О развитии теории динамических систем за последнюю четверть века

Д.В.Аносов

Лекции в НМУ в феврале-марте 1998

Предисловие

Настоящий очерк достижений теории динамических систем (ДС) и смежных разделов теории обыкновенных дифференциальных уравнений и других математических дисциплин за последние примерно 25 лет[1] является очень кратким и неполным, особенно по сравнению с изложением аналогичного материала за более ранние периоды в известных изданиях ВИНИТИ «Итоги науки» и «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления» (более поздние из которых частично захватывают и наш период). В связи с этим сошлюсь на недавний обзорный доклад Йоккоза [1], написанный под другим углом зрения и в значительной степени дополнительный к имеющемуся в этой брошюре перечню[2]. Обширный материал, в том числе и нового происхождения, имеется в объёмистой книге [2], недавно переведённой на русский язык.

Признаки, по которым отобран материал первых двух параграфов, явствуют из их названий. Этот отбор был осуществлён на основании чётких формальных критериев; в этом отношении, мне кажется, он свободен от субъективизма. Эти критерии надёжны в том смысле, что соответствующие результаты в любом случае заслуживали бы некоторого обсуждения: безусловно надо было сказать о возникновении или возрождении целых больших частей теории ДС; а если некая проблема упоминается вместе с именем известного учёного, за этим, скорее всего,

[1]По ходу дела затрагиваются и работы более раннего времени, а для некоторых тем вообще более естественным является несколько бóльший промежуток времени, и было бы нецелесообразно искусственно «отсекать» его начало.

[2]Прежде всего, я не писал или писал короче о том, о чём сказано у Йоккоза. Кроме того, понятно, что я лучше знаком с работами русских, а он —западных математиков.

стоит не просто тот факт, что он её поставил, но и признание её важности[3]. (Ведь редко знаменитое имя упоминается по поводу не столь уж значительных задач, которые носитель этого имени наверняка формулировал для своих студентов и аспирантов. Конечно, любая задача имеет своего автора, —в крайнем случае того же, кто её и решил, —но авторами проблемы из § 2 были весьма известные математики, в связи с чем и сами проблемы обычно упоминались и упоминаются вместе с их именами.)

Если говорить о более или менее широких новых (или обновлённых) направлениях, то мне кажется, что они все названы в § 1, но что касается различных довольно значительных достижений, то они не всегда состоят в решении какой-нибудь «именной» проблемы и потому отнюдь не исчерпываются тем, о чём сказано в § 2[4]. В § 3 я вкратце упоминаю некоторые из таких достижений. Такого чёткого критерия для отбора материала, как раньше, здесь не было, поэтому выбор этого материала неизбежно был неполным (я не стал писать даже о том, чем сам много занимался в последние годы —о потоках на поверхностях и смежных геометрических вопросах) и, вероятно, в какой-то степени субъективным. Кроме того, при всём желании я не мог бы написать в § 3 обо всём столь же подробно, как в первых параграфах (если изложение в §§ 1, 2 можно назвать подробным), уложившись в разумные объём и срок. Но я надеюсь, что даже там, где я, по существу, ограничиваюсь простым упоминанием некоторых результатов и имён и даю как бы слегка аннотированный (и очень не полный) список литературы, даже и это может быть полезным как некоторая исходная информация о том, что делается на свете. Если читатель чем-то заинтересуется, даже те неполные литературные ссылки, которые я мог дать, помогут ему, по крайней мере, начать более серьёзно знакомиться с предметом.

Я старался учесть известные мне работы не только о гладких, но и о топологических или чисто-метрических (в смысле меры) системах. Но темы, освещаемые подробнее, оказались посвящёнными преимуще-

[3] Начав с «именной» проблемы, я заодно говорю и о некоторых смежных вопросах. Иногда им отводится даже больше места, так что «именная» проблема используется как повод для освещения целой области.

[4] И не обязаны уступать по важности результатам § 1, потому что события более мелкого «таксономического» уровня могут быть по своему внутреннему содержанию столь же значительными, как и более высокого уровня (достаточно напомнить о создании теории КАМ (Колмогорова-Арнольда-Мозера) и «гиперболической революции» в 60-е гг., которые не выходили за рамки гладких ДС).

