal{J}}^\infty(P) \to \bar{\mathcal{J}}^\infty(P_1)$ — соответствующее продолжение оператора Δ. Очевидно, что ψ^Δ_∞ — морфизм $\mathcal{C}$-модулей, т. е. гомоморфизм над кольцом $\mathcal{C}\mathrm{Diff}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$, так что $\ker \psi^\Delta_\infty$ и $\operatorname{coker} \psi^\Delta_\infty$ — $\mathcal{C}$-модули.

С другой стороны, оператор Δ порождает морфизм $\mathcal{C}$-модулей $\mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_1, \mathcal{F}) \to \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P, \mathcal{F})$, $\nabla \mapsto \nabla \circ \Delta$. Таким образом, ядро и коядро этого отображения также являются $\mathcal{C}$-модулями.

П р и м е р 6.7. Для любых двух $\mathcal{C}$-модулей Q_1 и Q_2 на модулях $Q_1 \otimes_{\mathcal{F}} Q_2$ и $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(Q_1, Q_2)$ можно задать структуры $\mathcal{C}$-модулей следующим образом:

$$\nabla_X(q_1 \otimes q_2) = \nabla_X(q_1) \otimes q_2 + q_1 \otimes \nabla_X(q_2),$$
$$\nabla_X(f)(q_1) = \nabla_X(f(q_1)) - f(\nabla_X(q_1)),$$

где $X \in \mathcal{C}\mathrm{D}$, $q_1 \in Q_1$, $q_2 \in Q_2$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(Q_1, Q_2)$.

Например, для любого $\mathcal{F}$-модуля Q модули $Q = \bar{\mathcal{J}}^\infty(P) \otimes_{\mathcal{F}} \mathcal{C}^k\Lambda$ и $Q = \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P, \mathcal{C}^k\Lambda)$ являются $\mathcal{C}$-модулями.

П р и м е р 6.8. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(W)$ — ее линейное представление. Каждая $\mathfrak{g}$-значная горизонтальная форма $\omega \in \bar{\Lambda}^1(\mathcal{E}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$, удовлетворяющая горизонтальному уравнению Маурера–Картана $\bar{d}\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$, определяет на модуле Q сечений тривиального векторного расслоения $\mathcal{E}^\infty \times W \to \mathcal{E}^\infty$ следующую структуру $\mathcal{C}$-модуля:

$$\nabla_X(q)_a = X(q)_a + \rho(\omega(X))(q_a),$$

где $X \in \mathcal{C}\mathrm{D}$, $q \in Q$, $a \in \mathcal{E}^\infty$, а $X(q)$ обозначает покомпонентное действие.

У п р а ж н е н и е 6.2. Убедитесь, что Q — действительно $\mathcal{C}$-модуль.

Такие $\mathcal{C}$-модули называются *представлениями нулевой кривизны* на $\mathcal{E}^\infty$. Рассмотрим, для примера, уравнение КдФ (в виде $u_t = uu_x + u_{xxx}$) и алгебру Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Тогда существует однопараметрическое семейство форм Маурера–Картана $\omega(\lambda) = A_1(\lambda)\,\bar{d}x + A_2(\lambda)\,\bar{d}t$ (λ — параметр):

$$A_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -(\lambda + u) \\ \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A_2(\lambda) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}u_x & -u_{xx} - \frac{1}{3}u^2 + \frac{1}{3}\lambda u + \frac{2}{3}\lambda^2 \\ \frac{1}{18}u - \frac{1}{9}\lambda & \frac{1}{6}u_x \end{pmatrix}.$$

Это представление нулевой кривизны используется в методе обратной задачи рассеяния.

З а м е ч а н и е 6.1. Аналогично левым $\mathcal{C}$-модулям можно определить *правые* $\mathcal{C}$-модули, т. е. правые модули над кольцом $\mathcal{C}\mathrm{Diff}(\mathcal{F},\mathcal{F})$. Существует естественный способ сопоставить левому $\mathcal{C}$-модулю правый и наоборот. Именно, левому $\mathcal{C}$-модулю Q сопоставим модуль

$$\mathrm{B}(Q) = Q \otimes_{\mathcal{F}} \bar{\Lambda}^n(\mathcal{E}),$$

с правым действием кольца $\mathcal{C}\mathrm{Diff}(\mathcal{F},\mathcal{F})$, определяемым формулой

$$(q\otimes\omega)f = fq\otimes\omega = q\otimes f\omega, \quad f\in\mathcal{F},$$
$$(q\otimes\omega)X = -\nabla_X(q)\otimes\omega - q\otimes L_X\omega, \quad X\in\mathcal{C}\mathrm{D}.$$

Нетрудно проверить, что B — эквивалентность категорий левых и правых $\mathcal{C}$-модулей.

По определению $\mathcal{C}$-модуля, для каждого скалярного $\mathcal{C}$-дифференциального оператора $\Delta\colon\mathcal{F}\to\mathcal{F}$ существует его расширение $\Delta_Q\colon Q\to Q$ на модуль Q. По аналогии с леммой 1.16 на с. 13 этот факт можно обобщить: для каждого скалярного $\mathcal{C}$-дифференциального оператора $\Delta\colon P\to S$ существует его расширение $\Delta_Q\colon P\otimes_{\mathcal{F}} Q\to S\otimes_{\mathcal{F}} Q$.

П р е д л о ж е н и е 6.2. *Пусть Q — $\mathcal{C}$-модуль, а P и S — $\mathcal{F}$-модули. Тогда существует единственное отображение*

$$\mathcal{C}\mathrm{Diff}_k(P,S)\to\mathcal{C}\mathrm{Diff}_k(P\otimes_{\mathcal{F}}Q, S\otimes_{\mathcal{F}}Q), \qquad \Delta\mapsto\Delta_Q,$$

удовлетворяющее следующим условиям:

1) *если $P=S=\mathcal{F}$, то это отображение задается структурой $\mathcal{C}$-модуля на Q*,
2) $(\sum_i f_i\Delta_i)_Q = \sum_i f_i(\Delta_i)_Q, \quad f_i\in\mathcal{F}$,
3) *если $\Delta\in\mathcal{C}\mathrm{Diff}_0(P,S)=\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P,S)$, то $\Delta_Q=\Delta\otimes_{\mathcal{F}}\mathrm{id}_Q$*,
4) *если R — $\mathcal{F}$-модуль и $\Delta_1\colon P\to S$, $\Delta_2\colon S\to R$ — $\mathcal{C}$-дифференциальные операторы, то $(\Delta_2\circ\Delta_1)_Q=(\Delta_2)_Q\circ(\Delta_1)_Q$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Единственность очевидна. Чтобы доказать существование, рассмотрим семейство операторов

$$\Delta(p,s^*)\colon\mathcal{F}\to\mathcal{F}, \qquad \Delta(p,s^*)(f)=s^*(\Delta(fp)),$$

где $p\in P$, $s^*\in S^*=\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(S,\mathcal{F})$, $f\in\mathcal{F}$. Ясно, что оператор Δ определяется этим семейством однозначно. Следующее утверждение также очевидно.

У п р а ж н е н и е 6.3. Докажите, что некоторому семейству операторов $\Delta[p,s^*]\in\mathcal{C}\mathrm{Diff}_k(\mathcal{F},\mathcal{F})$, $p\in P$, $s^*\in S^*$, можно сопоставить такой оператор $\Delta\in\mathcal{C}\mathrm{Diff}_k(P,S)$, что $\Delta[p,s^*]=\Delta(p,s^*)$, в том и только в том случае, если

$$\Delta[p,\sum_i f_is_i^*]=\sum_i f_i\Delta[p,s_i^*],$$
$$\Delta[\sum_i f_ip_i,s^*]=\sum_i\Delta[p_i,s^*]f_i.$$

Из этого упражнения следует, что семейство операторов

$$\Delta_Q[p\otimes q,s^*\otimes q^*](f)=q^*(\Delta(p,s^*)_Q(fq))$$

однозначно определяет оператор Δ_Q. □

У п р а ж н е н и е 6.4. Докажите, что $\Delta_{Q_1\otimes Q_2}=(\Delta_{Q_1})_{Q_2}$.

6.2. **Горизонтальный комплекс де Рама.** Рассмотрим комплекс $\mathcal{C}$-дифференциальных операторов $\ldots\to P_{i-1}\xrightarrow{\Delta_i}P_i\xrightarrow{\Delta_{i+1}}P_{i+1}\to\ldots$ Умножив его на $\mathcal{C}$-модуль Q, мы получим, как следует из предложения 6.2, комплекс

$$\ldots\to P_{i-1}\otimes Q\xrightarrow{(\Delta_i)_Q}P_i\otimes Q\xrightarrow{(\Delta_{i+1})_Q}P_{i+1}\otimes Q\to\ldots$$

Применение этой конструкции к горизонтальному комплексу де Рама приводит к *горизонтальному комплексу де Рама с коэффициентами в Q*:

$$0\to Q\xrightarrow{\bar{d}_Q}\bar{\Lambda}^1\otimes_{\mathcal{F}}Q\xrightarrow{\bar{d}_Q}\ldots\xrightarrow{\bar{d}_Q}\bar{\Lambda}^n\otimes_{\mathcal{F}}Q\to 0,$$

где $\bar{\Lambda}^i = \bar{\Lambda}^i(\mathcal{E})$.

Когомологии горизонтального комплекса де Рама с коэффициентами в Q называются *горизонтальными когомологиями* и обозначаются $\bar{H}^i(Q)$.

Упражнение 6.5. Докажите, что дифференциал $\bar{d} = \bar{d}_Q$ может быть также определен равенствами

$$(\bar{d}q)(X) = \nabla_X(q), \quad q \in Q,$$
$$\bar{d}(\omega \otimes q) = \bar{d}\omega \otimes q + (-1)^p \omega \wedge \bar{d}q, \quad \omega \in \bar{\Lambda}^p.$$

Нетрудно увидеть, что любой морфизм $f\colon Q_1 \to Q_2$ $\mathcal{C}$-модулей порождает коцепное отображение комплексов де Рама:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & Q_1 & \xrightarrow{\bar{d}} & \bar{\Lambda}^1 \otimes_{\mathcal{F}} Q_1 & \xrightarrow{\bar{d}} & \dots & \xrightarrow{\bar{d}} & \bar{\Lambda}^n \otimes_{\mathcal{F}} Q_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & Q_2 & \xrightarrow{\bar{d}} & \bar{\Lambda}^1 \otimes_{\mathcal{F}} Q_2 & \xrightarrow{\bar{d}} & \dots & \xrightarrow{\bar{d}} & \bar{\Lambda}^n \otimes_{\mathcal{F}} Q_2 & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Рассмотрим некоторые примеры горизонтальных комплексов де Рама.

Пример 6.9. Горизонтальный комплекс де Рама с коэффициентами в модуле $\bar{\mathcal{J}}^\infty(P)$

$$0 \to \bar{\mathcal{J}}^\infty(P) \xrightarrow{\bar{d}} \bar{\Lambda}^1 \otimes \bar{\mathcal{J}}^\infty(P) \xrightarrow{\bar{d}} \bar{\Lambda}^2 \otimes \bar{\mathcal{J}}^\infty(P) \xrightarrow{\bar{d}} \dots \xrightarrow{\bar{d}} \bar{\Lambda}^n \otimes \bar{\mathcal{J}}^\infty(P) \to 0$$

является обратным пределом *горизонтальных комплексов Спенсера*

$$0 \to \bar{\mathcal{J}}^k(P) \xrightarrow{\bar{S}} \bar{\Lambda}^1 \otimes \bar{\mathcal{J}}^{k-1}(P) \xrightarrow{\bar{S}} \bar{\Lambda}^2 \otimes \bar{\mathcal{J}}^{k-2}(P) \xrightarrow{\bar{S}} \dots, \tag{6.4}$$

где $\bar{S}(\omega \otimes \bar{\jmath}_l(p)) = \bar{d}\omega \otimes \bar{\jmath}_{l-1}(p)$. Как и обычные комплексы Спенсера, они точны в положительных размерностях, и, кроме того,

$$H^0(\bar{\Lambda}^\bullet \otimes \bar{\mathcal{J}}^{k-\bullet}(P)) = P.$$

Напомним, что этот факт следует из рассмотрения коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \bar{\mathrm{S}}^k \otimes P & \longrightarrow & \bar{\mathcal{J}}^k(P) & \longrightarrow & \bar{\mathcal{J}}^{k-1}(P) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\bar{\delta}} & & \downarrow{\scriptstyle\bar{S}} & & \downarrow{\scriptstyle\bar{S}} & & \\
0 & \longrightarrow & \bar{\Lambda}^1 \otimes \bar{\mathrm{S}}^{k-1} \otimes P & \longrightarrow & \bar{\Lambda}^1 \otimes \bar{\mathcal{J}}^{k-1}(P) & \longrightarrow & \bar{\Lambda}^1 \otimes \bar{\mathcal{J}}^{k-2}(P) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\bar{\delta}} & & \downarrow{\scriptstyle\bar{S}} & & \downarrow{\scriptstyle\bar{S}} & & \\
0 & \longrightarrow & \bar{\Lambda}^2 \otimes \bar{\mathrm{S}}^{k-2} \otimes P & \longrightarrow & \bar{\Lambda}^2 \otimes \bar{\mathcal{J}}^{k-2}(P) & \longrightarrow & \bar{\Lambda}^2 \otimes \bar{\mathcal{J}}^{k-3}(P) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\bar{\delta}} & & \downarrow{\scriptstyle\bar{S}} & & \downarrow{\scriptstyle\bar{S}} & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

(см. с. 16).

Упражнение 6.6. Умножьте эту диаграмму на $\mathcal{C}$-модуль Q (возможно, бесконечного ранга) и докажите, что комплекс

$$0 \to \bar{\mathcal{J}}^\infty(P) \mathbin{\widehat{\otimes}} Q \xrightarrow{\bar{d}} \bar{\Lambda}^1 \otimes \bar{\mathcal{J}}^\infty(P) \mathbin{\widehat{\otimes}} Q \xrightarrow{\bar{d}} \dots \xrightarrow{\bar{d}} \bar{\Lambda}^n \otimes \bar{\mathcal{J}}^\infty(P) \mathbin{\widehat{\otimes}} Q \to 0$$

точен в положительных размерностях и, кроме того,

$$H^0(\bar{\Lambda}^\bullet \otimes \bar{\mathcal{J}}^\infty(P) \mathbin{\widehat{\otimes}} Q) = P \otimes Q.$$

Здесь

$$\bar{\mathcal{J}}^\infty(P) \mathbin{\widehat{\otimes}} Q = \varprojlim(\bar{\mathcal{J}}^k(P) \otimes Q).$$

П р и м е р 6.10. Конструкция, двойственная предыдущему примеру, состоит в следующем. В качестве модуля коэффициентов возьмем $\mathcal{C}\mathrm{Diff}(P, \mathcal{F})$. Соответствующий горизонтальный комплекс де Рама, домноженный на некоторый $\mathcal{C}$-модуль Q, имеет вид

$$0 \to \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P, \mathcal{F}) \otimes Q \xrightarrow{\bar{d}} \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P, \bar{\Lambda}^1) \otimes Q \xrightarrow{\bar{d}} \dots \xrightarrow{\bar{d}} \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P, \bar{\Lambda}^n) \otimes Q \to 0.$$

Как и в предыдущем примере легко показать, что

$$H^i(\mathcal{C}\mathrm{Diff}(P, \bar{\Lambda}^\bullet) \otimes Q) = 0 \quad \text{при } i < n,$$
$$H^n(\mathcal{C}\mathrm{Diff}(P, \bar{\Lambda}^\bullet) \otimes Q) = \hat{P} \otimes Q,$$

где $\hat{P} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P, \bar{\Lambda}^n)$.

Этот факт можно использовать для того, чтобы дать определение сопряженного оператора, аналогичное определению 2.1 на с. 21. Для $\mathcal{C}$-дифференциальных операторов остается справедливым предложение 2.1 на с. 21.

П р и м е р 6.11. Возьмем $\mathcal{C}$-модуль

$$Q = \bigoplus_p \mathrm{D}^v(\mathcal{C}^p\Lambda) = \bigoplus_p \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\mathcal{C}^1\Lambda, \mathcal{C}^p\Lambda).$$

Горизонтальный комплекс де Рама с коэффициентами Q может быть записан в следующем виде

$$0 \to \mathrm{D}^v \to \mathrm{D}^v(\Lambda^1) \to \mathrm{D}^v(\Lambda^2) \to \dots$$

П р е д л о ж е н и е 6.3. *Дифференциал $d_{\mathrm{D}^v(\mathcal{C}^p\Lambda)}$ этого комплекса равен $-\partial_{\mathcal{C}}$ (см. с. 66), так что данный комплекс с точностью до знака совпадает с комплексом (5.39).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим некоторое вертикальное поле $Y \in \mathrm{D}^v$ и произвольное векторное поле Z. Из формулы (5.22) на с. 62 следует равенство $\mathrm{i}_Z\partial_{\mathcal{C}}Y = [Z^v - Z, Y]^v$ (ср. с доказательством теоремы 5.12 на с. 66). Следовательно, $\partial_{\mathcal{C}}(\mathrm{D}^v) \subset \mathrm{D}^v \otimes \bar{\Lambda}^1$ и $\partial_{\mathcal{C}}|_{\mathrm{D}^v} = -d_{\mathrm{D}^v}$. Вместе с формулой (5.37) на с. 65 и замечанием 5.5 на с. 66 это доказывает, что $\partial_{\mathcal{C}}(\mathrm{D}^v(\mathcal{C}^p\Lambda) \otimes \bar{\Lambda}^q) \subset \mathrm{D}^v(\mathcal{C}^p\Lambda) \otimes \bar{\Lambda}^{q+1}$ и $\partial_{\mathcal{C}}|_{\mathrm{D}^v(\mathcal{C}^p\Lambda)\otimes\bar{\Lambda}^q} = -d_{\mathrm{D}^v(\mathcal{C}^p\Lambda)}$. □

6.3. **Горизонтальный комплекс совместности.** Рассмотрим некоторый $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор $\Delta\colon P_0 \to P_1$. Дословно повторив конструкцию из §1.4, мы получим *горизонтальный комплекс совместности*

$$P_0 \xrightarrow{\Delta} P_1 \xrightarrow{\Delta_1} P_2 \xrightarrow{\Delta_2} P_3 \xrightarrow{\Delta_3} \dots \tag{6.5}$$

Этот комплекс формально точен (см. конец §1.7).

Рассмотрим $\mathcal{C}$-модуль $\mathcal{R}_\Delta = \ker \psi_\infty^\Delta$ (ср. с примером 6.6 на с. 77). По теореме 1.20 на с. 17 когомологии комплекса (6.5) изоморфны горизонтальным когомологиям с коэффициентами в $\mathcal{R}_\Delta$:

Т е о р е м а 6.4.

$$\bar{H}^i(\mathcal{R}_\Delta) = H^i(P_\bullet).$$

Напомним, что доказательство этой теоремы основано на стандартных рассуждениях из теории спектральных последовательностей, примененных к коммутативной диаграмме

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 \arrow[r] & \bar\Lambda^2 \otimes \bar{\mathcal{J}}^\infty(P_0) \arrow[r] \arrow[u] & \bar\Lambda^2 \otimes \bar{\mathcal{J}}^\infty(P_1) \arrow[r] \arrow[u] & \bar\Lambda^2 \otimes \bar{\mathcal{J}}^\infty(P_2) \arrow[r] \arrow[u] & \dots \\
0 \arrow[r] & \bar\Lambda^1 \otimes \bar{\mathcal{J}}^\infty(P_0) \arrow[r] \arrow[u, "\bar d"'] & \bar\Lambda^1 \otimes \bar{\mathcal{J}}^\infty(P_1) \arrow[r] \arrow[u, "\bar d"'] & \bar\Lambda^1 \otimes \bar{\mathcal{J}}^\infty(P_2) \arrow[r] \arrow[u, "\bar d"'] & \dots \\
0 \arrow[r] & \bar{\mathcal{J}}^\infty(P_0) \arrow[r] \arrow[u, "\bar d"'] & \bar{\mathcal{J}}^\infty(P_1) \arrow[r] \arrow[u, "\bar d"'] & \bar{\mathcal{J}}^\infty(P_2) \arrow[r] \arrow[u, "\bar d"'] & \dots \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

Если мы умножим эту диаграмму на $\mathcal{C}$-модуль Q, то получим следующее равенство:

$$\bar H^i(\mathcal{R}_\Delta \mathbin{\widehat\otimes} Q) = H^i(P_\bullet \otimes Q), \tag{6.6}$$

где $\mathcal{R}_\Delta \mathbin{\widehat\otimes} Q = \varprojlim(\mathcal{R}^l_\Delta \otimes Q)$, а $\mathcal{R}^l_\Delta = \ker \psi^\Delta_{k+l}$, $\operatorname{ord}\Delta \leqslant k$.

Рассмотрим диаграмму, двойственную предыдущей:

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 & \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_0, \bar\Lambda^{n-2}) \arrow[l] \arrow[d, "\bar d"] & \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_1, \bar\Lambda^{n-2}) \arrow[l] \arrow[d, "\bar d"] & \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_2, \bar\Lambda^{n-2}) \arrow[l] \arrow[d, "\bar d"] & \dots \arrow[l] \\
0 & \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_0, \bar\Lambda^{n-1}) \arrow[l] \arrow[d, "\bar d"] & \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_1, \bar\Lambda^{n-1}) \arrow[l] \arrow[d, "\bar d"] & \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_2, \bar\Lambda^{n-1}) \arrow[l] \arrow[d, "\bar d"] & \dots \arrow[l] \\
0 & \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_0, \bar\Lambda^{n}) \arrow[l] \arrow[d] & \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_1, \bar\Lambda^{n}) \arrow[l] \arrow[d] & \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_2, \bar\Lambda^{n}) \arrow[l] \arrow[d] & \dots \arrow[l] \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Как и выше, мы без труда получаем

$$\bar H^i(\mathcal{R}^*_\Delta) = H_{n-i}(\hat P_\bullet)$$

и, более общо,

$$\bar H^i(\mathcal{R}^*_\Delta \otimes Q) = H_{n-i}(\hat P_\bullet \otimes Q), \tag{6.7}$$

где $\mathcal{R}^*_\Delta = \mathrm{Hom}(\mathcal{R}_\Delta, \mathcal{F})$. Гомологии в правых частях этих формул суть гомологии комплекса

$$\hat P_0 \xleftarrow{\Delta^*} \hat P_1 \xleftarrow{\Delta_1^*} \hat P_2 \xleftarrow{\Delta_2^*} \hat P_3 \xleftarrow{\Delta_3^*} \dots,$$

двойственного к комплексу (6.5) на предыдущей странице.

6.4. **Вычисление $\mathcal{C}$-когомологий.** Пусть $\mathcal{E}$ — уравнение,

$$P_0 = \varkappa \xrightarrow{\ell_{\mathcal{E}}} P_1 \xrightarrow{\Delta_1} P_2 \xrightarrow{\Delta_2} P_3 \xrightarrow{\Delta_3} P_4 \xrightarrow{\Delta_4} \dots$$

— комплекс совместности соответствующего оператора универсальной линеаризации, $\varkappa = \mathcal{F}(\mathcal{E}, \pi)$. Возьмем некоторый $\mathcal{C}$-модуль Q.

Теорема 6.5. $\bar H^i(\mathrm{D}^v(Q)) = H^i(P_\bullet \otimes Q)$.

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из равенства (6.6) на предшествующей странице и предложения 3.30 на с. 51. $\square$

Пусть $Q = \mathcal{C}^p\Lambda$. Предыдущая теорема дает метод вычисления групп когомологий $\bar{H}^i(\mathrm{D}^v(\mathcal{C}^p\Lambda))$, которые совпадают с группами $\mathcal{C}$-когомологий:

Следствие 6.6. $\bar{H}^i(\mathrm{D}^v(\mathcal{C}^p\Lambda)) = H^i(P_\bullet \otimes \mathcal{C}^p\Lambda)$.

Опишем последний изоморфизм в явном виде.

Рассмотрим некоторый горизонтальный коцикл $\sum_{i\in I}\omega_i^q \otimes \bar{\jmath}_\infty(s_i) \in \bar{\Lambda}^q \otimes \mathrm{D}^v(\mathcal{C}^p\Lambda)$, где $\omega_i^q \in \bar{\Lambda}^q \otimes \mathcal{C}^p\Lambda$, $s_i \in \varkappa$. Это означает, что

$$\sum_{i\in I}\omega_i^q \otimes \bar{\jmath}_\infty(\ell_\mathcal{E}(s_i)) = 0 \text{ и } \sum_{i\in I}\bar{d}\omega_i^q \otimes \bar{\jmath}_\infty(s_i) = 0.$$

Из второго равенства следует, что существует такой элемент $\sum_{i\in I_1}\omega_i^{q-1} \otimes \bar{\jmath}_\infty(s'_i) \in \bar{\Lambda}^{q-1} \otimes \mathcal{C}^p\Lambda \otimes \bar{\mathcal{J}}^\infty(\varkappa)$, что $\sum_{i\in I_1}\bar{d}\omega_i^{q-1} \otimes \bar{\jmath}_\infty(s'_i) = \sum_{i\in I}\omega_i^q \otimes \bar{\jmath}_\infty(s_i)$. Обозначим $s_i^1 = \ell_\mathcal{E}(s'_i)$. Элемент $\sum_{i\in I_1}\omega_i^{q-1} \otimes \bar{\jmath}_\infty(s_i^1) \in \bar{\Lambda}^{q-1} \otimes \mathcal{C}^p\Lambda \otimes \bar{\mathcal{J}}^\infty(P_1)$ удовлетворяет равенствам

$$\sum_{i\in I_1}\omega_i^{q-1} \otimes \bar{\jmath}_\infty(\Delta_1(s_i^1)) = 0 \text{ и } \sum_{i\in I_1}\bar{d}\omega_i^{q-1} \otimes \bar{\jmath}_\infty(s_i^1) = 0.$$

Продолжая это процесс, мы получим такие элементы $\sum_{i\in I_l}\omega_i^{q-l} \otimes \bar{\jmath}_\infty(s_i^l) \in \bar{\Lambda}^{q-l} \otimes \mathcal{C}^p\Lambda \otimes \bar{\mathcal{J}}^\infty(P_l)$, что

$$\sum_{i\in I_l}\omega_i^{q-l} \otimes \bar{\jmath}_\infty(\Delta_l(s_i^l)) = 0 \text{ и } \sum_{i\in I_l}\bar{d}\omega_i^{q-l} \otimes \bar{\jmath}_\infty(s_i^l) = 0.$$

При $l = q$ эти формулы означают, что элемент $\sum_{i\in I_q}\omega_i^0 \otimes \bar{\jmath}_\infty(s_i^q)$ отвечает некоторому элементу модуля $P_q \otimes \mathcal{C}^p\Lambda$ лежащему в ядре оператора Δ_{q+1}. Этот элемент порождает класс когомологий в группе $H^q(P_\bullet \otimes \mathcal{C}^p\Lambda)$, отвечающий выбранному элементу модуля $\bar{\Lambda}^q \otimes \mathrm{D}^v(\mathcal{C}^p\Lambda)$.

Из наших результатов вытекает, что если при некотором k имеют место равенства $P_k = P_{k+1} = P_{k+2} = \ldots = 0$, т. е. комплекс совместности имеет вид

$$P_0 = \varkappa \xrightarrow{\ell_\mathcal{E}} P_1 \xrightarrow{\Delta_1} P_2 \xrightarrow{\Delta_2} P_3 \xrightarrow{\Delta_3} \ldots \xrightarrow{\Delta_{k-2}} P_{k-1} \to 0,$$

то

$$H^i(\mathrm{D}^v(\mathcal{C}^p\Lambda)) = 0 \quad \text{при } i \geqslant k.$$

Этот результат известен как *теорема о k строчках* для $\mathcal{C}$-когомологий.

Чему равно k для дифференциальных уравнений, встречающихся в математической физике? Существование оператора совместности Δ_1 обычно означает, что рассматриваемые уравнения зависимы: $\Delta_1(F) = 0$, $\mathcal{E} = \{F = 0\}$. На практике, большинство уравнений независимы, и для них $k = 2$. Такие системы уравнений называются *ℓ-нормальными*. Для ℓ-нормальных уравнений выполняется *теорема о двух строчках*:

Теорема 6.7 (теорема о двух строчках). *Пусть $\mathcal{E}$ — ℓ-нормальное уравнение. Тогда*:

1) $H^i(\mathrm{D}^v(\mathcal{C}^p\Lambda)) = 0$ *для* $i \geqslant 2$,
2) $H^0(\mathrm{D}^v(\mathcal{C}^p\Lambda)) = \ker(\ell_\mathcal{E})_{\mathcal{C}^p\Lambda}$,
3) $H^1(\mathrm{D}^v(\mathcal{C}^p\Lambda)) = \operatorname{coker}(\ell_\mathcal{E})_{\mathcal{C}^p\Lambda}$.

Далее, случай $k > 2$ встречается в калибровочных теориях, где зависимости $\Delta_1(F) = 0$ возникают в силу второй теоремы Нётер (см. с. 95). В обычных неприводимых калибровочных теориях, таких как электромагнетизм, модели Янга–Миллса, гравитация Эйнштейна, тождества Нётер независимы, так что оператор Δ_2 тривиален и, таким образом, $k = 3$. Наконец, для калибровочных теорий L-го уровня приводимости (L-th stage reducible gauge theories) $k = L + 3$.

Замечание 6.2. Для «пустого» уравнения $J^\infty(\pi)$ из следствия 6.6 вытекает теорема 5.13 на с. 67 (*теорема об одной строчке*).

6.5. **Пример: эволюционные уравнения.** Рассмотрим произвольное эволюционное уравнение $\mathcal{E} = \{F = u_t - f(x, t, u_i) = 0\}$ с независимыми переменными x, t и зависимой переменной u. Здесь u_i обозначает i-ю производную от u по x.

Естественными координатами на $\mathcal{E}^\infty$ служат (x, t, u_i). Операторы полных производных D_x и D_t на $\mathcal{E}^\infty$ имеют вид

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_i u_{i+1} \frac{\partial}{\partial u_i}, \quad D_t = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_i D_x^i(f) \frac{\partial}{\partial u_i}.$$

Оператор универсальной линеаризации задается формулой

$$\ell_{\mathcal{E}} = D_t - \ell_f = D_t - \sum_i \frac{\partial f}{\partial u_i} D_x^i.$$

Очевидно, что для любого эволюционного уравнения имеет место теорема о двух строчках, следовательно $\mathcal{C}$-когомологии $\bar{H}^q(\mathrm{D}^v(\mathcal{C}^p\Lambda))$ тривиальны при $q \geqslant 2$. Предположим теперь, что порядок уравнения $\mathcal{E}$ не меньше 2, т. е. $\operatorname{ord} \ell_f \geqslant 2$. В этом случае имеет место следующий результат.

Теорема 6.8. *Для любого эволюционного уравнения порядка $\geqslant 2$, выполняются равенства*

$$\bar{H}^0(\mathrm{D}^v(\mathcal{C}^p\Lambda)) = 0 \quad \textit{for } p \geqslant 2.$$

Доказательство. Из теоремы 6.7 на предшествующей странице следует, что $\bar{H}^0(\mathrm{D}^v(\mathcal{C}^p\Lambda)) = \ker(\ell_{\mathcal{E}})_{\mathcal{C}^p\Lambda}$. Значит, для доказательства теоремы достаточно проверить, что уравнение

$$(D_t - \ell_f)(\omega) = 0, \tag{6.8}$$

где $\omega \in \mathcal{C}^p\Lambda$, имеет при $p \geqslant 2$ только тривиальные решения.

Для этого рассмотрим символ уравнения (6.8). Положим $\operatorname{smbl}(D_x) = \theta$. Символ оператора ℓ_f имеет вид $\operatorname{smbl}(\ell_f) = g\theta^k$, $k = \operatorname{ord} \ell_f \geqslant 2$, где $g = \dfrac{\partial f}{\partial u_k}$. Произвольный элемент $\omega \in \mathcal{C}^p\Lambda$ можно отождествить с полилинейным $\mathcal{C}$-дифференциальным оператором, поэтому символ ω является однородным полиномом от p переменных $\operatorname{smbl}(\omega) = \delta(\theta_1, \dots, \theta_p)$. Из уравнения (6.8) получаем:

$$[g(\theta_1^k + \dots + \theta_p^k) - g(\theta_1 + \dots + \theta_p)^k] \cdot \delta(\theta_1, \dots, \theta_p) = 0.$$

Из того, что $k \geqslant 2$ и $p \geqslant 2$ с очевидностью следует, что $\delta(\theta_1, \dots, \theta_p) = 0$. Теорема доказана. $\square$

Замечание 6.3. Эта теорема имеет обобщение на случай определенных систем эволюционных уравнений с произвольным числом независимых переменных (см. [30]).

7.1. **Определение $\mathcal{C}$-спектральной последовательности Виноградова.** Пусть $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ — формально интегрируемое уравнение. Рассмотрим идеал $\mathcal{C}\Lambda^* = \mathcal{C}\Lambda^*(\mathcal{E})$ во внешней алгебре $\Lambda^*(\mathcal{E})$ дифференциальных форм на $\mathcal{E}^\infty$, порожденный подмодулем Картана $\mathcal{C}^1\Lambda(\mathcal{E})$ (см. с. 45): $\mathcal{C}\Lambda^* = \mathcal{C}^1\Lambda(\mathcal{E}) \wedge \Lambda^*(\mathcal{E})$. Очевидно, что этот идеал и все его степени $(\mathcal{C}\Lambda^*)^{\wedge s} = \mathcal{C}^s\Lambda \wedge \Lambda^*$, где $\mathcal{C}^s\Lambda = \underbrace{\mathcal{C}^1\Lambda \wedge \ldots \wedge \mathcal{C}^1\Lambda}_{s \text{ сомножителей}}$, устойчив относительно оператора d, т. е.

$$d((\mathcal{C}\Lambda^*)^{\wedge s}) \subset (\mathcal{C}\Lambda^*)^{\wedge s}.$$

Таким образом, в комплексе де Рама на $\mathcal{E}^\infty$ имеется фильтрация

$$\Lambda^* \supset \mathcal{C}\Lambda^* \supset (\mathcal{C}\Lambda^*)^{\wedge 2} \supset \ldots \supset (\mathcal{C}\Lambda^*)^{\wedge s} \supset \ldots$$

Спектральная последовательность $(E_r^{p,q}, d_r^{p,q})$, порожденная этой фильтрацией, называется *$\mathcal{C}$-спектральной последовательностью Виноградова* уравнения $\mathcal{E}$. Здесь, как обычно, p — фильтрационная степень, а $p+q$ — полная степень.

Из разложения (3.40) на с. 45 следует, что $E_0^{p,q}$ можно отождествить с $\mathcal{C}^p\Lambda \otimes \bar{\Lambda}^q$.

Упражнение 7.1. Докажите, что при таком отождествлении оператор $d_0^{p,q}$ совпадает с горизонтальным дифференциалом де Рама $\bar{d}_{\mathcal{C}^p\Lambda}$ с коэффициентами в $\mathcal{C}^p\Lambda$ (ср. с примером 6.3 на с. 77).

Таким образом, $\mathcal{C}$-спектральная последовательность Виноградова совпадает с одной из спектральных последовательностей бикомплекса $(\mathcal{C}^p\Lambda \otimes \bar{\Lambda}^q), \bar{d}, d_{\mathcal{C}})$, построенного в §3.8 на с. 45.

Замечание 7.1. Вторая спектральная последовательность вариационного бикомплекса совпадает со спектральной последовательностью Лере–Серра когомологий де Рама расслоения $\mathcal{E}^\infty \to M$.

Замечание 7.2. Определение $\mathcal{C}$-спектральной последовательности Виноградова, приведенное выше, применимо к любому объекту категории *Inf* (см. с. 52), в то время как вариационный бикомплекс существует лишь на бесконечно продолженном уравнении.

Упражнение 7.2. Докажите, что морфизм $F\colon \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ в категории *Inf* порождает гомоморфизм $\mathcal{C}$-спектральной последовательности Виноградова на $\mathcal{N}_2$ в $\mathcal{C}$-спектральную последовательность на $\mathcal{N}_1$.

7.2. **Член E_1 на $J^\infty(\pi)$.** Рассмотрим член E_1 $\mathcal{C}$-спектральной последовательности Виноградова на «пустом» уравнении $\mathcal{E}^\infty = J^\infty(\pi)$.

По определению, первый член E_1 любой спектральной последовательности состоит из когомологий ее нулевого члена E_0. Таким образом, чтобы описать члены $E_1^{p,q}(\pi)$ необходимо вычислить когомологии комплексов

$$0 \to \mathcal{C}^p\Lambda(\pi) \xrightarrow{\bar{d}} \mathcal{C}^p\Lambda(\pi) \otimes \bar{\Lambda}^1(\pi) \xrightarrow{\bar{d}} \ldots \xrightarrow{\bar{d}} \mathcal{C}^p\Lambda(\pi) \otimes \bar{\Lambda}^n(\pi) \to 0.$$

С помощью предложения 3.30 на с. 51 эти комплексы можно переписать в следующем виде:

$$0 \to \mathcal{C}\mathrm{Diff}_{(p)}^{\mathrm{alt}}(\varkappa(\pi), \mathcal{F}(\pi)) \xrightarrow{w} \mathcal{C}\mathrm{Diff}_{(p)}^{\mathrm{alt}}(\varkappa(\pi), \bar{\Lambda}^1(\pi)) \xrightarrow{w} \ldots \xrightarrow{w} \mathcal{C}\mathrm{Diff}_{(p)}^{\mathrm{alt}}(\varkappa(\pi), \bar{\Lambda}^n(\pi)) \to 0,$$

где $w(\Delta) = (-1)^p \bar{d} \circ \Delta$.

Теперь из теоремы 2.8 на с. 25 получается следующее описание члена E_1 на $J^\infty(\pi)$:

Теорема 7.1. *Пусть π — гладкое векторное расслоение над многообразием M, $\dim M = n$. Тогда*:

1) $E_1^{0,q}(\pi) = \bar{H}^q(\pi)$ *при всех* $q \geqslant 0$;
2) $E_1^{p,q}(\pi) = 0$ *при* $p > 0$, $q \neq n$;
3) $E_1^{p,n}(\pi) = L_p^{\mathrm{alt}}(\varkappa(\pi))$, $p > 0$,

определение модуля $L_p^{\mathrm{alt}}(\varkappa(\pi))$ приведено в теореме 2.8 на с. 25.

Поскольку $\mathcal{C}$-спектральная последовательность Виноградова сходится к когомологиям де Рама многообразия $J^\infty(\pi)$, из этой теоремы вытекает следующее

С л е д с т в и е 7.2. *Для любого векторного расслоения π на n-мерном гладком многообразии M члены $\mathcal{C}$-спектральной последовательности Виноградова удовлетворяют следующим условиям*:

1) $E_r^{p,q}(\pi) = 0$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$, *если* $p > 0$, $q \neq n$ *или* $p = 0$, $q > n$;
2) $E_1^{0,q}(\pi) = E_\infty^{0,q}(\pi) = H^q(J^\infty(\pi)) = H^q(J^0(\pi)) = H^q(M)$, $q < n$;
3) $E_2^{0,n}(\pi) = E_\infty^{0,n}(\pi) = H^n(J^\infty(\pi)) = H^n(J^0(\pi)) = H^n(M)$.
4) $E_2^{p,n}(\pi) = E_\infty^{p,n}(\pi) = H^{p+n}(J^\infty(\pi)) = H^{p+n}(J^0(\pi)) = 0$, $p > 0$.

У п р а ж н е н и е 7.3. Докажите, что $H^q(J^\infty(\pi)) = H^q(J^0(\pi))$.

Обратимся теперь к дифференциалам $d_1^{p,n}$. Они порождены дифференциалом Картана $d_{\mathcal{C}}$. При $p = 0$ справедливо равенство $d_{\mathcal{C}}(\omega) = \ell_\omega$, $\omega \in \bar{\Lambda}^n$. (Отметим, что выражение ℓ_ω корректно, т. к. ω — горизонтальная форма, т. е. нелинейный оператор из $\Gamma(\pi)$ в $\Lambda^n(M)$.) Поэтому оператор

$$E_1^{0,n}(\pi) = \bar{H}^n(\pi) \xrightarrow{d_1^{0,n}} E_1^{1,n}(\pi) = \hat{\varkappa}(\pi)$$

задается формулой $d_1^{0,n}([\omega]) = \mu(\ell_\omega) = \ell_\omega^*(1)$, где $\omega \in \bar{\Lambda}^n(\pi)$, $[\omega]$ — класс горизонтальных когомологий формы ω.

У п р а ж н е н и е 7.4. Выпишите оператор $d_1^{0,n}$ в координатах и покажите, что он совпадает со стандартным оператором Эйлера, т. е. с оператором, который каждому лагранжиану ставит в соответствие соответствующее уравнение Эйлера–Лагранжа.

Вычислим теперь операторы $d_1^{p,n}$, $p > 0$.

Рассмотрим элемент $\nabla \in L_p^{\mathrm{alt}}(\varkappa(\pi))$ и определим оператор $\square \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}_{(p+1)}(\varkappa(\pi), \bar{\Lambda}^n(\pi))$ формулой

$$\begin{aligned}\square(\chi_1, \dots, \chi_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} \mathcal{Э}_{\chi_i}(\nabla(\chi_1, \dots, \hat{\chi}_i, \dots, \chi_{p+1})) + \\ + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant p+1} (-1)^{i+j} \nabla(\{\chi_i, \chi_j\}, \chi_1, \dots, \hat{\chi}_i, \dots, \hat{\chi}_j, \dots, \chi_{p+1}).\end{aligned} \qquad (7.1)$$

У п р а ж н е н и е 7.5. Докажите, что $d_1^{p,n}(\nabla) = \mu_{(p+1)}(\square)$ (определение $\mu_{(p+1)}$ см. на с. 25).

З а м е ч а н и е 7.3. Совершенно ясно, что этот факт есть следствие стандартной формулы для внешнего дифференциала. Надо лишь показать, что использование этой формулы законно даже в том случае, когда оператор $\nabla \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}_{(p)}(\varkappa, \bar{\Lambda}^n)$ не является кососимметрическим.