ственно гладким системам. Это не связано с тем, что именно они находятся в центре моих интересов, —надеюсь, что по крайней мере с наиболее яркими результатами о других системах я знаком (ведь яркие работы часто упоминаются в беседах с коллегами). Если бы я писал о более ранних работах, баланс был бы другим, но вот в эти годы с топологическими или чисто-метрическими системами не оказались связаны ни новые направления (за одним исключением), ни «именные» проблемы, и кое-что о них сказано только в конце § 3, если не считать раздела о групповых действиях в § 1.

Во время работы над этой брошюрой я неоднократно наводил справки по различным вопросам у знакомых (а иногда и лично не знакомых) математиков. Прежде всего, конечно, это были участники моих семинаров в МИАН и МГУ, а также нижегородские математики[5], но кое-какие сведения я получил и от других коллег, в том числе зарубежных. Благодарю их всех и надеюсь, что, распорядившись полученной информацией по своему разумению и в соответствии со своими планами, я её не переврал. (Если же переврал, то это моя вина.)

О литературных ссылках. Я старался ссылаться на последние публикации или на публикации, которые имеют обзорный характер или содержат более или менее подробное (не обязательно оригинальное) изложение некоего круга вопросов (то, что по-английски называется expository papers). Это позволило сэкономить, но прошу отнестись с пониманием к тому, что я порой экономил на ссылках на первопроходцев.

Для понимания этой брошюры нужна, во-первых, общематематическая подготовка в объёме примерно того, что сообщается студентам-математикам на первых трёх курсах университета (на старших курсах подготовка обычно становится специализированной) и, во-вторых, некоторое знакомство с ДС, преимущественно гладкими[6]. Мне пришлось излагать содержание этой брошюры в лекциях для студентов, специальная часть подготовки которых включала именно гладкие ДС. Поэтому, говоря об эргодической теории, я делал больше пояснений, чем в других случаях. Эта особенность лекций сохранилась и в брошюре.

[5] С. Смейл не случайно «записал» меня в нижегородскую школу, хотя знал, что я москвич.

[6] Помимо учебников, рекомендую вниманию читателя обзорные статьи в уже упоминавшихся изданиях ВИНИТИ (некоторые из них здесь цитированы, но не все), а также статьи в «Математической энциклопедии», где помимо определений и краткой сводки сведений приводятся довольно многочисленные литературные ссылки.

§1. Новые или «обновлённые» направления

1.1. Симплектическая геометрия.

К началу данного периода прочно сложилось подразделение теории ДС (включая сюда и смежные вопросы) на четыре основные части, характеризуемые наличием (и использованием) соответствующей структуры в фазовом пространстве, с которой в определённом смысле согласована рассматриваемая ДС, —дифференциальная динамика (теория гладких ДС)[7], топологическая динамика (теория топологических ДС), эргодическая теория (в которой фазовое пространство предполагается измеримым, чаще даже пространством с мерой) и аналитическая теория (в которой фазовое пространство и «время» (независимая перемен-

[7]По существу, та же самая ветвь теории ДС известна под названием «качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений»; употребление того или иного названия —это скорее вопрос традиции той или иной научной школы. Ниже много раз встречается название «локальная теория». Так обычно называют часть теории гладких ДС, посвящённую поведению траекторий потока вблизи положения равновесия или периодического решения или траекторий итерируемого отображения вблизи неподвижной или периодической точки. В «глобальной» теории речь идёт о поведении траекторий во всём фазовом пространстве или по крайней мере в какой-то «более или менее обширной» его области.