Из формулы (7.1) на предыдущей странице следует, что

$$\square(\chi_1,\dots,\chi_{p+1})=\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\ni_{\chi_i}(\nabla(\chi_1,\dots,\hat{\chi}_i,\dots,\chi_p))(\chi_{p+1})+$$
$$+\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\nabla(\chi_1,\dots,\hat{\chi}_i,\dots,\chi_p,\ni_{\chi_i}(\chi_{p+1}))+$$
$$+(-1)^p\ni_{\chi_{p+1}}(\nabla(\chi_1,\dots,\chi_p))+$$
$$+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant p}(-1)^{i+j}\nabla(\{\chi_i,\chi_j\},\chi_1,\dots,\hat{\chi}_i,\dots,\hat{\chi}_j,\dots,\chi_{p+1})+$$
$$+\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+p+1}\nabla(\{\chi_i,\chi_{p+1}\},\chi_1,\dots,\hat{\chi}_i,\dots,\chi_p)=$$
$$=\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\ni_{\chi_i}(\nabla(\chi_1,\dots,\hat{\chi}_i,\dots,\chi_p))(\chi_{p+1})+$$
$$+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant p}(-1)^{i+j}\nabla(\{\chi_i,\chi_j\},\chi_1,\dots,\hat{\chi}_i,\dots,\hat{\chi}_j,\dots,\chi_{p+1})+$$
$$+\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\nabla(\chi_1,\dots,\hat{\chi}_i,\dots,\chi_p,\ell_{\chi_i}(\chi_{p+1}))+(-1)^p\ell_{\nabla(\chi_1,\dots,\chi_p)}(\chi_{p+1}).$$

Поэтому

$$d_1^{p,n}(\nabla)(\chi_1,\dots,\chi_p)=\mu_{(p+1)}(\square)(\chi_1,\dots,\chi_p)=$$
$$=\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\ni_{\chi_i}(\nabla(\chi_1,\dots,\hat{\chi}_i,\dots,\chi_p))+$$
$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\nabla(\{\chi_i,\chi_j\},\chi_1,\dots,\hat{\chi}_i,\dots,\hat{\chi}_j,\dots,\chi_p)+$$
$$+\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\ell^*_{\chi_i}(\nabla(\chi_1,\dots,\hat{\chi}_i,\dots,\chi_p))+(-1)^p\ell^*_{\nabla(\chi_1,\dots,\chi_p)}(1). \quad (7.2)$$

У п р а ж н е н и е 7.6. Докажите, что

$$\ell^*_{\psi(\varphi)}(1)=\ell^*_\psi(\varphi)+\ell^*_\varphi(\psi),\qquad \varphi\in\varkappa(\pi),\quad \psi\in\hat{\varkappa}(\pi).$$

Перепишем, используя эту формулу, последний член равенства (7.2) в следующем виде:

$$(-1)^p\ell^*_{(\nabla(\chi_1,\dots,\chi_p))}(1)=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}(-1)^i(\ell^*_{(\nabla(\chi_1,\dots,\hat{\chi}_i,\dots,\chi_p,\chi_i))}(1)=$$
$$=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}(-1)^i(\ell^*_{\nabla(\chi_1,\dots,\hat{\chi}_i,\dots,\chi_p)}(\chi_i)+\ell^*_{\chi_i}(\nabla(\chi_1,\dots,\hat{\chi}_i,\dots,\chi_p))).$$

В итоге, получаем

$$\left(d_1^{p,n}(\nabla)\right)(\chi_1,\dots,\chi_p)=\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\ni_{\chi_i}(\nabla(\chi_1,\dots,\hat{\chi}_i,\dots,\chi_p))+$$
$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\nabla(\{\chi_i,\chi_j\},\chi_1,\dots,\hat{\chi}_i,\dots,\hat{\chi}_j,\dots,\chi_p)+$$
$$+\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}((p-1)\ell^*_{\chi_i}(\nabla(\chi_1,\dots,\hat{\chi}_i,\dots,\chi_p))-\ell^*_{\nabla(\chi_1,\dots,\hat{\chi}_i,\dots,\chi_p)}(\chi_i)).$$

В частности, для $p=1$ имеем $d_1^{1,n}(\psi)(\varphi) = \mathcal{Э}_\varphi(\psi) - \ell_\psi^*(\varphi) = \ell_\psi(\varphi) - \ell_\psi^*(\varphi)$, $\psi \in \hat{\varkappa}(\pi)$, $\varphi \in \varkappa(\pi)$, т. е.

$$d_1^{1,n}(\psi) = \ell_\psi - \ell_\psi^*.$$

Рассмотрим следующий комплекс, который называется (глобальным) *вариационным комплексом*:

$$0 \to \mathcal{F}(\pi) \xrightarrow{\bar{d}} \bar{\Lambda}^1(\pi) \xrightarrow{\bar{d}} \ldots \xrightarrow{\bar{d}} \bar{\Lambda}^n(\pi) \xrightarrow{\mathbf{E}} E_1^{1,n}(\pi) \xrightarrow{d_1^{1,n}} E_1^{2,n}(\pi) \xrightarrow{d_1^{2,n}} \ldots,$$

где оператор $\mathbf{E}$ равен композиции естественной проекции $\bar{\Lambda}^n(\pi) \to \bar{H}^n(\pi)$ и оператора $\bar{H}^n(\pi) \xrightarrow{d_1^{0,n}} E_1^{1,n}(\pi)$[15].

Из следствия 7.2 на с. 85 вытекает, что когомологии этого комплекса совпадают с когомологиями $H^*(J^0(\pi))$.

Оператор $\mathbf{E}$ — оператор Эйлера (см. упражнение 7.4 на с. 85). Он переводит любую лагранжеву плотность $\omega \in \Lambda_0^n(\pi)$ в левую часть соответствующего уравнения Эйлера–Лагранжа $\mathbf{E}(\omega) = 0$. Таким образом, функционал действия

$$s \mapsto \int_M j_\infty(s)^*(\omega), \qquad s \in \Gamma(\pi),$$

стационарен на сечении s тогда и только тогда, когда $j_\infty(s)^*\left(\mathbf{E}(\omega)\right) = 0$.

Если когомологии пространства $J^0(\pi)$ тривиальны, то вариационный комплекс точен. Отсюда сразу вытекает ряд следствий. Приведем три важнейших:

1) $\ker \mathbf{E} = \operatorname{im} \bar{d}$ («если вариационная производная лагранжиана равна нулю, то он является дивергенцией»);
2) $\bar{d}\omega = 0$ тогда и только тогда, когда форма ω имеет вид $\omega = \bar{d}\eta$, $\omega \in \bar{\Lambda}^{n-1}(\pi)$ («все нулевые дивергенции суть полные роторы»);
3) $\ell_\psi = \ell_\psi^*$ тогда и только тогда, когда форма ψ имеет вид $\psi = \mathbf{E}(\omega)$, $\psi \in \hat{\varkappa}(\pi)$ (это утверждение составляет решение обратной задачи вариационного исчисления).

Предположим теперь, что имеется такой элемент $\psi \in \hat{\varkappa}(\pi)$, что $\ell_\psi = \ell_\psi^*$. Как найти такой лагранжиан ω, что $\psi = \mathbf{E}(\omega)$? Для этого возьмем некоторое однопараметрическое семейство послойных преобразований $G_t \colon E \to E$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, тотального пространства расслоения $\pi \colon E \to M$, причем предположим, что $G_0 = 0$ и $G_1 = \mathrm{id}_E$. Рассмотрим соответствующее семейство эволюционных векторных полей $\mathcal{Э}_{\varphi_t}$, т. е.

$$\frac{d}{dt} G_t^{(\infty)*} = G_t^{(\infty)*} \circ \mathcal{Э}_{\varphi_t}$$

при $t > 0$. Вычислим соответствующую производную Ли $\mathcal{Э}_{\varphi_t}(\psi)$ (которая отличается от обычной «покомпонентной» производной). Возьмем форму $\Omega \in \bar{\Lambda}^n \otimes \mathcal{C}^1\Lambda$, $d\Omega = 0$, которая отвечает элементу ψ. Тогда $\mathcal{Э}_{\varphi_t}(\Omega) = d_{\mathcal{C}}(\Omega(\mathcal{Э}_{\varphi_t}))$. Следовательно

$$\frac{d}{dt} G_t^{(\infty)*}(\psi) = \mathbf{E}(G_t^{(\infty)*}(\psi(\varphi_t))),$$

и интегрирование по t приводит к следующей *формуле гомотопии* (или *обратной формуле*):

$$\psi = \mathbf{E}\left(\int_0^1 G_t^{(\infty)*}(\psi(\varphi_t))\, dt\right).$$

Пусть, например, $G_t(e_x) = te_x$, $e_x \in E_x = \pi^{-1}(x)$. Тогда $\varphi_t^i = \dfrac{u^i}{t}$, и мы получаем

$$\psi = \mathbf{E}\left(\int_0^1 \sum_i u^i \psi^i(x, tu_\sigma^j)\, dt\right).$$

[15] Ниже обозначение $\mathbf{E}$ используется также для оператора $d_1^{0,n} \colon \bar{H}^n(\pi) \to E_1^{1,n}(\pi)$.

Упражнение 7.7. Пусть $\Delta \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P, \bar{\Lambda}^n(\pi))$. Используя формулу Грина (см. с. 24) и упражнение 7.6 на с. 86, докажите, что при всех $p \in P$ имеет место формула

$$\mathbf{E}(\Delta(p)) = \ell_p^*(\Delta^*(1)) + \ell_{\Delta^*(1)}^*(p).$$

Выведите отсюда равенство

$$\mathbf{E}(\partial_\varphi(\omega)) = \partial_\varphi(\mathbf{E}(\omega)) + \ell_\varphi^*(\mathbf{E}(\omega)),$$

где $\varphi \in \varkappa(\pi)$ и $\omega \in \bar{\Lambda}^n(\pi)$.

Упражнение 7.8. Пусть $J = (J_0, J_1, \ldots, J_n)$ — сохраняющийся ток для некоторого эволюционного уравнения $\mathcal{E} = \{u_t = f(t, x, u, u_x, u_{xx}, \ldots)\}$. Покажите, используя предыдущее упражнение, что вектор-функция $\psi = \mathbf{E}(J_0)$, где J_0 — t-компонента сохраняющегося тока, рассматриваемая как функция от переменных $(t, x, u, u_x, u_{xx}, \ldots)$, удовлетворяет уравнению

$$D_t(\psi) + \ell_f^*(\psi) = 0$$

(ср. с теоремой 7.11 на с. 92).

7.3. **Член E_1 для уравнения.** Пусть $\mathcal{E}$ — уравнение,

$$P_0 = \varkappa \xrightarrow{\ell_\mathcal{E}} P_1 \xrightarrow{\Delta_1} P_2 \xrightarrow{\Delta_2} P_3 \xrightarrow{\Delta_3} P_4 \xrightarrow{\Delta_4} \ldots$$

— комплекс совместности оператора универсальной линеаризации и

$$\hat{P}_0 = \hat{\varkappa} \xleftarrow{\ell_E^*} \hat{P}_1 \xleftarrow{\Delta_1^*} \hat{P}_2 \xleftarrow{\Delta_2^*} \hat{P}_3 \xleftarrow{\Delta_3^*} \hat{P}_4 \xleftarrow{\Delta_4^*} \ldots$$

— двойственный комплекс. Возьмем некоторый $\mathcal{C}$-модуль Q.

Теорема 7.3. *Для всех уравнений $\mathcal{E}$ и $\mathcal{C}$-модулей Q выполняется равенство*

$$\bar{H}^{n-i}(\mathcal{C}^1\Lambda \otimes Q) = H_i(\hat{P}_\bullet \otimes Q).$$

Доказательство. Требуемое утверждение непосредственно следует из равенства (6.7) на с. 81 и предложения 3.30 на с. 51. □

Пусть $Q = \mathcal{C}^p\Lambda$. Доказанная теорема позволяет вычислять $\mathcal{C}$-спектральную последовательность Виноградова. Именно, поскольку член $E_1^{p,q} = \bar{H}^q(\mathcal{C}^p\Lambda)$ $\mathcal{C}$-спектральной последовательности Виноградова является прямым слагаемым в группе когомологий $\bar{H}^q(\mathcal{C}^1\Lambda \otimes \mathcal{C}^{p-1}\Lambda)$, мы получаем описание первого члена $\mathcal{C}$-спектральной последовательности Виноградова. Таким образом:

Следствие 7.4. *Член $E_1^{p,q}$ $\mathcal{C}$-спектральной последовательности Виноградова является кососимметрической частью группы $H_{n-q}(\hat{P}_\bullet \otimes \mathcal{C}^{p-1}\Lambda)$.*

Полезно описать явно изоморфизм, установленный в этом следствии.

Рассмотрим оператор $\nabla \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(\varkappa, \bar{\Lambda}^q \otimes \mathcal{C}^{p-1}\Lambda)$, соответствующий какому-то элементу члена $E_1^{p,q}$. Это означает, что

$$\bar{d} \circ \nabla = \nabla_1 \circ \ell_\mathcal{E}$$

для некоторого оператора $\nabla_1 \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_1, \bar{\Lambda}^{q+1} \otimes \mathcal{C}^{p-1}\Lambda)$. Если мы применим оператор $\bar{d}$ к обеим частям этой формулы и воспользуемся упражнениями 1.3 на с. 11 и 1.10 на с. 19, то получим

$$\bar{d} \circ \nabla_1 = \nabla_2 \circ \Delta_1$$

для некоторого оператора $\nabla_2 \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_2, \bar{\Lambda}^{q+2} \otimes \mathcal{C}^{p-1}\Lambda)$. Продолжив этот процесс, мы получим операторы $\nabla_i \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_i, \bar{\Lambda}^{q+i} \otimes \mathcal{C}^{p-1}\Lambda)$, $i = 1, 2, \ldots, n-q$, удовлетворяющие равенствам

$$\bar{d} \circ \nabla_{i-1} = \nabla_i \circ \Delta_{i-1}.$$

При $i = n - q$ эта формула означает, что $\nabla_{n-q} \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_{n-q}, \bar{\Lambda}^n \otimes \mathcal{C}^{p-1}\Lambda)$ задает элемент модуля $\hat{P}_{n-q} \otimes \mathcal{C}^{p-1}\Lambda$, лежащий в ядре оператора Δ_{n-q-1}^*. Этот элемент как раз и порождает тот класс когомологий, который отвечает выбранному элементу в члене $E_1^{p,q}$.

Если длина комплекса совместности равна k,

$$P_0 = \varkappa \xrightarrow{\ell_E} P_1 \xrightarrow{\Delta_1} P_2 \xrightarrow{\Delta_2} P_3 \xrightarrow{\Delta_3} \ldots \xrightarrow{\Delta_{k-2}} P_{k-1} \to 0,$$

то $E_1^{p,q} = 0$ при $p > 0$ и $q \leqslant n - k$. Это утверждение называется *теоремой о k строчках* для $\mathcal{C}$-спектральной последовательности Виноградова.

В случае $k = 2$, т. е. для ℓ-нормальных уравнений, имеет место *теорема о двух строчках*:

Теорема 7.5 (теорема о двух строчках). *Пусть $\mathcal{E}$ — ℓ-нормальное дифференциальное уравнение. Тогда*:

1) $E_1^{p,q} = 0$ *при* $p > 0$ *и* $q \leqslant n - 2$,
2) $E_1^{p,n-1} \subset \ker(\ell_E^*)_{\mathcal{C}^{p-1}\Lambda}$ *при* $p > 0$,
3) $E_1^{p,n} \subset \operatorname{coker}(\ell_E^*)_{\mathcal{C}^{p-1}\Lambda}$ *при* $p > 0$.

Эта теорема имеет следующее элементарное следствие.

Следствие 7.6. *Члены $E_r^{p,q}(\mathcal{E})$ $\mathcal{C}$-спектральной последовательности Виноградова удовлетворяют следующим равенствам*:

1) $E_r^{p,q}(\mathcal{E}) = 0$ *если* $p \geqslant 1$, $q \neq n - 1, n$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$;
2) $E_3^{p,q}(\mathcal{E}) = E_\infty^{p,q}(\mathcal{E})$;
3) $E_1^{0,q}(\mathcal{E}) = E_\infty^{0,q}(\mathcal{E}) = H^q(\mathcal{E}^\infty)$, $q \leqslant n - 2$;
4) $E_2^{0,n-1}(\mathcal{E}) = E_\infty^{0,n-1}(\mathcal{E}) = H^{n-1}(\mathcal{E}^\infty)$;
5) $E_2^{1,n-1}(\mathcal{E}) = E_\infty^{1,n-1}(\mathcal{E})$.

Пример 7.1. Для эволюционного уравнения $\mathcal{E} = \{F = u_t - f(x, t, u, u_x, u_{xx} \dots) = 0\}$ из теоремы о двух строчках следует, что $\mathcal{C}$-спектральная последовательность Виноградова тривиальна при $q \neq 1, 2$, $p > 0$. Кроме того, рассуждая также как в примере 6.5 на с. 83, можно показать, что $E_1^{p,1} = 0$ при $p \geqslant 3$.

7.4. **Пример: абелевы теории с p-формами.** Пусть M — (псевдо)риманово многообразие и $\pi\colon E \to M$ — p-я внешняя степень кокасательного расслоения над M, так что сечения расслоения π суть p-формы на M. Очевидно, что на пространстве джетов $J^\infty(\pi)$ существует единственная горизонтальная форма $A \in \bar\Lambda^p(J^\infty(\pi))$ определяемая свойством $j_\infty^*(\omega)(A) = \omega$ при всех $\omega \in \Lambda^p(M)$. Рассмотрим уравнение $\mathcal{E} = \{F = 0\}$, где $F = \bar d{*}\bar dA$, а $*$ — оператор Ходжа. Наша цель состоит в вычислении членов $E_1^{i,q}(\mathcal{E})$ $\mathcal{C}$-спектральной последовательности Виноградова при $q \leqslant n - 2$. Будем предполагать, что $1 \leqslant p < n - 1$ и что многообразие M топологически тривиально.

Ясно, что $P_0 = \varkappa = \bar\Lambda^p$, $P_1 = \bar\Lambda^{n-p}$ и $\ell_{\mathcal{E}} = \bar d{*}\bar d\colon \bar\Lambda^p \to \bar\Lambda^{n-p}$. В примере 1.2 на с. 19 был вычислен комплекс совместности оператора $\ell_{\mathcal{E}}$:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\bar\Lambda^p & \xrightarrow{\ell_{\mathcal{E}}} & \bar\Lambda^{n-p} & \xrightarrow{\bar d} & \bar\Lambda^{n-p+1} & \xrightarrow{\bar d} & \dots & \xrightarrow{\bar d} & \bar\Lambda^n & \longrightarrow & 0 \\
\| & & \| & & \| & & & & \| & & \\
P_0 & & P_1 & & P_2 & & & & P_{k-1} & &
\end{array}
\tag{7.3}
$$

Таким образом, $k = p+2$, и теорема о k строчках показывает, что $E_1^{i,q} = 0$ при $i > 0$ и $q < n-p-1$. Поскольку $\mathcal{C}$-спектральная последовательность Виноградова сходится к когомологиям де Рама многообразия $\mathcal{E}^\infty$, тривиальным в рассматриваемой ситуации, мы заключаем, что $E_1^{0,q} = 0$ при $0 < q < n - p - 1$ и $\dim E_1^{0,0} = 1$, т. е. $\bar H^1 = \bar H^2 = \dots = \bar H^{n-p-2} = 0$ и $\dim \bar H^0 = 1$. Далее, рассмотрим члены $E_1^{i,q}$ при $n - p - 1 \leqslant q < 2(n - p - 1)$ и $i > 0$. Из следствия 7.4 на предыдущей странице вытекает, что

$$
E_1^{i,q} \subset \bar H^{q-(n-p-1)}(\mathcal{C}^{i-1}\Lambda) = E_1^{i-1,q-(n-p-1)},
$$

поскольку комплекс, двойственный комплексу совместности (7.3), имеет вид

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\bar\Lambda^{n-p} & \xleftarrow{\ell_{\mathcal{E}}^*} & \bar\Lambda^p & \xleftarrow{\bar d} & \bar\Lambda^{p-1} & \xleftarrow{\bar d} & \dots & \xleftarrow{\bar d} & \mathcal{F} & \longleftarrow & 0. \\
\| & & \| & & \| & & & & \| & & \\
\hat P_0 & & \hat P_1 & & \hat P_2 & & & & \hat P_{p+1} & &
\end{array}
$$

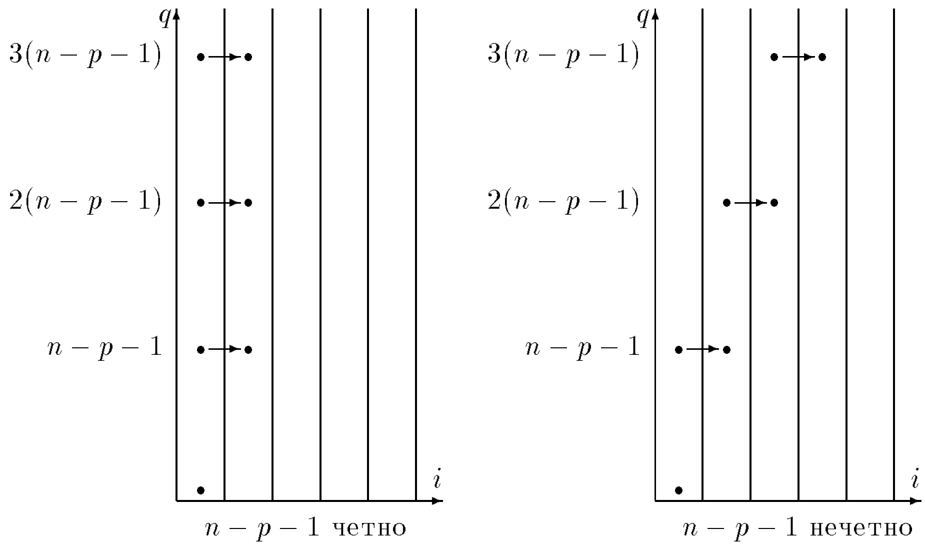


Рис. 7.1

(Повсюду предполагается, что $q \leqslant n-2$.) Таким образом, $E_1^{i,q} = 0$ при $n-p-1 < q < 2(n-p-1)$, $i > 0$ и $\dim E_1^{1,n-p-1} = 1$. Опять, принимая во внимание то, что рассматриваемая спектральная последовательность сходится к тривиальным когомологиям, мы видим, что $E_1^{0,q} = 0$ при $n-p-1 < q < 2(n-p-1)$ и $\dim E_1^{0,n-p-1} = 1$. Более того, отображение $d_1^{0,n-p-1}\colon E_1^{0,n-p-1} \to E_1^{1,n-p-1}$ является изоморфизмом, причем нетрудно показать, что элемент $*\bar{d}A \in \bar{\Lambda}^{n-p-1}$, порождающий одномерное пространство $E_1^{0,n-p-1}$, переводится этим отображением в оператор $*\bar{d}\colon \varkappa = \bar{\Lambda}^p \to \bar{\Lambda}^{n-p-1}$, порождающий пространство $E_1^{1,n-p-1}$.

Далее, рассмотрим члены $E_1^{i,q}$ при $2(n-p-1) \leqslant q < 3(n-p-1)$. Рассуждение, использовавшееся выше, показывает, что все эти члены тривиальны, кроме случаев $q = 2(n-p-1)$ и $i = 0, 1, 2$, причем $\dim E_1^{1,2(n-p-1)} = 1$ и $\dim E_1^{i,2(n-p-1)} \leqslant 1$, $i = 0, 2$. Чтобы вычислить члены $E_1^{i,2(n-p-1)}$ при $i = 0$ и $i = 2$, рассмотрим два случая: $n-p-1$ четно и $n-p-1$ нечетно (см. рис. 7.1).

В первом случае отображение $d_1^{1,2(n-p-1)}\colon E_1^{1,2(n-p-1)} \to E_1^{2,2(n-p-1)}$ тривиально. Действительно, оператор $(*\bar{d}A)\wedge *\bar{d}\colon \varkappa = \bar{\Lambda}^p \to \bar{\Lambda}^{2(n-p-1)}$, порождающий пространство $E_1^{1,2(n-p-1)}$, переходит при действии $d_1^{1,2(n-p-1)}$ в антисимметризацию оператора $(\omega_1, \omega_2) \mapsto (*\bar{d}\omega_1)\wedge(*\bar{d}\omega_2)$, $\omega_i \in \varkappa = \bar{\Lambda}^p$. Однако, этот оператор симметричен, так что $d_1^{1,2(n-p-1)} = 0$. Следовательно, $E_1^{2,2(n-p-1)} = 0$ и $\dim E_1^{0,2(n-p-1)} = 1$. Мы разобрали случай четного $n-p-1$.

В случае нечетного $n-p-1$ оператор $(\omega_1, \omega_2) \mapsto (*\bar{d}\omega_1)\wedge(*\bar{d}\omega_2)$ кососимметричен, следовательно отображение $d_1^{1,2(n-p-1)}$ — изоморфизм. Таким образом, $\dim E_1^{2,2(n-p-1)} = 1$ и $E_1^{0,2(n-p-1)} = 0$.

Продолжив эти рассуждения, мы придем к следующему результату.

Теорема 7.7. *Если $i = q = 0$, то $\dim E_1^{0,0} = 1$. Если хотя бы одно из чисел i или q положительно, имеется два случая:*

1) *если $n-p-1$ четно, то*

$$\dim E_1^{i,q} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = l(n-p-1) \text{ и } q = 0,\ 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

2) *если $n-p-1$ нечетно, то*

$$\dim E_1^{i,q} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = l(n-p-1) \text{ и } q = l-1,\ l, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Здесь $1 \leqslant l < \dfrac{n-1}{n-p-1}$.

Другими словами, если $\mathcal{A}$ — внешняя алгебра, порожденная двумя формами $\omega_1 = *\bar{d}A \in \bar{\Lambda}^{n-p-1}$ и $\omega_2 = \bar{d}_1(\omega_1) = *\bar{d} \in \bar{\Lambda}^{n-p-1} \otimes \mathcal{C}^1\Lambda$, то пространство $\bigoplus_{i,q\leqslant n-2} E_1^{i,q}$ изоморфно подпространству в $\mathcal{A}$, не содержащему форм степени $q > n-2$.

7.5. **Законы сохранения и производящие функции.** Мы начнем с описания дифференциалов $d_1^{0,n-1}$ и $d_1^{1,n-1}$ для ℓ-нормального уравнения, т. к. они имеют непосредственное отношение к теории законов сохранения.

Рассмотрим некоторое ℓ-нормальное уравнение $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$, заданное сечением $F \in \mathcal{F}(\pi, \xi) = P$.

Предложение 7.8. *Оператор*

$$d_1^{0,n-1}\colon E_1^{0,n-1}(\mathcal{E}) = \bar{H}^{n-1}(\mathcal{E}) \to E_1^{1,n-1}(\mathcal{E}) = \ker(\ell_{\mathcal{E}})^* \subset \hat{P}$$

имеет вид

$$d_1^{0,n-1}(h) = \square^*(1),$$

где $h = [\omega] \in \bar{H}^{n-1}(\mathcal{E})$, $\omega \in \bar{\Lambda}^{n-1}(\mathcal{E})$ *и* $\square \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P, \bar{\Lambda}^n(\mathcal{E}))$ — *оператор, удовлетворяющий равенству* $\bar{d}\omega = \square(F)$.

Доказательство. Равенство $\bar{d} \circ \ell_\omega = \square \circ \ell_{\mathcal{E}}$ показывает, что $\square$ — оператор, отвечающий элементу $d_1^{0,n-1}(h) \in E_1^{1,n-1}(\mathcal{E})$. Следовательно, $d_1^{0,n-1}(h) = \square^*(1)$. $\square$

Предложение 7.9. *Член* $E_1^{2,n-1}(\mathcal{E})$ *изоморфен факторпространству*

$$\{\, \nabla \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(\varkappa, \hat{P}) \mid \ell_{\mathcal{E}}^* \circ \nabla = \nabla^* \circ \ell_{\mathcal{E}} \,\}/\Theta,$$

где $\Theta = \{\, \square \circ \ell_{\mathcal{E}} \mid \square \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P, \hat{P}), \square^* = \square \,\}$.

Доказательство. Возьмем $(n-1)$-мерный горизонтальный коцикл с коэффициентами в $\mathcal{C}^1\Lambda \otimes \mathcal{C}^1\Lambda$. Пусть $\Delta \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(\varkappa, \hat{P})$ — оператор, отвечающий этому коциклу по теореме 7.3 на с. 88. Тогда существует такой оператор $A \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P, \hat{P})$ что $\ell_{\mathcal{E}}^* \circ \Delta = A \circ \ell_{\mathcal{E}}$. Из формулы Грина следует, что

$$\langle \ell_{\mathcal{E}}^*(\Delta(\chi_1)), \chi_2 \rangle - \langle \Delta(\chi_1), \ell_{\mathcal{E}}(\chi_2) \rangle = \bar{d}(\Delta_1(\chi_1, \chi_2)),$$

где $\chi_1, \chi_2 \in \varkappa$ и $\Delta_1 \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}_{(2)}(\varkappa, \Lambda^{n-1})$. Рассматриваемый коцикл принадлежит $E_1^{2,n-1}$, если оператор Δ_1 кососимметричен:

$$\Delta_1(\chi_1, \chi_2) = -\Delta_1(\chi_2, \chi_1) \bmod K,$$

где $K \subset \mathcal{C}\mathrm{Diff}_{(2)}(\varkappa, \bar{\Lambda}^{n-1})$ — подмодуль, состоящий из операторов вида $\gamma(\chi_1, \chi_2) = \gamma_1(\ell_{\mathcal{E}}(\chi_1), \chi_2) + \gamma_2(\ell_{\mathcal{E}}(\chi_2), \chi_1)$ для некоторых операторов $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P, \mathcal{C}\mathrm{Diff}(\varkappa, \bar{\Lambda}^{n-1}))$. В этом случае

$$\begin{aligned} \langle \ell_{\mathcal{E}}^*(\Delta(\chi_1)), \chi_2 \rangle - \langle \Delta(\chi_1), \ell_{\mathcal{E}}(\chi_2) \rangle &= -\langle \ell_{\mathcal{E}}^*(\Delta(\chi_2)), \chi_1 \rangle + \langle \Delta(\chi_2), \ell_{\mathcal{E}}(\chi_1) \rangle = \\ &= -\langle \ell_{\mathcal{E}}^*(\Delta(\chi_2)), \chi_1 \rangle + \langle \chi_2, \Delta^*(\ell_{\mathcal{E}}(\chi_1)) \rangle = -\langle A(\ell_{\mathcal{E}}(\chi_2)), \chi_1 \rangle + \langle \chi_2, \ell_{\mathcal{E}}^*(A^*(\chi_1)) \rangle \end{aligned}$$

по модулю $\bar{d}K$. Отсюда следует, что $\Delta = A^* + B \circ \ell_{\mathcal{E}}$ для некоторого оператора $B \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P, \hat{P})$. Значит $\ell_{\mathcal{E}}^* \circ B \circ \ell_{\mathcal{E}} = \ell_{\mathcal{E}}^* \circ \Delta - \ell_{\mathcal{E}}^* \circ A^* = \ell_{\mathcal{E}}^* \circ \Delta - \Delta^* \circ \ell_{\mathcal{E}}$, поэтому $B^* = -B$. Теперь видно, что оператор $\nabla = \Delta - \frac{1}{2} B \circ \ell_{\mathcal{E}}$ удовлетворяет равенству $\ell_{\mathcal{E}}^* \circ \nabla = \nabla^* \circ \ell_{\mathcal{E}}$. Оператор ∇ определен по модулю операторов вида $\square \circ \ell_{\mathcal{E}}$. Так как $\ell_{\mathcal{E}}^* \circ \square \circ \ell_{\mathcal{E}} = \ell_{\mathcal{E}}^* \circ \square^* \circ \ell_{\mathcal{E}}$, то $\square^* = \square$. $\square$

Предложение 7.10. *Оператор* $d_1^{1,n-1}\colon E_1^{1,n-1}(\mathcal{E}) = \ker \ell_{\mathcal{E}}^* \to E_1^{2,n-1}(\mathcal{E})$ *задается формулой*

$$d_1^{1,n-1}(\psi) = (\ell_\psi + \Delta^*) \bmod \Theta,$$

где $\Delta \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P, \hat{\varkappa})$ — *оператор, удовлетворяющий равенству* $\ell_F^*(\psi) = \Delta(F)$.

Доказательство. Из формулы Грина на $J^\infty(\pi)$ следует равенство

$$\langle \psi, \ell_F(\chi) \rangle - \langle \ell_F^*(\psi), \chi \rangle = \bar{d}(\square(\chi)),$$

где $\chi \in \varkappa(\pi)$, $\square \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(\varkappa(\pi), \bar\Lambda^{n-1}(\pi)) = \mathcal{C}^1\Lambda(\pi) \otimes \bar\Lambda^{n-1}(\pi)$. Вычислим $\bar d \circ d_{\mathcal{C}}(\square) \in \mathcal{C}^2\Lambda(\pi) \otimes \bar\Lambda^n(\pi)$:

$$\begin{aligned}
\bar d(d_{\mathcal{C}}(\square)(\chi_1, \chi_2)) &= \mathcal{Э}_{\chi_1}(\bar d(\square(\chi_2))) - \mathcal{Э}_{\chi_2}(\bar d(\square(\chi_1))) - \bar d(\square(\{\chi_1, \chi_2\})) = \\
&= \mathcal{Э}_{\chi_1}(\langle \psi, \ell_F(\chi_2)\rangle) - \mathcal{Э}_{\chi_2}(\langle \psi, \ell_F(\chi_1)\rangle) - \langle \psi, \ell_F(\{\chi_1, \chi_2\})\rangle - \\
&- \mathcal{Э}_{\chi_1}(\langle \ell_F^*(\psi), \chi_2\rangle) + \mathcal{Э}_{\chi_2}(\langle \ell_F^*(\psi), \chi_1\rangle) + \langle \ell_F^*(\psi), \{\chi_1, \chi_2\}\rangle = \\
&= \langle \ell_\psi(\chi_1), \ell_F(\chi_2)\rangle - \langle \ell_\psi(\chi_2), \ell_F(\chi_1)\rangle - \langle \ell_{\Delta(F)}(\chi_1), \chi_2\rangle + \langle \ell_{\Delta(F)}(\chi_2), \chi_1\rangle.
\end{aligned}$$

Следовательно, ограничение оператора $\bar d \circ d_{\mathcal{C}}(\square)$ на $\mathcal{E}^\infty$ равно

$$\begin{aligned}
&\bar d \circ d_{\mathcal{C}}(\square)\big|_{\mathcal{E}^\infty}(\chi_1, \chi_2) = \\
&= \langle \ell_\psi(\chi_1), \ell_{\mathcal{E}}(\chi_2)\rangle - \langle \ell_\psi(\chi_2), \ell_{\mathcal{E}}(\chi_1)\rangle - \langle \Delta(\ell_{\mathcal{E}}(\chi_1)), \chi_2\rangle + \langle \Delta(\ell_{\mathcal{E}}(\chi_2)), \chi_1\rangle = \\
&= \langle (\ell_\psi + \Delta^*)(\chi_1), \ell_{\mathcal{E}}(\chi_2)\rangle - \langle (\ell_\psi + \Delta^*)(\chi_2), \ell_{\mathcal{E}}(\chi_1)\rangle + \bar d\gamma(\chi_1, \chi_2),
\end{aligned}$$

где $\gamma \in K$. Предложение доказано. $\square$

Теперь мы применим эти результаты к задаче о вычислении законов сохранения ℓ-нормального уравнения $\mathcal{E}$.

Прежде всего, заметим, что для формально интегрируемого уравнения $\mathcal{E}$ проекции $\mathcal{E}^{(k+1)} \to \mathcal{E}^{(k)}$ суть аффинные расслоения, поэтому $\mathcal{E}^{(k+1)}$ и $\mathcal{E}^{(k)}$ имеют одинаковый гомотопический тип. Следовательно, $H^*(\mathcal{E}^\infty) = H^*(\mathcal{E})$.

Далее, из теоремы о двух строчках вытекает, что следующая последовательность точна:

$$0 \to H^{n-1}(\mathcal{E}) \to \bar H^{n-1}(\mathcal{E}) \xrightarrow{d_1^{0,n-1}} \ker(\ell_{\mathcal{E}})^*.$$

Напомним читателю, что мы отождествили группу $\bar H^{n-1}(\mathcal{E})$ с группой законов сохранения уравнения $\mathcal{E}$ (см. начало главы 6 на с. 75). Законы сохранения $\omega \in H^{n-1}(\mathcal{E}) \subset \bar H^{n-1}(\mathcal{E})$ называются *топологическими* (или *жесткими*), т. к. они полностью определяются топологией уравнения $\mathcal{E}$. В частности, соответствующие сохраняющиеся величины не меняются при деформациях решений уравнения $\mathcal{E}$. Поэтому топологические законы для нас не очень интересны и мы рассмотрим факторгруппу $\mathrm{cl}(\mathcal{E}) = \bar H^{n-1}(\mathcal{E})/H^{n-1}(\mathcal{E})$, называемую группой *собственных* законов сохранения уравнения $\mathcal{E}$. Непосредственно из теоремы о двух строчках вытекает следующий результат.

Теорема 7.11. *Если $\mathcal{E}$ — ℓ-нормальное уравнение, то*

$$\mathrm{cl}(\mathcal{E}) \subset \ker \ell_{\mathcal{E}}^*.$$

Если, кроме того, $H^n(\mathcal{E}) \subset \bar H^n(\mathcal{E})$ (например, $H^n(\mathcal{E}) = 0$), то

$$\mathrm{cl}(\mathcal{E}) = \ker d_1^{1,n-1}.$$

Элемент $\psi \in \ker \ell_{\mathcal{E}}^*$, отвечающий закону сохранения $[\omega] \in \mathrm{cl}(\mathcal{E})$называется его *производящей функцией.*

Теорема 7.11 дает эффективный метод вычисления законов сохранения.

Замечание 7.4. Как следует из предложения 7.9 на предыдущей странице, элементы пространства $E_1^{2,n-1}$ можно понимать как отображения из $\ker \ell_{\mathcal{E}}$ в $\ker \ell_{\mathcal{E}}^*$, т. е. из симметрий в производящие функции законов сохранения уравнения $\mathcal{E}$.

Предложение 7.12. *Пусть $\mathcal{E} = \{u_t = f(t, x, u, u_x, u_{xx}, \dots)\}$ — эволюционное уравнение и $J = (J_0, J_1, \dots, J_n)$ — сохраняющийся ток для $\mathcal{E}$. Тогда производящая функция закона сохранения J имеет вид $\psi = \mathbf{E}(J_0)$, где J_0 — t-компонента сохраняющегося тока, рассматриваемого как функция от $(t, x, u, u_x, u_{xx}, \dots)$.*

Доказательство. Ограничение полной производной D_t на уравнение $\mathcal{E}^\infty$ имеет вид $D_t = \dfrac{\partial}{\partial t} + \mathcal{Э}_f$. Следовательно, $\dfrac{\partial J_0}{\partial t} + \mathcal{Э}_f(J_0) + \sum_{i=1}^n D_i(J_i) = 0$. С другой стороны, $D_t = \dfrac{\partial}{\partial t} + \mathcal{Э}_{u_t}$, поэтому $D_t(J_0) + \sum_{i=1}^n D_i(J_i) = \dfrac{\partial J_0}{\partial t} + \mathcal{Э}_{u_t}(J_0) - \dfrac{\partial J_0}{\partial t} - \mathcal{Э}_f(J_0) = \mathcal{Э}_{u_t - f}(J_0) = \ell_{J_0}(u_t - f)$. Таким образом, $\psi = \ell_{J_0}^*(1) = \mathbf{E}(J_0)$. $\square$

Пусть $\varphi \in \ker \ell_{\mathcal{E}}$ — симметрия и $[\omega] \in \bar{H}^{n-1}(\mathcal{E})$ — закон сохранения уравнения $\mathcal{E}$. Тогда $[\mathcal{Э}_\varphi(\omega)]$ — тоже закон сохранения уравнения $\mathcal{E}$.

Предложение 7.13. *Если $\psi \in \ker \ell^*_{\mathcal{E}}$ — производящая функция некоторого закона сохранения $[\omega]$ некоторого ℓ-нормального уравнения $\mathcal{E} = \{F = 0\}$, то производящая функция закона сохранения $[\mathcal{Э}_\varphi(\omega)]$ имеет вид $\mathcal{Э}_\varphi(\psi) + \Delta^*(\psi)$, где оператор $\Delta \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P, P)$ определяется равенством $\mathcal{Э}_\varphi(F) = \Delta(F)$.*

Доказательство. Прежде всего, имеется равенство

$$\langle \psi, \ell_{\mathcal{E}}(\chi)\rangle = \bar{d}\ell_\omega(\chi) + \bar{d}\gamma(\ell_{\mathcal{E}}(\chi)), \qquad \chi \in \varkappa,$$

где $\gamma \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P, \bar{\Lambda}^{n-1})$. Используя очевидную формулу

$$\ell_{\mathcal{Э}_{\chi_1}(\eta)}(\chi_2) = \mathcal{Э}_{\chi_1}(\ell_\eta(\chi_2)) - \ell_\eta(\{\chi_1, \chi_2\}), \qquad \chi_1, \chi_1 \in \varkappa, \quad \eta \in \bar{\Lambda}^n,$$

где $\{\cdot\,,\cdot\}$ — скобка Якоби (см. определение 3.31 на с. 49), получим

$$\begin{aligned} \bar{d}\ell_{\mathcal{Э}_\varphi(\omega)}(\chi) &= \bar{d}(\mathcal{Э}_\varphi(\ell_\omega(\chi))) - \bar{d}(\ell_\omega(\{\varphi,\chi\})) = \mathcal{Э}_\varphi(\bar{d}(\ell_\omega(\chi))) - \bar{d}(\ell_\omega(\{\varphi,\chi\})) = \\ &= \mathcal{Э}_\varphi(\langle\psi, \ell_{\mathcal{E}}(\chi)\rangle) - \langle\psi, \ell_{\mathcal{E}}(\{\varphi,\chi\})\rangle - \mathcal{Э}_\varphi(\bar{d}\gamma(\ell_{\mathcal{E}}(\chi))) + \bar{d}\gamma(\ell_{\mathcal{E}}(\{\varphi,\chi\})) = \\ &= \langle \mathcal{Э}_\varphi(\psi), \ell_{\mathcal{E}}(\chi)\rangle + \langle\psi, (\mathcal{Э}_\varphi(\ell_{\mathcal{E}}(\chi)) - \ell_{\mathcal{E}}(\{\varphi,\chi\}))\rangle + \bar{d}\gamma'(\ell_{\mathcal{E}}(\chi)) = \\ &= \langle \mathcal{Э}_\varphi(\psi), \ell_{\mathcal{E}}(\chi)\rangle + \langle\psi, \ell_{\mathcal{Э}_\varphi(F)}\big|_{\mathcal{E}^\infty}\rangle + \bar{d}\gamma'(\ell_{\mathcal{E}}(\chi)) = \\ &= \langle \mathcal{Э}_\varphi(\psi), \ell_{\mathcal{E}}(\chi)\rangle + \langle\psi, \Delta(\ell_{\mathcal{E}}(\chi))\rangle + \bar{d}\gamma'(\ell_{\mathcal{E}}(\chi)) = \\ &= \langle(\mathcal{Э}_\varphi + \Delta^*)(\psi), \ell_{\mathcal{E}}(\chi)\rangle + \bar{d}\gamma''(\ell_{\mathcal{E}}(\chi)), \end{aligned}$$

где $\gamma', \gamma'' \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P, \bar{\Lambda}^{n-1})$. Предложение доказано. □

7.6. **Производящие функции с точки зрения формализма БРСТ и антиполей.** Пусть $\mathcal{E} = \{F = 0\}$ — ℓ-нормальное уравнение, $F \in P$. Тогда нетрудно показать, что любой $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор Δ, удовлетворяющий равенству $\Delta(F) = 0$, тривиален на $\mathcal{E}^\infty$. Действительно,

$$\ell_{\Delta(F)}\big|_{\mathcal{E}^\infty} = \Delta \circ \ell_{\mathcal{E}} = 0,$$

откуда, ввиду ℓ-нормальности, и следует нужное утверждение.