Поскольку зашла речь о различии между локальной и глобальной теориями, то надо сказать, что оно отчасти условно: если координаты вектора фазовой скорости $\mathbf{v}(x)$ (локального) потока в $\mathbb{R}^n$ являются однородными многочленами степени k от координат x, то исследование поведения траекторий возле начала координат (являющегося положением равновесия) в значительной степени эквивалентно глобальному исследованию некоторого потока в $(n-1)$-мерном проективном пространстве $\mathbb{RP}^{n-1}$, куда траектории «проектируются» по радиусам. (Собственно говоря, при проектировании траекторий в $\mathbb{RP}^{n-1}$ там получается не векторное поле, а поле направлений (касательных прямых). Но это хотя и требует известного внимания, в конечном счёте не нарушает сказанного ниже.) Таким путём можно получить (при подходящем k) потоки в $\mathbb{RP}^{n-1}$ достаточно общего вида, чтобы (при $n \geq 4$) для них реализовывались различные известные варианты сложного поведения траекторий, известные в глобальной теории. Можно также обеспечить, чтобы соответствующие траектории в $\mathbb{R}^n$ целиком лежали возле 0 и вели себя столь же сложно. Таким образом, n-мерная локальная теория как бы содержит внутри себя $(n-1)$-мерную глобальную или по крайней мере весьма значительную её часть и не может быть проще неё.

Но практически это принципиальное замечание не имеет большого значения. Дело в том, что при $k > 1$ положение равновесия 0 является вырожденным, причём коразмерность вырождения (характеризующая «его степень») быстро растёт с ростом k. Со столь вырожденными случаями локальная теория практически не имеет дела. Сказанное означает только то, что (по крайней мере в многомерном случае) локальная теория не может претендовать на полное исследование всех возможностей, ибо в глобальной ситуации они необозримы. Но таких претензий никогда и не высказывалось.

ная) предполагаются комплексными). Разумеется, встречались и другое структуры, но их учитывали, так сказать, не выходя за пределы той или иной из этих четырёх частей. Так, гамильтоновы системы имеют свою специфику, связанную с симплектической структурой, но их изучение всегда рассматривалось как часть теории гладких ДС.

За последние 20 лет возникла новая дисциплина —симплектическая геометрия (или симплектическая топология), которая в системе математических дисциплин имеет по меньшей мере тот же уровень, что и названные четыре традиционных подразделения теории ДС, а отчасти даже выходит за пределы последней. Новые дисциплины такого уровня формируются не часто, поэтому такое событие привлекает особое внимание.

Симплектическое многообразие —это гладкое многообразие M вместе с заданной на нём внешней дифференциальной замкнутой 2-формой ω, которая (во всех точках M) является невырожденной. Замкнутость ω, как обычно для внешних дифференциальных 2-форм, означает, что внешний дифференциал $d\omega = 0$. Понятие невырожденности вводится для любых (не только кососимметричных) билинейных форм на векторном пространстве (в данном случае —на касательном пространстве T_xM). Такая форма называется невырожденной, если невырождена её матрица коэффициентов. Здесь подразумевается использование координат; в линейной алгебре приводятся эквивалентные бескоординатные формулировки. Замечу сразу же, что кососимметрическая форма может быть невырожденной только в чётномерном случае (размерность $\dim T_xM = 2n$). Наконец, подразумевается, что в терминах локальных координат коэффициенты ω являются гладкими функциями своих аргументов (насколько гладкими —это может зависеть от рассматриваемой задачи, но часто и даже, вероятно, в большинстве случаев можно считать их гладкими класса C^∞).

Таким образом, симплектическое многообразие —это не просто многообразие M, а пара (M, ω). Часто всё-таки в обозначении опускают явное упоминание об ω и говорят о симплектическом многообразии M.

Приведённое определение аналогично определению риманова многообразия. В последнем вместо кососимметрической формы ω имеется симметричная билинейная дифференциальная форма g, обычно не только невырожденная, но и положительно определённая[8] (и то, и другое

[8]Это значит, что положительно определена соответствующая квадратичная форма. Если же положительной определённости нет, то часто говорят о псевдоримановом многообразии и о псевдоевклидовом скалярном произведении в касательных пространствах.

возможно и при нечётной размерности), на которую не накладывается никаких дифференциальных условий (тогда как от ω требуется замкнутость).