Рассмотрим ℓ-нормальное уравнение $\mathcal{E}$ и следующий комплекс на $J^\infty(\pi)$

$$0 \leftarrow \mathcal{F} \xleftarrow{\delta} \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P, \mathcal{F}) \xleftarrow{\delta} \mathcal{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{alt}}_{(2)}(P, \mathcal{F}) \xleftarrow{\delta} \mathcal{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{alt}}_{(3)}(P, \mathcal{F}) \xleftarrow{\delta} \ldots,$$

$\delta(\Delta)(p_1, \ldots, p_k) = \Delta(F, p_1, \ldots, p_k)$, $p_i \in P$. Этот комплекс точен во всех членах, кроме члена $\mathcal{F}$. В точках $\theta \in \mathcal{E}^\infty$ точность следует из условия ℓ-нормальности. В точках $\theta \notin \mathcal{E}^\infty$ — это стандартный факт линейной алгебры (см. пример 8.5 на с. 102). Ясно, что в члене $\mathcal{F}$ гомологии равны $\mathcal{F}(\mathcal{E})$.

В физике этот комплекс называется *резольвентой Кошуля – Тейта*, а элементы модуля $\mathcal{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{alt}}_{(k)}(P, \mathcal{F})$ называются *антиполями*. В рассматриваемой здесь ситуации резольвента Кошуля – Тейта совпадает с БРСТ[16]-комплексом.

[16]БРСТ = Becchi, Rouet, Stora и Тютин.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longleftarrow & \bar\Lambda^n & \xleftarrow{\delta} & \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P,\bar\Lambda^n) & \xleftarrow{\delta} & \mathcal{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{alt}}_{(2)}(P,\bar\Lambda^n) & \xleftarrow{\delta} & \dots \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \bar d} & & \uparrow{\scriptstyle \bar d} & & \uparrow{\scriptstyle \bar d} & & \\
0 & \longleftarrow & \bar\Lambda^{n-1} & \xleftarrow{\delta} & \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P,\bar\Lambda^{n-1}) & \xleftarrow{\delta} & \mathcal{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{alt}}_{(2)}(P,\bar\Lambda^{n-1}) & \xleftarrow{\delta} & \dots \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \bar d} & & \uparrow{\scriptstyle \bar d} & & \uparrow{\scriptstyle \bar d} & & \\
0 & \longleftarrow & \bar\Lambda^{n-2} & \xleftarrow{\delta} & \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P,\bar\Lambda^{n-2}) & \xleftarrow{\delta} & \mathcal{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{alt}}_{(2)}(P,\bar\Lambda^{n-2}) & \xleftarrow{\delta} & \dots \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \bar d} & & \uparrow{\scriptstyle \bar d} & & \uparrow{\scriptstyle \bar d} & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

Из стандартных результатов о бикомплексах (см. приложение) и теоремы 2.8 на с. 25 следует, что $\bar H^q(\mathcal{E}) = H_{n-q}(L^{\mathrm{alt}}_\bullet(P),\delta)$. Поскольку комплекс $(L^{\mathrm{alt}}_\bullet(P),\delta)$ является прямым слагаемым в комплексе $(\mathcal{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{alt}}_{(\bullet)}(P,\hat P),\delta)$, он точен во всех размерностях кроме 0 и 1. Отсюда получаем *теорему о двух строчках*. Кроме того,

$$\bar H^{n-1}(\mathcal{E}) = H_1(L^{\mathrm{alt}}_\bullet(P),\delta) = \{\,\psi\in\hat P \bmod T \mid \langle\psi,F\rangle\in\bar d\bar\Lambda^{n-1}\,\},$$

где $T=\{\,\psi\in\hat P\mid\psi=\square(F),\ \square\in\mathcal{C}\mathrm{Diff}(P,\hat P),\ \square^*=-\square\,\}$. Условие $\langle\psi,F\rangle\in\bar d\bar\Lambda^{n-1}$ эквивалентно условию $0=\mathbf{E}\langle\psi,F\rangle=\ell^*_F(\psi)+\ell^*_\psi(F)$. Так мы вновь получаем соответствие между законами сохранения и производящими функциями вместе с уравнением $\ell^*_{\mathcal{E}}(\psi)=0$.

7.7. **Уравнения Эйлера–Лагранжа.** Рассмотрим уравнение Эйлера–Лагранжа $\mathcal{E}=\{\mathbf{E}(\mathcal{L})=0\}$, отвечающее лагранжиану $\mathcal{L}=[\omega]\in\bar H^n(\pi)$. Пусть $\varphi\in\varkappa(\pi)$ — *нётерова симметрия* лагранжиана $\mathcal{L}$, т. е. $\mathcal{Э}_\varphi(\mathcal{L})=0$ на $J^\infty(\pi)$.

Упражнение 7.9. Используя упражнение 7.7 на с. 88, убедитесь, что нётерова симметрия лагранжиана $\mathcal{L}$ является в то же время симметрией соответствующего уравнения $\mathcal{E}$, т. е. $\mathrm{sym}(\mathcal{L})\subset\mathrm{sym}(\mathcal{E})$.

Упражнение 7.10. Покажите, что если $E_2^{0,n}(\mathcal{E})=0$, то нахождение нётеровых симметрий лагранжиана $\mathcal{L}=[\omega]$ сводится к решению уравнения $\mathbf{E}(\ell_\omega(\varphi))=\ell_{\mathbf{E}(\mathcal{L})}(\varphi)+\ell^*_\varphi(\mathbf{E}(\mathcal{L}))=0$. (Таким образом, чтобы вычислить нётеровы симметрии уравнения Эйлера–Лагранжа, лагранжиан знать не нужно.)

Пусть $Э_\varphi(\omega)=\bar d\nu$, где $\nu\in\bar\Lambda^{n-1}(\pi)$. По формуле Грина

$$Э_\varphi(\omega)-\bar d\nu=\ell_\omega(\varphi)-\bar d\nu=\ell^*_\omega(1)(\varphi)+\bar d\gamma(\varphi)-\bar d\nu=\mathbf{E}(\mathcal{L})(\varphi)+\bar d(\gamma(\varphi)-\nu)=0.$$

Положим

$$\eta=(\nu-\gamma(\varphi))|_{\mathcal{E}^\infty}\in\bar\Lambda^{n-1}(\mathcal{E}).$$

Таким образом, $\bar d\,\eta|_{\mathcal{E}^\infty}=0$, т. е. $[\eta]\in\bar H^{n-1}(\mathcal{E})$ — закон сохранения уравнения $\mathcal{E}$. Отображение

$$\mathrm{sym}(\mathcal{L})\to\bar H^{n-1}(\mathcal{E}),\qquad \varphi\mapsto[\eta],$$

называется *отображением Нётер*.

Произвол в выборе ω и ν приводит к многозначности отображения Нётер.

Упражнение 7.11. Проверьте, что отображение Нётер определено корректно с точностью до образа естественного гомоморфизма $\bar H^{n-1}(\pi)\to\bar H^{n-1}(\mathcal{E})$.

Предложение 7.14. *Если уравнение Эйлера–Лагранжа $\mathcal{E}$, отвечающее лагранжиану $\mathcal{L}$, ℓ-нормально, то отображение Нётер, ограниченное на множество нётеровых симметрий лагранжиана $\mathcal{L}$, является обратным к дифференциалу $d_1^{0,n-1}$.*

Доказательство. На $J^\infty(\pi)$ выполняется равенство

$$\bar{d}\ell_\eta(\chi) = \ell_{\langle \mathbf{E}(\mathcal{L}),\varphi\rangle}(\chi) = \langle \ell_{\mathbf{E}(\mathcal{L})}(\chi),\varphi\rangle + \langle \mathbf{E}(\mathcal{L}),\ell_\varphi(\chi)\rangle.$$

Поэтому на $\mathcal{E}^\infty$ мы получаем $\bar{d}\ell_\eta(\chi) = \langle \ell_{\mathcal{E}}(\chi),\varphi\rangle$, т. е. $d_1^{0,n-1}([\eta]) = \varphi$. □

Замечание 7.5. Отображение Нётер можно понимать как процедуру нахождения сохраняющийся плотности, отвечающей данной производящей функции.

Таким образом, мы видим, что если $\mathit{Э}_\varphi$ — нётерова симметрия некоторого лагранжиана, то φ — производящая функция закона сохранения соответствующего уравнения Эйлера–Лагранжа. Это — (*первая*) *теорема Нётер*. Заметим также, что из равенства $\ell_{\mathcal{E}}^* = \ell_{\mathcal{E}}$, справедливого для уравнений Эйлера–Лагранжа, сразу же следует *обратная теорема Нётер*: если φ — производящая функция закона сохранения некоторого уравнения Эйлера–Лагранжа, то φ также является симметрией этого уравнения.

Обсудим теорему Нётер с точки зрения формализма БРСТ и антиполей. Рассмотрим 1-коцикл $\varphi \in \varkappa$ в комплексе $L_\bullet^{\mathrm{alt}}(\hat{\varkappa})$. Имеется равенство $\langle \varphi, \mathbf{E}(\omega)\rangle \in \bar{d}\bar{\Lambda}^{n-1}$, где ω — плотность лагранжиана $\mathcal{L} = [\omega]$. Следовательно, $\mathit{Э}_\varphi(\omega) \in \bar{d}\bar{\Lambda}^{n-1}$ и поэтому $\mathit{Э}_\varphi(\mathcal{L}) = 0$, т. е. φ — нётерова симметрия. Таким образом, резольвента Кошуля–Тейта дает когомологическую интерпретацию теоремы Нётер.

Предположим теперь, что рассматриваемый лагранжиан имеет *калибровочные симметрии*, т. е. существует некоторый $\mathcal{F}$-модуль $\mathfrak{a}$ и такой $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор $R\colon \mathfrak{a} \to \varkappa$, что $R(\alpha)$ — нётерова симметрия для каждого $\alpha \in \mathfrak{a}$. Это значит, что $\mathit{Э}_{R(\alpha)}(\mathcal{L}) = 0$, или $\ell_{\mathcal{L}} \circ R = 0$. Следовательно, $R^* \circ \ell_{\mathcal{L}}^* = 0$ и, наконец, $R^*(\ell_{\mathcal{L}}^*(1)) = R^*(\mathbf{E}(\mathcal{L})) = 0$. Таким образом, если лагранжиан инвариантен относительно калибровочных симметрий, то уравнения Эйлера–Лагранжа удовлетворяют *тождествам Нётер* $R^*(\mathbf{E}(\mathcal{L})) = 0$ (*вторая теорема Нётер*).

7.8. **Гамильтонов формализм на $J^\infty(\pi)$.** Пусть $A \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(\hat{\varkappa}(\pi),\varkappa(\pi))$ — некоторый $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор. Определим скобку Пуассона на $\bar{H}^n(\pi)$, соответствующую оператору A, формулой

$$\{\omega_1,\omega_2\}_A = \langle A(\mathbf{E}(\omega_1)), \mathbf{E}(\omega_2)\rangle,$$

где $\langle\,,\,\rangle$ — естественное спаривание $\varkappa(\pi)\times\hat{\varkappa}(\pi) \to \bar{H}^n(\pi)$.

Следующая лемма показывает, что оператор A однозначно определяется своей скобкой Пуассона.

Лемма 7.15. *Пусть $\pi\colon E \to M$ — векторное расслоение.*

1) *Рассмотрим оператор $A \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}_{(l)}(\hat{\varkappa}(\pi), P)$, где P — произвольный $\mathcal{F}(\pi)$-модуль. Если при всех $\omega_1,\dots,\omega_l \in \bar{H}^n(\pi)$ выполняется равенство*

$$A(\mathbf{E}(\omega_1),\dots,\mathbf{E}(\omega_l)) = 0,$$

то $A = 0$.

2) *Рассмотрим оператор $A \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}_{(l)}(\hat{\varkappa}(\pi),\bar{\Lambda}^n(\pi))$. Если для любых классов когомологий $\omega_1,\dots,\omega_l \in \bar{H}^n(\pi)$ элемент $A(\mathbf{E}(\omega_1),\dots,\mathbf{E}(\omega_l))$ принадлежит образу оператора $\bar{d}$, то $\operatorname{im} A \subset \operatorname{im}\bar{d}$, т. е. $\mu_{(l-1)}(A) = 0$ (см. §2.4).*

3) *Рассмотрим оператор $A \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}_{(l-1)}(\hat{\varkappa}(\pi),\varkappa(\pi))$. Если для всех элементов $\omega_1,\dots,\omega_l \in \bar{H}^n(\pi)$ выполняется равенство $\langle A(\mathbf{E}(\omega_1),\dots,\mathbf{E}(\omega_{l-1})),\mathbf{E}(\omega_l)\rangle = 0$, то $A = 0$.*

Доказательство. 1) Достаточно рассмотреть случай $l = 1$. Очевидно, что на $J^\infty(\pi)$ каждый элемент модуля $\hat{\varkappa}(\pi) = \hat{\mathcal{F}}(\pi,\pi)$, имеющий вид $\pi_\infty^*(f)$, где $f \in \hat{\Gamma}(\pi)$ (другими словами, каждый элемент, зависящий лишь от координат x на базе), можно локально представить в виде $\pi_\infty^*(f) = \mathbf{E}(\omega)$ для некоторой формы $\omega \in \bar{\Lambda}^n(\pi)$. Таким образом, $A(\pi_\infty^*(f)) = 0$ при всех f. Поскольку A — $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор, то отсюда следует, что $A = 0$.

2) Опять достаточно рассмотреть случай $l = 1$. Имеет место равенство $\mathbf{E}(A(\mathbf{E}(\omega))) = 0$. Используя упражнение 7.7 на с. 88, получим

$$0 = \mathbf{E}(A(\mathbf{E}(\omega))) = \ell_{\mathbf{E}(\omega)}^*(A^*(1)) + \ell_{A^*(1)}^*(\mathbf{E}(\omega))$$

для всех $\omega \in \bar{\Lambda}^n(\pi)$. Как и выше, для всех $f \in \hat{\Gamma}(\pi)$ существует такая форма $\omega \in \bar{\Lambda}^n(\pi)$, что $\pi_\infty^*(f) = \mathbf{E}(\omega)$. Так как $\ell_{\pi_\infty^*(f)} = 0$, получаем $\ell^*_{A^*(1)}(\pi_\infty^*(f)) = 0$. Следовательно, $\ell^*_{A^*(1)} = 0$, поэтому $0 = \mathbf{E}(A(\mathbf{E}(\omega))) = \ell^*_{\mathbf{E}(\omega)}(A^*(1))$.

Упражнение 7.12. Докажите, что локально существует такая форма $\omega \in \bar{\Lambda}^n(\pi)$, что $\ell_{\mathbf{E}(\omega)}$ — тождественный оператор.

Используя это упражнение, получаем $0 = A^*(1) = \mu(A)$. Это и есть требуемое утверждение.

Утверждение 3) следует из 1) и 2). □

Определение 7.1. Оператор $A \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(\hat{\varkappa}(\pi), \varkappa(\pi))$ называется *гамильтоновым*, если его скобка Пуассона определяет структуру алгебры Ли на пространстве $\bar{H}^n(\pi)$, т. е. если

$$\{\omega_1, \omega_2\}_A = -\{\omega_2, \omega_1\}_A, \tag{7.4}$$

$$\{\{\omega_1, \omega_2\}_A, \omega_3\}_A + \{\{\omega_2, \omega_3\}_A, \omega_1\}_A + \{\{\omega_3, \omega_1\}_A, \omega_2\}_A = 0. \tag{7.5}$$

Скобка $\{\,,\}_A$ называется *гамильтоновой структурой*.

Предложение 7.16. *Скобка пуассона $\{\,,\}_A$ кососимметрична, т. е. для нее выполняется условие* (7.4), *тогда и только тогда, когда оператор A кососопряжен, т. е. $A = -A^*$.*

Доказательство. Так как

$$\{\omega_1, \omega_2\}_A + \{\omega_2, \omega_1\}_A = \langle (A + A^*)(\mathbf{E}(\omega_1)), \mathbf{E}(\omega_2)\rangle,$$

требуемое утверждение непосредственно следует и предыдущей леммы. □

Теперь мы сформулируем критерии, позволяющие определить, является ли произвольный кососопряженный оператор $A \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(\hat{\varkappa}(\pi), \varkappa(\pi))$ гамильтоновым.

Для этого нам понадобится следующая лемма.

Лемма 7.17. *Рассмотрим оператор $A \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(\hat{\varkappa}(\pi), \varkappa(\pi))$ и элемент $\psi \in \hat{\varkappa}(\pi)$. Определим оператор $\ell_{A,\psi} \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(\varkappa(\pi), \varkappa(\pi))$ равенством*

$$\ell_{A,\psi}(\varphi) = (\ell_A(\varphi))(\psi), \qquad \varphi \in \varkappa(\pi).$$

Тогда

$$\ell^*_{A,\psi_1}(\psi_2) = \ell^*_{A^*,\psi_2}(\psi_1). \tag{7.6}$$

Доказательство. По формуле Грина,

$$\langle A(\psi_1), \psi_2\rangle = \langle \psi_1, A^*(\psi_2)\rangle.$$

Применяя $\mathcal{Э}_\varphi$ к обеим частям, получаем

$$\langle \mathcal{Э}_\varphi(A)(\psi_1), \psi_2\rangle = \langle \psi_1, \mathcal{Э}_\varphi(A^*)(\psi_2)\rangle,$$

и поэтому

$$\langle \ell_{A,\psi_1}(\varphi), \psi_2\rangle = \langle \psi_1, \ell_{A^*,\psi_2}(\varphi)\rangle.$$

Применим еще раз формулу Грина:

$$\langle \varphi, \ell^*_{A,\psi_1}(\psi_2)\rangle = \langle \ell^*_{A^*,\psi_2}(\psi_1), \varphi\rangle.$$

Лемма доказана. □

Теорема 7.18. *Пусть $A \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(\hat{\varkappa}(\pi), \varkappa(\pi))$ — кососимметрический оператор. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *A — гамильтонов оператор*;
2) $\langle \ell_A(A(\psi_1))(\psi_2), \psi_3\rangle + \langle \ell_A(A(\psi_2))(\psi_3), \psi_1\rangle + \langle \ell_A(A(\psi_3))(\psi_1), \psi_2\rangle = 0$ *при всех* $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \in \hat{\varkappa}(\pi)$;
3) $\ell_{A,\psi_1}(A(\psi_2)) - \ell_{A,\psi_2}(A(\psi_1)) = A(\ell^*_{A,\psi_2}(\psi_1))$ *при всех* $\psi_1, \psi_2 \in \hat{\varkappa}(\pi)$;
4) *выражение* $\ell_{A,\psi_1}(A(\psi_2)) + \frac{1}{2}A(\ell^*_{A,\psi_1}(\psi_2))$ *симметрично относительно* $\psi_1, \psi_2 \in \hat{\varkappa}(\pi)$;
5) $[\mathcal{Э}_{A(\psi)}, A] = \ell_{A(\psi)} \circ A + A \circ \ell^*_{A(\psi)}$ *при всех* $\psi \in \operatorname{im}\mathbf{E} \subset \hat{\varkappa}(\pi)$.

При этом условия 2)–4) достаточно проверять только для элементов $\psi_i \in \operatorname{im}\mathbf{E}$.

Доказательство. Пусть $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \bar{H}^n(\pi)$ и $\psi_i = \mathbf{E}(\omega_i)$. Тождество Якоби (7.5) на предшествующей странице имеет вид

$$\begin{aligned}
\oint \{\{\omega_1, \omega_2\}_A, \omega_3\}_A = \oint -\text{Э}_{A(\psi_3)} \langle A(\psi_1), \psi_2 \rangle = \\
= \oint -\langle \text{Э}_{A(\psi_3)}(A)(\psi_1), \psi_2 \rangle - \langle A(\ell_{\psi_1}(A(\psi_3))), \psi_2 \rangle - \langle A(\psi_1), \ell_{\psi_2}(A(\psi_3)) \rangle = \\
= \oint -\langle \ell_A(A(\psi_3))(\psi_1), \psi_2 \rangle + \langle A(\psi_2), \ell_{\psi_1}(A(\psi_3)) \rangle - \langle A(\psi_1), \ell_{\psi_2}(A(\psi_3)) \rangle = \\
= \oint -\langle \ell_A(A(\psi_3))(\psi_1), \psi_2 \rangle = 0,
\end{aligned}$$

где, как и выше, символ $\oint$ означает сумму по циклическим перестановкам индексов. Из леммы 7.15 на с. 95 следует, что это равенство выполняется для любых элементов $\psi_i \in \hat{\varkappa}(\pi)$. Критерий 2) доказан.

Перепишем теперь тождество Якоби в виде

$$\langle \ell_{A,\psi_1}(A(\psi_2)), \psi_3 \rangle + \langle A(\psi_1), \ell^*_{A,\psi_3}(\psi_2) \rangle - \langle A(\ell^*_{A,\psi_2}(\psi_1)), \psi_3 \rangle = 0.$$

Используя формулу (7.6) на предшествующей странице, получаем

$$\langle \ell_{A,\psi_1}(A(\psi_2)), \psi_3 \rangle - \langle \ell_{A,\psi_2}(A(\psi_1)), \psi_3 \rangle - \langle A(\ell^*_{A,\psi_2}(\psi_1)), \psi_3 \rangle = 0,$$

откуда следует критерий 3).

Эквивалентность критериев 3) и 4) также вытекает из равенства (7.6).

Наконец, критерий 5) эквивалентен критерию 3) в силу очевидных равенств

$$\begin{gathered}
[\text{Э}_{A(\psi_2)}, A](\psi_1) = \ell_{A,\psi_1}(A(\psi_2)), \\
\ell_{A,\psi} \circ A = \ell_{A(\psi)} \circ A - A \circ \ell_\psi \circ A.
\end{gathered}$$

Теорема доказана. □

Пример 7.2. Рассмотрим кососимметрический дифференциальный оператор $\Delta\colon \hat{\Gamma}(\pi) \to \Gamma(\pi)$. Тогда его поднятие (см. определение 3.25 на с. 44) $\mathcal{C}\Delta\colon \hat{\varkappa}(\pi) \to \varkappa(\pi)$ является, очевидно, гамильтоновым оператором.

Упражнение 7.13. Проверьте, что если $n = \dim M = 1$ и $m = \dim \pi = 1$, то операторы вида $A = D_x^3 + (\alpha + \beta u)D_x + \dfrac{\beta}{2}u_x$ гамильтоновы.

Пусть $A\colon \hat{\varkappa}(\pi) \to \varkappa(\pi)$ — гамильтонов оператор. Для каждого класса когомологий $\omega \in \bar{H}^n(\pi)$ эволюционное векторное поле $X_\omega = \text{Э}_{A(\mathbf{E}(\omega))}$ называется *гамильтоновым* векторным полем, отвечающим гамильтониану ω. Очевидно, что

$$X_{\omega_1}(\omega_2) = \langle A\mathbf{E}(\omega_1), \mathbf{E}(\omega_2) \rangle = \{\omega_1, \omega_2\}_A.$$

Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned}
X_{\{\omega_1,\omega_2\}_A}(\omega) = \{\{\omega_1, \omega_2\}_A, \omega\}_A = \{\omega_1, \{\omega_2, \omega\}_A\}_A - \{\omega_2, \{\omega_1, \omega\}_A\}_A = \\
= (X_{\omega_1} \circ X_{\omega_2} - X_{\omega_2} \circ X_{\omega_1})(\omega) = [X_{\omega_1}, X_{\omega_2}](\omega)
\end{aligned}$$

для всех $\omega \in \bar{H}^n(\pi)$, и, следовательно,

$$X_{\{\omega_1,\omega_2\}_A} = [X_{\omega_1}, X_{\omega_2}]. \tag{7.7}$$

Как и в конечномерном гамильтоновом формализме, из равенства 7.7 следует результат, аналогичный теореме Нётер.

Для каждого $\mathcal{H} \in \bar{H}^n(\pi)$ эволюционное уравнение

$$u_t = A(\mathbf{E}(\mathcal{H})), \tag{7.8}$$

отвечающее гамильтонову полю с гамильтонианом $\mathcal{H}$, назовем *гамильтоновым* эволюционным уравнением.

П р и м е р 7.3. Уравнение КдФ $u_t = uu_x + u_{xxx}$ допускает две гамильтоновы структуры:

$$u_t = D_x\left(\mathbf{E}\left(\frac{u^3}{6} - \frac{u_x^2}{2}\right)\right) \quad \text{и} \quad u_t = \left(D_x^3 + \frac{2}{3}uD_x + \frac{1}{3}u_x\right)\left(\mathbf{E}\left(\frac{u^2}{2}\right)\right).$$

Т е о р е м а 7.19. *Гамильтоновы операторы отображают производящие функции законов сохранения уравнения* (7.8) *на предыдущей странице в симметрии этого уравнения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A — гамильтонов оператор и

$$\tilde{\omega}_0(t) + \tilde{\omega}_1(t) \wedge dt \in \bar{\Lambda}^n(\pi) \oplus \bar{\Lambda}^{n-1}(\pi) \wedge dt$$

— сохраняющийся ток для уравнения (7.8) на предшествующей странице. Это означает, что $D_t(\omega_0(t)) = 0$, где $\omega_0(t) \in \bar{H}^n(\pi)$ — горизонтальный когомологический класс, отвечающий форме $\tilde{\omega}_0(t)$, а D_t — ограниченная на уравнение полная производная по t. Далее,

$$D_t(\omega_0) = \frac{\partial \omega_0}{\partial t} + \mathcal{Э}_{A(\mathbf{E}(\mathcal{H}))}(\omega_0) = \frac{\partial \omega_0}{\partial t} + \{\mathcal{H}, \omega_0\}.$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{\partial}{\partial t}X_{\omega_0} + [X_{\mathcal{H}}, X_{\omega_0}] = 0.$$

Следовательно, поле $X_{\omega_0} = \mathcal{Э}_{A(\mathbf{E}(\omega_0))}$ — симметрия уравнения (7.8) на предыдущей странице. Остается заметить, что $\mathbf{E}(\omega_0)$ — производящая функция рассматриваемого закона сохранения (см. предложение 7.12 на с. 92). ☐

З а м е ч а н и е 7.6. Таким образом, гамильтоновы операторы в определенном смысле двойственны элементам группы $E_1^{2,n-1}$ (ср. с замечанием 7.4 на с. 92).

7.9. **О суперуравнениях.** Теория, изложенная в этой и предшествующей главах, основана на чисто алгебраических построениях глав 1 и 2. Поэтому все результаты остаются в силе и для дифференциальных суперуравнений при условии, что знак минус будет добавлен в соответствии со стандартным правилом знаков (подробные геометрические определения суперджетов, суперраспределения Картана и т. д. читатель может найти, например, в [34, 35]). Поэтому мы рассмотрим здесь лишь несколько менее очевидных вопросов и координатные формулы.

Пусть M — супермногообразие, $\dim M = n|m$, и π — суперрасслоение над M, $\dim \pi = s|t$. Следующая теорема является супераналогом теоремы 2.2 на с. 22.

Т е о р е м а 7.20. 1) $\hat{A}_s = 0$ *если* $s \neq n$.

2) $\hat{A}_n$ — *модуль сечений расслоения* $\mathrm{Ber}(M)$, *которое определяется так: локально, его сечения записываются в виде* $f(x)\mathbf{D}(x)$, *где* $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ *и* $\mathbf{D}$ — *некоторое базисное сечение, причем при замене координат оно умножается на определитель Березина матрицы Якоби. Определитель Березина четной матрицы* $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ *равен* $\det(A - BD^{-1}C)(\det D)^{-1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение носит локальный характер, поэтому мы рассмотрим некоторую область $\mathcal{U}$ с локальными координатами $x = (y_i, \xi_j)$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, и расщепим комплекс (2.1) на с. 21 $\mathrm{Diff}^+(\Lambda^\bullet)$ в тензорное произведение комплексов $\mathrm{Diff}^+(\Lambda^\bullet)_{\mathrm{even}} \otimes \mathrm{Diff}^+(\Lambda^\bullet)_{\mathrm{odd}}$, где $\mathrm{Diff}^+(\Lambda^\bullet)_{\mathrm{even}}$ — комплекс (2.1) на подлежащей четной области для суперобласти $\mathcal{U}$ и $\mathrm{Diff}^+(\Lambda^\bullet)_{\mathrm{odd}}$ — тот же комплекс для грассмановой алгебры, порожденной переменными $\xi_1, \ldots, \xi_m$.

Мы знаем, что $H^i(\mathrm{Diff}^+(\Lambda^\bullet)_{\mathrm{even}}) = 0$ при $i \neq n$ и $H^i(\mathrm{Diff}^+(\Lambda^\bullet)_{\mathrm{even}}) = \Lambda^n_{\mathcal{U}}$, где $\Lambda^n_{\mathcal{U}}$ — модуль n-форм на подлежащей четной области для суперобласти $\mathcal{U}$. Чтобы вычислить когомологии комплекса $\mathrm{Diff}^+(\Lambda^\bullet)_{\mathrm{odd}}$, рассмотрим факторкомплекс

$$0 \to \mathrm{Smbl}_k(A)_{\mathrm{odd}} \to \mathrm{Smbl}_{k+1}(\Lambda^1)_{\mathrm{odd}} \to \ldots,$$

где $\mathrm{Smbl}_k(P)_{\mathrm{odd}} = \mathrm{Diff}^+_k(P)_{\mathrm{odd}}/\mathrm{Diff}^+_{k-1}(P)_{\mathrm{odd}}$. Несложное вычисление показывает, что эти комплексы суть комплексы Кошуля, следовательно $H^i(\mathrm{Diff}^+(\Lambda^\bullet))_{\mathrm{odd}} = 0$ при $i > 0$ и $H^0(\mathrm{Diff}^+(\Lambda^\bullet))$ — модуль ранга 1. Поэтому $\hat{A}_i = H^i(\mathrm{Diff}^+(\Lambda^\bullet)) = 0$ при $i \neq n$ и единственный ненулевой коцикл имеет вид $dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n \dfrac{\partial^m}{\partial \xi_1 \cdots \partial \xi_m} f(y, \xi)$.

Для завершения доказательства, остается проверить, что $\hat{A}_n$ — это в точности $\mathrm{Ber}(M)$, т. е. что при замене координат выполняется равенство

$$dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n \frac{\partial^m}{\partial \xi_1 \ldots \partial \xi_m} f = dv_1 \wedge \ldots \wedge dv_n \frac{\partial^m}{\partial \eta_1 \ldots \partial \eta_m} f \mathrm{Ber}\left(J\left(\frac{x}{z}\right)\right) + T,$$

где $z = (v_i, \eta_j)$ — новая координатная система на $\mathcal{U}$, Ber обозначает определитель Березина, $J\left(\frac{x}{z}\right)$ — матрица Якоби, T когомологично нулю. Но этот факт немедленно следует из следующей известной формулы для определителя Березина: $\mathrm{Ber}\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) = \det A \cdot \det \widetilde{D}$, где матрица $\widetilde{D}$ определяется равенством $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} \widetilde{A} & \widetilde{B} \\ \widetilde{C} & \widetilde{D} \end{smallmatrix}\right)$. $\square$

Координатное выражение для сопряженного оператора имеет следующий вид. Пусть $\Delta \in \mathrm{Diff}(A, \mathcal{B})$ — некоторый скалярный оператор, $\Delta = \sum_\sigma \mathbf{D} a_\sigma \dfrac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x_\sigma}$. Тогда

$$\Delta^* = \sum_\sigma (-1)^{|\sigma| + a_\sigma x_\sigma} \mathbf{D} \frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x_\sigma} \circ a_\sigma.$$

Здесь любой символ, стоящий в показателе степени, обозначает четность соответствующего объекта.

Теперь рассмотрим некоторый матричный оператор $\Delta\colon P \to Q$, $\Delta = \|\Delta^i_j\|$, где матричные элементы определяются равенствами $\Delta(\sum_\alpha e_\alpha f^\alpha) = \sum_{\alpha,\beta} e'_\alpha \Delta^\alpha_\beta (f^\beta)$, $\{e_i\}$ — базис в P, $\{e'_i\}$ — базис в Q. Если элемент $\mathbf{D}$ — четный, то оператор Δ^* имеет вид

$$\mathbf{D}(\Delta^*)^i_j = (-1)^{(e_i + e'_j)(\Delta + e_i)} (\mathbf{D} \Delta^j_i)^*.$$

Если элемент $\mathbf{D}$ — нечетный, то

$$\mathbf{D}((\Delta^*)^\Pi)^i_j = (-1)^{(e_i + \Delta)(e'_j + 1) + \Delta e_i} (\mathbf{D} \Delta^j_i)^*,$$

где $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)^\Pi = \left(\begin{smallmatrix} D & C \\ B & A \end{smallmatrix}\right)$ — так называемое Π-транспонирование.

Замечание 7.7. $(\Delta^{**})^i_j = (-1)^{e_i + e'_j} \Delta^i_j$.

Замечание 7.8. Есть одно место, в котором распространение на суперслучай требует усовершенствования алгебраической теории дифференциальных операторов. Именно, определение геометрических модулей надо формулировать следующим образом:

Определение 7.2. Модуль P над $C^\infty(M)$ называется *геометрическим*, если

$$\bigcap_{\substack{x \in M_{\mathrm{rd}} \\ k \geqslant 1}} \mu^k_x P = 0,$$

где M_{rd} — подлежащее четное многообразие для M и μ_x — идеал в $C^\infty(M)$, состоящий из функций, обращающихся в нуль в точке $x \in M_{\mathrm{rd}}$.

В этом приложении дан набросок основ гомологической алгебры. Более подробное изложение можно найти, например, в [12, 36, 1, 51, 2].

8.1. **Комплексы.** Последовательность векторных пространств (над полем $\Bbbk$) и линейных отображений

$$\ldots \to K^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} K^i \xrightarrow{d^i} K^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \ldots$$

называется *компле́ксом*, если композиция любых двух соседних стрелок равна нулю: $d^i \circ d^{i-1} = 0$.

Отображения d^i называется *дифференциалами*. Индекс i часто опускают, например, определение дифференциала записывается так: $d^2 = 0$.

По определению, $\operatorname{im} d^{i-1} \subset \ker d^i$. Комплекс $(K^\bullet, d^\bullet)$ называется *точным* (или *ацикличным*) в размерности i, если $\operatorname{im} d^{i-1} = \ker d^i$. Комплекс, точный во всех размерностях, называют *ацикличным* (или *точным*, или *точной последовательностью*).

Пример 8.1. Последовательность $0 \to L \xrightarrow{f} K$ всегда является комплексом. Он ацикличен, если и только если f — вложение. Последовательность $K \xrightarrow{g} M \to 0$ — также всегда комплекс. Он ацикличен, если и только если g — сюрьекция.

Последовательность

$$0 \to L \xrightarrow{f} K \xrightarrow{g} M \to 0 \tag{8.1}$$

— комплекс, если $g \circ f = 0$. Он ацикличен, если и только если f — инъекция, g — сюрьекция и $\operatorname{im} f = \ker g$. В этом случае L можно отождествить с некоторым подпространством пространства K, а M — с факторпространством K/L. Точная последовательность (8.1) называется *короткой точной последовательностью* (или *точной тройкой*).

Пример 8.2. *Комплекс де Рама* — комплекс дифференциальных форм на гладком многообразии M с внешним дифференциалом:

$$\ldots \to \Lambda^{i-1} \xrightarrow{d} \Lambda^i \xrightarrow{d} \Lambda^{i+1} \xrightarrow{d} \ldots$$

Когомологии комплекса $(K^\bullet, d^\bullet)$ — семейство пространств

$$H^i(K^\bullet, d^\bullet) = \ker d^i / \operatorname{im} d^{i-1}.$$

Таким образом, равенство $H^i(K^\bullet, d^\bullet) = 0$ означает, что комплекс $(K^\bullet, d^\bullet)$ ацикличен в размерности i. Отметим, что для краткости когомологии часто обозначают $H^i(K^\bullet)$ или $H^i(d^\bullet)$. Элементы ядра $\ker d^i \subset K^i$ называют i-мерными *коциклами*, элементы образа $\operatorname{im} d^{i-1} \subset K^i$ — i-мерными *кограницами*. Таким образом, когомологии — факторпространство пространства коциклов по подпространству кограниц. Два коцикла c_1 и c_2 из одного класса эквивалентности, т. е. удовлетворяющие условию $c_1 - c_2 \in \operatorname{im} d^{i-1}$, называются *когомологичными*.

Замечание 8.1. Когда речь идет о комплексе дифференциальных форм на многообразии, коциклы называют *замкнутыми формами*, а кограницы — *точными формами*.

Замечание 8.2. Ясно, что определение комплекса легко обобщить, рассмотрев модули над некоторым кольцом вместо векторных пространств.

Упражнение 8.1. Докажите, что если

$$\ldots \to Q^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} Q^i \xrightarrow{d^i} Q^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \ldots$$

— комплекс модулей (и d^i — гомоморфизмы), а P — некоторый проективный модуль, то $H^i(Q^\bullet \otimes P) = H^i(Q^\bullet) \otimes P$.

Определенные выше комплексы называют *коцепными*, чтобы подчеркнуть, что дифференциалы увеличивают степень на 1. Обратив стрелки, получим *цепные* комплексы

$$\ldots \xleftarrow{d_{i-1}} K_{i-1} \xleftarrow{d_i} K_i \xleftarrow{d_{i+1}} K_{i+1} \leftarrow \ldots,$$

гомологии, *циклы*, *границы*, и т. д.. Разница между этими типами комплексов чисто терминологическая, поэтому мы будем главным образом говорить о коцепных комплексах.

Морфизм (или *коцепное отображение*) комплексов $f\colon K^\bullet \to L^\bullet$ — это семейство линейных отображений $f^i\colon K^i \to L^i$, коммутирующих с дифференциалами, т. е. делающих коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dots & \longrightarrow & K^{i-1} & \xrightarrow{d_K^{i-1}} & K^i & \xrightarrow{d_K^i} & K^{i+1} & \xrightarrow{d_K^{i+1}} & \dots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f^{i-1}} & & \downarrow{\scriptstyle f^i} & & \downarrow{\scriptstyle f^{i+1}} & & \\
\dots & \longrightarrow & L^{i-1} & \xrightarrow{d_L^{i-1}} & L^i & \xrightarrow{d_L^i} & L^{i+1} & \xrightarrow{d_L^{i+1}} & \dots
\end{array}$$

Такой морфизм порождает отображение $H^i(f)\colon H^i(K^\bullet) \to H^i(L^\bullet)$, $[c] \mapsto [f(c)]$, где c — коцикл, а скобки $[\,\cdot\,]$ обозначают класс когомологий. Очевидно, что $H^i(f \circ g) = H^i(f) \circ H^i(g)$ (так что H^i — функтор из категории комплексов в категорию векторных пространств). Морфизм комплексов называется *квазиизоморфизмом* (*гомологизмом*), если он порождает изоморфизм когомологий.

Пример 8.3. Гладкое отображение многообразий $F\colon M_1 \to M_2$ порождает отображение дифференциальных форм $F^*\colon \Lambda^\bullet(M_2) \to \Lambda^\bullet(M_1)$, причем $d(F^*(\omega)) = F^*(d(\omega))$. Таким образом, F^* — коцепное отображение, индуцирующее отображение когомологий де Рама $F^*\colon H^\bullet(M_2) \to H^\bullet(M_1)$. В частности, если M_1 и M_2 — диффеоморфные многообразия, то их когомологии де Рама изоморфны.

Упражнение 8.2. Убедитесь, что внешнее умножение дифференциальных форм на M порождает умножение на пространстве когомологий де Рама $H^*(M) = \bigoplus_i H^i(M)$, превращая его в (*супер*)*алгебру*. Покажите, что для диффеоморфных многообразий эти алгебры изоморфны.

Два морфизма комплексов $f^\bullet, g^\bullet\colon K^\bullet \to L^\bullet$ называются *гомотопными*, если существуют такие отображения $s^i\colon K^i \to L^{i-1}$, что

$$f^i - g^i = s^{i+1}d^i + d^{i-1}s^i.$$

Отображения s^i называют (*цепной*) *гомотопией*.

Предложение 8.1. *Если морфизмы $f^\bullet$ и $g^\bullet$ гомотопны, то $H^i(f^\bullet) = H^i(g^\bullet)$ при всех i.*

Доказательство. Рассмотрим коцикл $z \in K^i$, $dz = 0$. Тогда

$$f(z) - g(z) = (sd + ds)(z) = d(s(z)).$$

Таким образом, $f(z)$ и $g(z)$ когомологичны и, поэтому, $H^i(f^\bullet) = H^i(g^\bullet)$. $\square$

Говорят, что два комплекса $K^\bullet$ и $L^\bullet$ *коцепно эквивалентны*, если существуют такие морфизмы $f^\bullet\colon K^\bullet \to L^\bullet$ и $g^\bullet\colon L^\bullet \to K^\bullet$, что $g \circ f$ гомотопно $\mathrm{id}_{K^\bullet}$, а $f \circ g$ гомотопно $\mathrm{id}_{L^\bullet}$. Очевидно, что коцепно эквивалентные комплексы имеют изоморфные когомологии.

Пример 8.4. Рассмотрим два гомотопных (в топологическом смысле) отображения гладких многообразий $F_0, F_1\colon M_1 \to M_2$. Покажем, что соответствующие морфизмы комплексов де Рама $F_0^*, F_1^*\colon \Lambda^\bullet(M_2) \to \Lambda^\bullet(M_1)$ гомотопны (в указанном выше алгебраическом смысле).

Пусть $F\colon M_1 \times [0,1] \to M_2$ — гомотопия между F_0 и F_1, $F_0(x) = F(x,0)$, $F_1(x) = F(x,1)$. Возьмем форму $\omega \in \Lambda^i(M_2)$. Тогда

$$F^*(\omega) = \omega_1(t) + dt \wedge \omega_2(t),$$

где $\omega_1(t) \in \Lambda^i(M_1)$, $\omega_2(t) \in \Lambda^{i-1}(M_1)$ при каждом $t \in [0,1]$. В частности, $F_0^*(\omega) = \omega_1(0)$ и $F_1^*(\omega) = \omega_1(1)$. Положим $s(\omega) = \int_0^1 \omega_2(t)\,dt$. Имеют место равенства $F^*(d\omega) = d(F^*(\omega)) = d\omega_1(t) + dt \wedge \omega_1'(t) - dt \wedge d\omega_2(t)$, где $'$ обозначает производную по t. Следовательно, $s(d(\omega)) = \int_0^1 (\omega_1'(t) - d\omega_2(t))\,dt = \omega_1(1) - \omega_1(0) - d\int_0^1 \omega_2(t)\,dt = F_1^*(\omega) - F_0^*(\omega) - d(s(\omega))$, поэтому s — гомотопия между F_0^* и F_1^*.

Упражнение 8.3. Докажите, что если два многообразия M_1 и M_2 гомотопны (т. е. существуют такие отображения $f\colon M_1 \to M_2$ и $g\colon M_2 \to M_1$, что композиции $f \circ g$ и $g \circ f$ гомотопны тождественным отображениям), то их когомологии изоморфны.

С л е д с т в и е 8.2 (лемма Пуанкаре). *Локально каждая замкнутая форма* $\omega \in \Lambda^i(M)$, $d\omega = 0$, $i \geqslant 1$, *точна*: $\omega = d\eta$.

Говорят, что комплекс $K^\bullet$ *гомотопен нулю*, если тождественный морфизм $\mathrm{id}_{K^\bullet}$ гомотопен нулевому морфизму, т. е. если существуют такие отображения $s^i\colon K^i \to K^{i-1}$, что $\mathrm{id}_{K^\bullet} = sd + ds$. Очевидно, что любой гомотопный нулю комплекс имеет тривиальные когомологии.

П р и м е р 8.5. Пусть V — векторное пространство над полем $\Bbbk$. Возьмем некоторый нетривиальный линейный функционал $u\colon V \to \Bbbk$ и рассмотрим комплекс

$$0 \leftarrow \Bbbk \xleftarrow{d} V \xleftarrow{d} \Lambda^2(V) \xleftarrow{d} \ldots \xleftarrow{d} \Lambda^{n-1}(V) \xleftarrow{d} \Lambda^n(V) \xleftarrow{d} \ldots,$$

где d — внутреннее произведение с u:

$$d(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} u(v_i) v_1 \wedge \ldots \wedge v_{i-1} \wedge v_{i+1} \wedge \ldots \wedge v_k.$$

Возьмем также некоторый нетривиальный элемент $v \in V$ и рассмотрим комплекс

$$0 \to \Bbbk \xrightarrow{s} V \xrightarrow{s} \Lambda^2(V) \xrightarrow{s} \ldots \xrightarrow{s} \Lambda^{n-1}(V) \xrightarrow{s} \Lambda^n(V) \xrightarrow{s} \ldots,$$

где s — внешнее умножение на v:

$$s(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) = v \wedge v_1 \wedge \ldots \wedge v_k.$$

Так как d — дифференцирование внешней алгебры $\Lambda^*(V)$, получаем $(ds + sd)(w) = d(v \wedge w) + v \wedge dw = dv \wedge w = u(v)w$. Это означает, что оба рассматриваемые комплекса гомотопны нулю и, поэтому, ацикличны.

П р и м е р 8.6. Рассмотрим два комплекса

$$0 \leftarrow S^n(V) \xleftarrow{d} S^{n-1}(V) \otimes V \xleftarrow{d} S^{n-2}(V) \otimes \Lambda^2(V) \xleftarrow{d} \ldots, \tag{8.2}$$

$$0 \to S^n(V) \xrightarrow{s} S^{n-1}(V) \otimes V \xrightarrow{s} S^{n-2}(V) \otimes \Lambda^2(V) \xrightarrow{s} \ldots, \tag{8.3}$$

где

$$d(w \otimes v_1 \wedge \ldots \wedge v_q) = \sum_{i=1}^{q} (-1)^{i+1} v_i w \otimes v_1 \wedge \ldots \wedge v_{i-1} \wedge v_{i+1} \wedge \ldots \wedge v_q,$$

$$s(w_1 \ldots w_p \otimes v) = \sum_{i=1}^{p} w_1 \ldots w_{i-1} w_{i+1} \ldots w_p \otimes w_i \wedge v.$$

Оба отображения d и s — дифференцирования градуированной алгебры $S^*(V) \otimes \Lambda^*(V)$, градуировка на которой индуцирована градуировкой на $\Lambda^*(V)$, поэтому их коммутатор также является дифференцированием. Замечая, что на пространстве $S^1(V) \otimes \Lambda^1(V)$ этот коммутатор является тождественным отображением, получаем формулу

$$(ds + sd)(x) = (p + q)x, \qquad x \in S^p(V) \otimes \Lambda^q(V).$$

Таким образом, опять оба рассматриваемые комплекса гомотопны нулю (при $n > 0$). Комплекс (8.2) называется *комплексом Кошуля*. Комплекс (8.3) — полиномиальный комплекс де Рама.

Комплекс $L^\bullet$ называется *подкомплексом* комплекса $K^\bullet$, если пространства L^i суть подпространства в K^i и дифференциалы в $L^\bullet$ суть ограничения дифференциалов в $K^\bullet$, т. е. $d_K(L^{i-1}) \subset L^i$. В такой ситуации дифференциалы в $K^\bullet$ порождают дифференциалы на факторпространствах $M^i = K^i/L^i$ и возникает комплекс $M^\bullet$, называемый *факторкомплексом* и обозначаемый $M^\bullet = K^\bullet/L^\bullet$.

Когомологии комплексов $K^\bullet$, $L^\bullet$ и $M^\bullet = K^\bullet/L^\bullet$ связаны друг с другом следующими отображениями. Во-первых, вложение $\varphi\colon L^\bullet \to K^\bullet$ и естественная проекция $\psi\colon K^\bullet \to M^\bullet$ порождают отображения в когомологиях $H^i(\varphi)\colon H^i(L^\bullet) \to H^i(K^\bullet)$ и $H^i(\psi)\colon H^i(K^\bullet) \to H^i(M^\bullet)$. Существует еще одно менее очевидное отображение

$$\partial^i\colon H^i(M^\bullet) \to H^{i+1}(L^\bullet),$$

называемое *граничным* (или *связывающим*) гомоморфизмом.

Отображение ∂^i определяется следующим образом. Рассмотрим некоторый когомологический класс $x \in H^i(M^\bullet)$ и элемент $y \in M^i$ из этого класса. Возьмем такой элемент $z \in K^i$, что $\psi(z) = y$. Тогда $\psi(dz) = d\psi(z) = dy = 0$, следовательно существует такой элемент $w \in L^{i+1}$, что $\varphi(w) = dz$. Так как $\varphi(dw) = d\varphi(w) = ddz = 0$, получаем $dw = 0$, т. е. w является коциклом. Нетрудно проверить, что его класс когомологий не зависит от выбора элементов y и z. Этот класс и есть $\partial^i(x)$.

Таким образом, если имеется короткая точная последовательность комплексов

$$0 \to L^\bullet \xrightarrow{\varphi} K^\bullet \xrightarrow{\psi} M^\bullet \to 0 \tag{8.4}$$

(это значит, что φ и ψ — морфизмы комплексов и при всех i последовательности $0 \to L^i \xrightarrow{\varphi^i} K^i \xrightarrow{\psi^i} M^i \to 0$ точны), то возникает следующая бесконечная последовательность:

$$\ldots \xrightarrow{H^{i-1}(\psi)} H^{i-1}(M^\bullet) \xrightarrow{\partial^{i-1}} H^i(L^\bullet) \xrightarrow{H^i(\varphi)} H^i(K^\bullet) \xrightarrow{H^i(\psi)} H^i(M^\bullet) \xrightarrow{\partial^i} H^{i+1}(L^\bullet) \xrightarrow{H^{i+1}(\varphi)} \ldots \tag{8.5}$$

Основное свойство этой последовательности состоит в следующем:

Теорема 8.3. *Последовательность* (8.5) *точна.*

Доказательство состоит из прямых проверок и оставляется читателю. □

Последовательность (8.5) называется *длинной точной последовательностью*, отвечающей короткой точной последовательности комплексов (8.4).

Упражнение 8.4. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle f} & & \big\downarrow{\scriptstyle g} & & \big\downarrow{\scriptstyle h} & & \\ 0 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Докажите, используя теорему 8.3, что если f и h — изоморфизмы, то и g — изоморфизм.

8.2. **Спектральные последовательности.** Пусть имеется комплекс $K^\bullet$ и его подкомплекс $L^\bullet \subset K^\bullet$. Точная последовательность (8.5) может дать некоторую информацию о когомологиях комплекса $K^\bullet$, если когомологии комплексов $L^\bullet$ и $K^\bullet/L^\bullet$ известны. Пусть теперь имеется комплекс $K^\bullet$ и фильтрация в нем, т. е. убывающая последовательность подкомплексов

$$K^\bullet \supset K_1^\bullet \supset K_2^\bullet \supset K_3^\bullet \supset \ldots$$

Тогда мы получаем для всех $p = 0, 1, 2, \ldots$ комплексы

$$\ldots \to E_0^{p,q-1} \to E_0^{p,q} \to E_0^{p,q+1} \to \ldots,$$

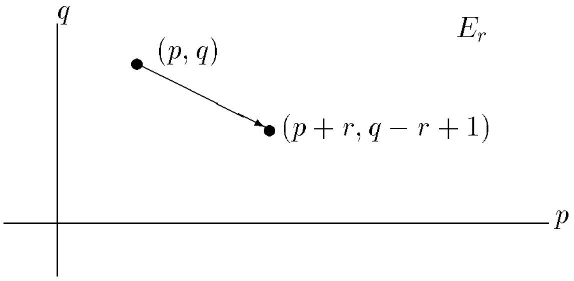
где $E_0^{p,q} = K_p^{p+q}/K_{p+1}^{p+q}$. Когомологии $E_1^{p,q} = H^{p+q}(E_0^{p,\bullet})$ этих комплексов можно считать первым приближением к когомологиям комплекса $K^\bullet$. Аппарат спектральных последовательностей позволяет построить последующие приближения E_r, $r \geqslant 1$.

Определение 8.1. *Спектральная последовательность* — это такая последовательность векторных пространств $E_r^{p,q}$, $r \geqslant 0$, и линейных отображений $d_r^{p,q}\colon E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$, что $d_r^2 = 0$ (точнее, $d_r^{p+r,q-r+1} \circ d_r^{p,q} = 0$), а когомологии $H^{p,q}(E_r^{\bullet,\bullet}, d_r^{\bullet,\bullet})$ относительно дифференциала d_r изоморфны $E_{r+1}^{p,q}$.

Таким образом, E_r и d_r однозначно определяют E_{r+1}, но не определяют d_{r+1}.

Обычно, $p+q$, p и q называются степенью, фильтрационной степенью и дополнительной степенью соответственно.

Удобно для каждого r изображать пространства $E_r^{p,q}$ целочисленными точками на плоскости с координатами (p, q). Действие дифференциала d_r выглядит так:



Возьмем некоторый элемент $\alpha \in E_r^{p,q}$. Если $d_r(\alpha) = 0$, то α может рассматриваться как элемент группы $E_{r+1}^{p,q}$. Если опять $d_{r+1}(\alpha) = 0$, то α может рассматриваться как элемент группы $E_{r+2}^{p,q}$ и т. д. Это позволяет определить следующие два векторные пространства:

$$\begin{aligned} C_\infty^{p,q} &= \{\, \alpha \in E_0^{p,q} \mid d_0(\alpha) = 0,\ d_1(\alpha) = 0, \ldots, d_r(\alpha) = 0, \ldots \,\}, \\ B_\infty^{p,q} &= \{\, \alpha \in C_\infty^{p,q} \mid \text{существует такой элемент } \beta \in E_r^{p,q}, \text{ что } \alpha = d_r(\beta) \,\}. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Положим $E_\infty^{p,q} = C_\infty^{p,q}/B_\infty^{p,q}$. Спектральная последовательность называется *регулярной*, если для любых p и q существует такое r_0, что $d_r^{p,q} = 0$ при $r \geqslant r_0$. В этом случае имеются естественные проекции

$$E_r^{p,q} \to E_{r+1}^{p,q} \to \ldots \to E_\infty^{p,q}, \qquad r \geqslant r_0,$$

и $E_\infty^{p,q} = \varinjlim E_r^{p,q}$.

Пусть E и $'E$ — две спектральные последовательности. *Морфизм* $f\colon E \to {}'E$ — это такое семейство отображений $f_r^{p,q}\colon E_r^{p,q} \to {}'E_r^{p,q}$, что $d_r \circ f_r = f_r \circ d_r$ и $f_{r+1} = H(f_r)$. Очевидно, что любой морфизм $f\colon E \to {}'E$ порождает отображения $f_\infty^{p,q}\colon E_\infty^{p,q} \to {}'E_\infty^{p,q}$. Далее, ясно, что если f_r — изоморфизм, то f_s — изоморфизм при $s \geqslant r$. Более того, если спектральные последовательности E и $'E$ регулярны, то f_∞ — также изоморфизм.

Упражнение 8.5. Предположим, что $E_r^{p,q} \neq 0$ лишь при $p \geqslant p_0$, $q \geqslant q_0$. Докажите, что в этом случае существует такое r_0, что $E_r^{p,q} = E_{r+1}^{p,q} = \ldots = E_\infty^{p,q}$ for $r \geqslant r_0$.

Рассмотрим градуированное векторное пространство $G = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} G^i$, наделенное такой убывающей фильтрацией $G \supset \ldots \supset G_p \supset G_{p+1} \supset \ldots$, что $\bigcap_p G_p = 0$ и $\bigcup_p G_p = G$. Фильтрация называется *регулярной*, если для каждого i существует такое p, что $G_p^i = 0$.

Говорят, что спектральная последовательность E *сходится* к G, если рассматриваемая спектральная последовательность и фильтрация пространства G регулярны и член $E_\infty^{p,q}$ изоморфен G_p^{p+q}/G_{p+1}^{p+q}.

Упражнение 8.6. Рассмотрим две спектральные последовательности E и $'E$, сходящиеся к G и G' соответственно. Пусть $f\colon E \to {}'E$ — морфизм спектральных последовательностей и $g\colon G \to G'$ — такое отображение, что $f_\infty^{p,q}\colon E_\infty^{p,q} \to {}'E_\infty^{p,q}$ совпадает с отображением, порожденным g. Докажите, что если при некотором r отображение $f_r^{p,q}\colon E_r^{p,q} \to {}'E_r^{p,q}$ — изоморфизм, то g — также изоморфизм,

Теперь мы опишем один важный механизм возникновения спектральных последовательностей.

Определение 8.2. *Точная пара* — пара векторных пространств (D, E) вместе с такими отображениями i, j, k, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "i"] & & D \arrow[dl, "j"] \\ & E \arrow[ul, "k"] & \end{tikzcd}$$

точна в каждой вершине.

Положим $d = jk\colon E \to E$. Ясно, что $d^2 = 0$, так что можно определить пространство когомологий $H(E, d)$ относительно d. Для данной точной пары определим *производную* пару

$$\begin{tikzcd} D' \arrow[rr, "i'"] & & D' \arrow[dl, "j'"] \\ & E' \arrow[ul, "k'"] & \end{tikzcd}$$

следующим образом: $D' = \operatorname{im} i$, $E' = H(E, d)$, i' — ограничение отображения i на D', $j'(i(x))$ для $x \in D$ есть класс когомологий элемента $j(x)$ в $H(E)$, а отображение k' переводит каждый класс когомологий $[y]$, $y \in E$, в элемент $k(y) \in D'$.

Упражнение 8.7. Проверьте, что отображения i', j' и k' определены корректно и что производная пара сама является точной парой.

Таким образом, начав с некоторой точной пары $C_1 = (D, E, i, j, k)$ можно получить последовательность точных пар $C_r = (D_r, E_r, i_r, j_r, k_r)$, в которой пара C_{r+1} является производной парой для C_r.

Явное описание пары C_r в терминах пары C_1 состоит в следующем.

Предложение 8.4. *Следующие изоморфизмы имеют место при всех* r:

$$D_r = \operatorname{im} i^{r-1},$$
$$E_r = k^{-1}(\operatorname{im} i^{r-1})/j(\ker i^{r-1}).$$

Отображение i_r *является ограничением* i *на* D_r, $j_r(i^{r-1}(x)) = [j(x)]$, *а* $k_r([y]) = k(y)$, *где* $[\,\cdot\,]$ *обозначает класс эквивалентности по модулю* $j(\ker i^{r-1})$.

Доказательство проводится индукцией по r и оставляется читателю. $\square$

Теперь предположим, что точная пара C_1 биградуирована, т. е. $D = \bigoplus_{p,q} D^{p,q}$, $E = \bigoplus_{p,q} E^{p,q}$, и отображения i, j и k имеют бистепени $(-1, 1)$, $(0, 0)$ и $(1, 0)$ соответственно. Другими словами,

$$i^{p,q}\colon D^{p,q} \to D^{p-1,q+1},$$
$$j^{p,q}\colon D^{p,q} \to E^{p,q},$$
$$k^{p,q}\colon E^{p,q} \to D^{p+1,q}.$$

Ясно, что производные пары C_r также биградуированы, причем отображения i_r, j_r и k_r имеют бистепени $(-1, 1)$, $(r-1, 1-r)$ и $(1, 0)$ соответственно. Следовательно, d_r — дифференциал в E_r степени $(r, 1-r)$. Таким образом, $(E_r^{p,q}, d_r^{p,q})$ — спектральная последовательность.

Теперь вернемся к комплексу $K^\bullet$ с убывающей фильтрацией $K_p^\bullet$. Каждая короткая точная последовательность

$$0 \to K_{p+1}^\bullet \to K_p^\bullet \to K_p^\bullet/K_{p+1}^\bullet \to 0$$

порождает соответствующую длинную точную последовательность:

$$\ldots \xrightarrow{k} H^{p+q}(K_{p+1}^\bullet) \xrightarrow{i} H^{p+q}(K_p^\bullet) \xrightarrow{j} H^{p+q}(K_p^\bullet/K_{p+1}^\bullet) \xrightarrow{k} H^{p+q+1}(K_{p+1}^\bullet) \xrightarrow{i} \ldots$$

Следовательно, полагая $D_1^{p,q} = H^{p+q}(K_p^\bullet)$ и $E_1^{p,q} = H^{p+q}(K_p^\bullet/K_{p+1}^\bullet)$, получаем биградуированную точную пару, причем степени входящих в нее отображений такие же как рассмотренные выше. Итак, по комплексу с фильтрацией мы построили спектральную последовательность.

Вычислим пространства $E_r^{p,q}$ в явной форме. Рассмотрим верхний член $k^{-1}(\operatorname{im} i^{r-1})$ в выражении для $E_r^{p,q}$ (см. предложение 8.4). Элемент пространства $E_1^{p,q}$ — это класс $[x] \in H^{p+q}(K_p^\bullet/K_{p+1}^\bullet)$, $x \in K_p^{p+q}$, $dx \in K_{p+1}^{p+q}$. Класс $[x]$ лежит в $k^{-1}(\operatorname{im} i^{r-1})$, если $k([x]) \in H^{p+q+1}(K_{p+r}^\bullet) \subset H^{p+q+1}(K_{p+1}^\bullet)$. Это эквивалентно равенству $dx = y + dz$, где $y \in K_{p+r}^{p+q}$, $z \in K_{p+1}^{p+q}$. Таким образом, $x = (x-z) + z$, где $d(x-z) \in K_{p+r}^{p+q}$. Обозначив

$$Z_r^{p,q} = \{\, w \in K_p^{p+q} \mid dw \in K_{p+r}^{p+q} \,\},$$

получим $k^{-1}(\operatorname{im} i^{r-1}) = Z_r^{p,q} + K_{p+1}^{p+q}$.

Далее, рассмотрим нижний член $j(\ker i^{r-1})$ в выражении для $E_r^{p,q}$. Ядро отображения $i^{r-1}\colon H^{p+q}(K_p^\bullet) \to H^{p+q}(K_{p-r+1}^\bullet)$ состоит из таких коциклов $x \in K_p^{p+q}$, что $x = dy$ при $y \in K_{p-r+1}^{p+q-1}$. Поэтому $y \in Z_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}$ и $\ker i^{r-1} = dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}$. Тогда $j(\ker i^{r-1}) = dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2} + K_{p+1}^{p+q}$.

Итак, получаем

$$E_r^{p,q} = \frac{Z_r^{p,q} + K_{p+1}^{p+q}}{dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2} + K_{p+1}^{p+q}} = \frac{Z_r^{p,q}}{dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}}.$$

Замечание 8.3. Последнее равенство вытекает из хорошо известного модулярного изоморфизма Нётер

$$\frac{M+N}{M_1+N} = \frac{M}{M_1 + (M\cap N)}, \qquad M_1 \subset M.$$

Теорема 8.5. *Если фильтрация комплекса $K^\bullet$ регулярна, то спектральная последовательность этого комплекса сходится к когомологиям $H^\bullet(K^\bullet)$, профильтрованным образами $H_p^k(K^\bullet) = \operatorname{im} H^k(i_p)$ естественных вложений $i_p\colon K_p^\bullet \to K^\bullet$.*

Доказательство. Отметим, во-первых, что если фильтрация комплекса $K^\bullet$ регулярна, то спектральная последовательность этого комплекса также регулярна. Далее, пространства $C_\infty^{p,q}$ и $B_\infty^{p,q}$ (см. определение (8.6) на с. 104) можно описать следующим образом:

$$C_\infty^{p,q} = \frac{Z_\infty^{p,q}}{Z_\infty^{p+1,q-1}}, \qquad B_\infty^{p,q} = \frac{(K_p^{p+q}\cap d(K^{p+q-1})) + Z_\infty^{p+1,q-1}}{Z_\infty^{p+1,q-1}},$$

где $Z_\infty^{p,q} = \{\, w \in K_p^{p+q} \mid dw = 0\,\}$, откуда

$$E_\infty^{p,q} = \frac{Z_\infty^{p,q}}{(K_p^{p+q}\cap d(K^{p+q-1})) + Z_\infty^{p+1,q-1}}.$$

Так как $H_p^{p+q}(K^\bullet) = \dfrac{Z_\infty^{p,q} + d(K^{p+q-1})}{d(K^{p+q-1})}$, то

$$\frac{H_p^{p+q}(K^\bullet)}{H_{p+1}^{p+q}(K^\bullet)} = \frac{Z_\infty^{p,q} + d(K^{p+q-1})}{Z_\infty^{p+1,q-1} + d(K^{p+q-1})} = \frac{Z_\infty^{p,q}}{Z_\infty^{p+1,q-1} + (K_p^{p+q}\cap d(K^{p+q-1}))} = E_\infty^{p,q}.$$

Теорема доказана. □

Определение 8.3. *Бикомплекс* — это семейство таких векторных пространств $K^{\bullet,\bullet}$ и линейных отображений $d'\colon K^{p,q} \to K^{p+1,q}$, $d''\colon K^{p,q} \to K^{p,q+1}$, что $(d')^2 = 0$, $(d'')^2 = 0$ и $d'd'' + d''d' = 0$.

Пусть $K^\bullet$ — *тотальный* (или *диагональный*) комплекс бикомплекса $K^{\bullet,\bullet}$, т. е. по определению, $K^i = \bigoplus_{i=p+q} K^{p,q}$ и $d_K = d' + d''$. Комплекс $K^\bullet$ имеет две очевидные фильтрации:

$$\text{фильтрация I:} \qquad {}'K_p^i = \bigoplus_{\substack{j+q=i\\ j\geqslant p}} K^{j,q},$$

$$\text{фильтрация II:} \qquad {}''K_q^i = \bigoplus_{\substack{p+j=i\\ j\geqslant q}} K^{p,j}.$$

Эти две фильтрации порождают две спектральные последовательности, обозначаемые через ${}'E_r^{p,q}$ и ${}''E_r^{p,q}$ соответственно.

Нетрудно проверить, что ${}'E_1^{p,q} = {}''H^q(K^{p,\bullet})$ и ${}''E_1^{p,q} = {}'H^q(K^{\bullet,p})$, где ${}'H$ (соотв., ${}''H$) — когомологии относительно d' (соотв., d''), причем дифференциал d_1 индуцирован отображениями d' и d'' соответственно.

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Предложение 8.6. *${}'E_2^{p,q} = {}'H^p({}''H^q(K^{\bullet,\bullet}))$ и ${}''E_2^{p,q} = {}''H^p({}'H^q(K^{\bullet,\bullet}))$.*

Теперь предположим, что обе фильтрации регулярны.

Упражнение 8.8. Докажите, что

1) если $K^{p,q}=0$ при $q<q_0$ (соотв., $p<p_0$), то первая (соотв., вторая) фильтрация регулярна;
2) если $K^{p,q}=0$ при $q<q_0$ и $q>q_1$, то обе фильтрации регулярны.

В этом случае обе спектральные последовательности сходятся к общему пределу $H^\bullet(K^\bullet)$.

Замечание 8.4. Данный факт не означает, что обе спектральные последовательности имеют общий бесконечный член, поскольку две фильтрации пространства $H^\bullet(K^\bullet)$ различны.

Разберем типичный пример использования предложения 8.6 на предшествующей странице.

Пример 8.7. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 \arrow[r] & K^{2,0} \arrow[u] \arrow[r, "d_2"] & K^{2,1} \arrow[u] \arrow[r, "d_2"] & K^{2,2} \arrow[u] \arrow[r] & \ldots \\
0 \arrow[r] & K^{1,0} \arrow[u, "d_1"'] \arrow[r, "d_2"] & K^{1,1} \arrow[u, "d_1"'] \arrow[r, "d_2"] & K^{1,2} \arrow[u, "d_1"'] \arrow[r] & \ldots \\
0 \arrow[r] & K^{0,0} \arrow[u, "d_1"'] \arrow[r, "d_2"] & K^{0,1} \arrow[u, "d_1"'] \arrow[r, "d_2"] & K^{0,2} \arrow[u, "d_1"'] \arrow[r] & \ldots \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

и предположим, что дифференциал d_1 точен всюду кроме членов $K^{0,q}$ в нижней строке, а дифференциал d_2 точен всюду кроме членов $K^{p,0}$ в крайнем левом столбце. Таким образом, мы получаем два комплекса $L_1^\bullet$ и $L_2^\bullet$, где $L_1^i = H^0(K^{i,\bullet},d_2)$, $L_2^i = H^0(K^{\bullet,i},d_1)$, а дифференциал в комплексе L_1 (соотв., L_2) порожден d_1 (соотв., d_2). Рассмотри бикомплекс $K^{\bullet,\bullet}$, где $(d')^{p,q}=d_1^{p,q}$, $(d'')^{p,q}=(-1)^q d_2^{p,q}$. Легко видеть, что

$$
'E_2^{p,q} = {'E_3^{p,q}} = \ldots = {'E_\infty^{p,q}} = \begin{cases} 0 & \text{if } q\neq 0, \\ H^p(L_1^\bullet) & \text{if } q=0, \end{cases}
$$
$$
''E_2^{p,q} = {''E_3^{p,q}} = \ldots = {''E_\infty^{p,q}} = \begin{cases} 0 & \text{if } p\neq 0, \\ H^q(L_2^\bullet) & \text{if } p=0. \end{cases}
$$

Так как обе спектральные последовательности сходятся к общему пределу, мы получаем равенство $H^i(L_1^\bullet)=H^i(L_2^\bullet)$.

Опишем этот изоморфизм явно. Рассмотрим некоторый некоторый когомологический класс из $H^i(L_1^\bullet)$ и выберем какой-то элемент $k^{i,0}\in K^{i,0}$, $d_1(k^{i,0})=0$, $d_2(k^{i,0})=0$ из этого класса. Так как $d_1(k^{i,0})=0$, существует такой элемент $x\in K^{i-1,0}$, что $d_1(x)=k^{i,0}$. Положим $k^{i-1,1}=-d_2(x)\in K^{i-1,1}$. Тогда выполняются равенства $d_2(k^{i-1,1})=0$ и $d_1(k^{i-1,1})=-d_1(d_2(x))=-d_2(d_1(x))=-d_2(k^{i,0})=0$. Далее, элементы $k^{i,0}$ и $k^{i-1,1}$ когомологичны в тотальном комплексе $K^\bullet$: $k^{i,0}-k^{i-1,1}=d_1x+d_2x=(d'+d'')(x)$. Продолжая этот процесс, получим последовательность когомологичных в $K^\bullet$ элементов $k^{i-j,j}\in K^{i-j,j}$, $d_1(k^{i-j,j})=0$, $d_2(k^{i-j,j})=0$. Остается заметить, что установленный выше изоморфизм ставит в соответствие классу когомологий элемента $k^{i,0}$ класс элемента $k^{0,i}$.

Упражнение 8.9. По аналогии с примером 8.7 на предыдущей странице проанализируйте коммутативную диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 & K^{2,0} \arrow[l] \arrow[d, "d_1"] & K^{2,1} \arrow[l, "d_2"'] \arrow[d, "d_1"] & K^{2,2} \arrow[l, "d_2"'] \arrow[d, "d_1"] & \dots \arrow[l] \\
0 & K^{1,0} \arrow[l] \arrow[d, "d_1"] & K^{1,1} \arrow[l, "d_2"'] \arrow[d, "d_1"] & K^{1,2} \arrow[l, "d_2"'] \arrow[d, "d_1"] & \dots \arrow[l] \\
0 & K^{0,0} \arrow[l] \arrow[d] & K^{0,1} \arrow[l, "d_2"'] \arrow[d] & K^{0,2} \arrow[l, "d_2"'] \arrow[d] & \dots \arrow[l] \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Список литературы

[1] Ботт Р., Ту Л. В. Дифференциальные формы в алгебраической топологии: Пер. с англ. — М.: Наука, 1989.

[2] Бурбаки Н. Алгебра. Глава X. Гомологическая алгебра: Пер. с фр. — М.: Наука, 1987.

[3] Вербовецкий А. М., Виноградов А. М., Гесслер Д. М. Скалярные дифференциальные инварианты и характеристические классы однородных геометрических структур. — Мат. заметки, т. 51, вып. 6, с. 15–26.

[4] Виноградов А. М. Алгебра логики теории линейных дифференциальных операторов. — ДАН СССР, 1972, т. 205, № 5, с. 1025–1028.

[5] Виноградов А. М. К алгебро-геометрическим основаниям лагранжевой теории поля. — ДАН СССР, 1977, т. 236, № 2, с. 284–287.

[6] Виноградов А. М. Одна спектральная последовательность, связанная с нелинейным дифференциальным уравнением, и алгебро-геометрические основания лагранжевой теории поля со связями. — ДАН СССР, 1978, т. 238, № 5, с. 1028–1031.

[7] Виноградов А. М. Геометрия нелинейных дифференциальных уравнений. — Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. Т. 11, М.: ВИНИТИ, 1980, с. 89–134.

[8] Виноградов А. М., Красильщик И. С. Один метод вычисления высших симметрий нелинейных эволюционных уравнений и нелокальные симметрии. — ДАН СССР, 1980, т. 253, № 6, с. 1289–1293.

[9] Виноградов А. М., Красильщик И. С., Лычагин В. В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1986.

[10] Картан Э. Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения: Пер. с фр. — М.: Изд-во МГУ, 1962.

[11] Лычагин В. В., Рубцов В. Н. Локальная классификация дифференциальных уравнений Монжа–Ампера. — ДАН СССР, 1983, т. 272, № 1, с. 34–38.

[12] Маклейн С. Гомология: Пер. с англ. — М.: Мир, 1966.

[13] Мальгранж Б. Идеалы дифференцируемых функций: Пер. с англ. — М.: Мир, 1968.

[14] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям: Пер. с англ. — М.: Мир, 1989.

[15] Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / А. В. Бочаров, А. М. Вербовецкий, А. М. Виноградов, С. В. Дужин, И. С. Красильщик, А. В. Самохин, Ю. Н. Торхов, Н. Г. Хорькова, В. Н. Четвериков / Под ред. А. М. Виноградова и И. С. Красильщика. — М.: Изд-во «Факториал», 1997.

[16] Спенсер Д. Переопределенные системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных. — Математика (сб. переводов), 1970, т. 14, № 2, с. 66–90; № 3, с. 99–126.

[17] Хорькова Н. Г. Законы сохранения и нелокальные симметрии. — Мат. заметки, 1988, т. 44, вып. 1, с. 134–144.

[18] Anderson I. M. Introduction to the variational bicomplex. — Mathematical Aspects of Classical Field Theory (M. Gotay, J. E. Marsden, and V. E. Moncrief, eds.), Contemporary Mathematics, vol. 132, Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1992, pp. 51–73.

[19] Anderson I. M. The variational bicomplex. — To appear.

[20] Barnich G. Brackets in the jet-bundle approach to field theory. — In [33], pp. 17–27, hep-th/9709164.

[21] Barnich G., Brandt F., and Henneaux M. Local BRST cohomology in Einstein–Yang–Mills theory. — Nuclear Phys. B **445** (1995), 357–408, hep-th/9505173.

[22] Barnich G., Brandt F., and Henneaux M. Local BRST cohomology in the antifield formalism: I. General theorems. — Comm. Math. Phys. **174** (1995), 57–92, hep-th/9405109.

[23] Barnich G., Brandt F., and Henneaux M. Local BRST cohomology in the antifield formalism: II.Application to Yang–Mills theory. — Comm. Math. Phys. **174** (1995), 93–116, hep-th/9405194.

[24] Brandt F. Gauge covariant algebras and local BRST cohomology. — In [33], pp. 53–67, hep-th/9711171.

[25] Bryant R. L., Chern S.-S., Gardner R. B., Goldschmidt H. L., and Griffiths P. A. Exterior differential systems. — New York: Springer-Verlag, 1991.

[26] Bryant R. L. and Griffiths P. A. Characteristic cohomology of differential systems, I: General theory. — J. Amer. Math. Soc. **8** (1995), 507–596, http://www.math.duke.edu/~bryant.

[27] Frölicher A. and Nijenhuis A. Theory of vector valued differential forms. Part I: derivations in the graded ring of differential forms. — Indag. Math. **18** (1956), 338–359.

[28] Gerstenhaber M. and Schack S. D. Algebraic cohomology and deformation theory. — Deformation Theory of Algebras and Structures and Applications (M. Gerstenhaber and M. Hazewinkel, eds.), Dordrecht: Kluwer, 1988, pp. 11–264.

[29] Gessler D. M. The “three-line” theorem for the Vinogradov $\mathcal{C}$-spectral sequence of the Yang–Mills equations. — Acta Appl. Math. **56** (1999), 139–153, http://ecfor.rssi.ru/~diffiety/.

[30] Gessler D. M. On the Vinogradov $\mathcal{C}$-spectral sequence for determined systems of differential equations. — Differential Geom. Appl. **7** (1997), 303–324, http://ecfor.rssi.ru/~diffiety/.

[31] Goldschmidt H. Existence theorems for analytic linear partial differential equations. — Ann. of Math. (2) **86** (1967), 246–270.

[32] Henneaux M. Consistent interactions between gauge fields: The cohomological approach. — In [33], pp. 93–109, hep-th/9712226.

[33] Henneaux M., Krasil′shchik I. S., and Vinogradov A. M. (eds.), Secondary calculus and cohomological physics. — Contemporary Mathematics, vol. 219, Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1998.

[34] Hernández Ruipérez D. and Muñoz Masqué J. Global variational calculus on graded manifolds, I: graded jet bundles, structure 1-form and graded infinitesimal contact transformations. — J. Math. Pures Appl. **63** (1984), 283–309.

[35] Hernández Ruipérez D. and Muñoz Masqué J. Global variational calculus on graded manifolds, II. — J. Math. Pures Appl. **64** (1985), 87–104.

[36] Hilton P. J. and Stammbach U. A course in homological algebra. — Berlin: Springer-Verlag, 1971.

[37] Kiso K. Pseudopotentials and symmetries of evolution equations. — Hokkaido Math. J. **18** (1989), 125–136.

[38] Kosmann-Schwarzbach Y. Exact Gerstenhaber algebras and Lie bialgebroids. — Acta Appl. Math. **41** (1995), 153–165.

[39] Krasil′shchik I. S. Some new cohomological invariants for nonlinear differential equations. — Differential Geom. Appl. **2** (1992), 307–350.

[40] Krasil′shchik I. S. Hamiltonian formalism and supersymmetry for nonlinear differential equations. — Preprint ESI 257, 1995, http://www.esi.ac.at.

[41] Krasil′shchik I. S. Calculus over commutative algebras: A concise user guide. — Acta Appl. Math. **49** (1997), 235–248, http://ecfor.rssi.ru/~diffiety/.

[42] Krasil′shchik I. S. Algebras with flat connections and symmetries of differential equations. — Lie Groups and Lie Algebras: Their Representations, Generalizations and Applications (B. P. Komrakov, I. S. Krasil′shchik, G. L. Litvinov, and A. B. Sossinsky, eds.), Dordrecht: Kluwer, 1998, pp. 425–434.

[43] Krasil′shchik I. S. Cohomology background in the geometry of PDE. — In [33], pp. 121–139, http://ecfor.rssi.ru/~diffiety/.

[44] Krasil′shchik I. S. and Kersten P. H. M. Deformations and recursion operators for evolution equations. — Geometry in Partial Differential Equations (A. Prastaro and Th. M. Rassias, eds.), Singapore: World Scientific, 1994, pp. 114–154.

[45] Krasil′shchik I. S. and Kersten P. H. M. Graded differential equations and their deformations: A computational theory for recursion operators. — Acta Appl. Math. **41** (1994), 167–191.

[46] Krasil′shchik I. S. and Kersten P. H. M. Graded Frölicher–Nijenhuis brackets and the theory of recursion operators for super differential equations. — The Interplay between Differential Geometry and Differential Equations (V. V. Lychagin, ed.), Amer. Math. Soc. Transl. (2), Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995, pp. 143–164.

[47] Krasil′shchik I. S. and Vinogradov A. M. Nonlocal trends in the geometry of differential equations: Symmetries, conservation laws, and Bäcklund transformations. — Acta Appl. Math. **15** (1989), 161–209.

[48] Lychagin V. V. Singularities of multivalued solutions of nonlinear differential equations, and nonlinear phenomena. — Acta Appl. Math. **3** (1985), 135–173.

[49] Marvan M. On the $\mathcal{C}$-spectral sequence with "general" coefficients. — Differential Geometry and Its Applications, Proc. Conf. Brno, 1989, Singapore: World Scientific, 1990, pp. 361–371.

[50] Marvan M. On zero-curvature representations of partial differential equations. — Differential Geometry and Its Applications, Proc. Conf. Opava, 1992, Opava: Open Education and Sciences, 1993, pp. 103–122, http://www.emis.de/proceedings/.

[51] McCleary J. A user's guide to spectral sequences. — Wilmington, Delaware: Publish or Perish, Inc., 1985.

[52] Nijenhuis A. Jacobi-type identities for bilinear differential concomitants for certain tensor fields, I. — Indag. Math. **17** (1955), 390–403.

[53] Tsujishita T. On variation bicomplexes associated to differential equations. — Osaka J. Math. **19** (1982), 311–363.

[54] Tsujishita T. Formal geometry of systems of differential equations. — Sugaku Expositions **3** (1990), 25–73.

[55] Tsujishita T. Homological method of computing invariants of systems of differential equations. — Differential Geom. Appl. **1** (1991), 3–34.

[56] Tulczyjew W. M. The Lagrange complex. — Bull. Soc. Math. France **105** (1977), 419–431.

[57] Tulczyjew W. M. The Euler–Lagrange resolution. — Differential Geometrical Methods in Mathematical Physics (P. L. García, A. Pérez-Rendón, and J.-M. Souriau, eds.), Lecture Notes in Math., no. 836, Berlin: Springer-Verlag, 1980, pp. 22–48.

[58] Tulczyjew W. M. Cohomology of the Lagrange complex. — Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Sci. Fis. Mat. **14** (1987), 217–227.

[59] Verbovetsky A. M. Lagrangian formalism over graded algebras. — J. Geom. Phys. **18** (1996), 195–214, hep-th/9407037.

[60] Verbovetsky A. M. Differential operators over quantum spaces. — Acta Appl. Math. **49** (1997), 339–361, http://ecfor.rssi.ru/~diffiety/.

[61] Verbovetsky A. M. On quantized algebra of Wess–Zumino differential operators at roots of unity. — Acta Appl. Math. **49** (1997), 363–370, q-alg/9505005.

[62] Verbovetsky A. M. Notes on the horizontal cohomology. — In [33], pp. 211–231, math.DG/9803115.

[63] Vinogradov A. M. Local symmetries and conservation laws. — Acta Appl. Math. **2** (1984), 21–78.

[64] Vinogradov A. M. The $\mathcal{C}$-spectral sequence, Lagrangian formalism, and conservation laws. I. The linear theory. II. The nonlinear theory. — J. Math. Anal. Appl. **100** (1984), 1–129.