Однако аналогия между римановой и симплектической геометрией кончается на уровне исходных определений. В римановом случае различные многообразия могут быть локально устроены по-разному: имеется обширная система локальных инвариантов —тензор кривизны и его ковариантные производные. В симплектическом же случае, согласно теореме Г. Дарбу[9], возле любой точки $x \in M$ имеются так называемые симплектические или канонические координаты (координаты Дарбу) $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$, в терминах которых ω локально выражается в виде

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i. \tag{1}$$

Поэтому любые два симплектические многообразия (M_1, ω_1) и (M_1, ω_1) одинаковой размерности локально устроены одинаково: для любых двух точек $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$ имеются такие их окрестности U_1, U_2 и такой диффеоморфизм $f \colon U_1 \to U_2$, который переводит эти формы друг в друга (именно, $f^*\omega_2 = \omega_1$)[10]. Кстати, такой диффеоморфизм называют симплектоморфизмом. В данном случае он, в понятном смысле, локальный, но бывают и глобальные симплектоморфизмы —диффеоморфизмы $f \colon M_1 \to M_2$, для которых $f^*\omega_2 = \omega_1$.

Хотя никаких локальных инвариантов у самих симплектических многообразий нет (кроме размерности), подмногообразия симплектического многообразия могут быть различными и при совпадении размерностей. Так, большую роль играют лагранжевы подмногообразия — подмногообразия N половинной размерности, ограничение на которые $\omega|N$ формы ω тождественно равны нулю[11]; в то же время имеются под-

[9] Она была доказана также и Г. Фробениусом, но в общепринятом названии теоремы о нём почему-то не упоминают.

[10] В этом отношении ситуация аналогична с ситуацией для плоских римановых многообразий. Таким образом, имеется некоторая аналогия между условием замкнутости формы ω и условием обращения в нуль тензора кривизны. Однако она не кажется глубокой. Начать хотя бы с того, что замкнутость —это дифференциальное условие первого порядка, а нулевая кривизна —второго. Если это различие может показаться формальным, то вот и вполне содержательное различие: группа изометрий связного риманова многообразия конечномерна, а группа симплектоморфизмов симплектического многообразия бесконечномерна.

[11] Лагранжевы подмногообразия, как и ряд родственных объектов, неявно присутствовали в математическом аппарате классической аналитической механики, но в явном виде они были выделены В. П. Масловым и В. И. Арнольдом.

многообразия той же размерности с ненулевым ограничением $\omega|N$. Всё же и здесь инвариантов намного меньше, чем в римановой или евклидовой геометрии. Например, если N_1 и N_2 —подмногообразия симплектического многообразия (M,ω), $U_i \subset N_i$ —окрестности точек $a_i \in N_i$ и если существует диффеоморфизм $f\colon U_1 \to U_2$, для которого $f(a_1) = a_2$ и $f^*(\omega|U_2) = \omega|U_1$, то существует симплектоморфизм $g\colon V_1 \to V_2$ некоторых окрестностей V_i точек a_i во всём M, локально продолжающий f в том смысле, что он совпадает с f на $V_1 \cap U_1$. В данном случае внутренняя геометрия подмногообразия локально полностью определяет его внешнюю геометрию (сравните это с кривыми в $\mathbb{R}^n$!)

Думаю, что эта скудность локальных инвариантов задержала возникновение симплектической геометрии, —заранее непонятно, чего, собственно, здесь изучать?

Симплектические многообразия встречаются в математике главным образом в связи с гамильтоновыми системами классической механики и в связи с кэлеровыми многообразиями. Обычная гамильтонова система —это система дифференциальных уравнений для $2n$ неизвестных $p_1, \ldots, p_n$ («импульсы») и $q_1, \ldots, q_n$ («координаты») вида

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \tag{2}$$

где H —некоторая функция от неизвестных и, возможно, времени («гамильтониан»). Векторное поле фазовой скорости V этой системы следующим образом связано с дифференциалом dH и симплектической формой (1): для любого вектора U

$$\omega(V,U) = -dH(U) = -U \cdot H,$$

где в $U \cdot H$ вектор U известным образом действует на H как линейный дифференциальный оператор первого порядка (если этот оператор хотят отличать от вектора, то оператор обозначают через D_U или $\mathcal{L}_U$). Иными словами, с помощью ω мы переходим от вектора V к ковектору (линейному функционалу, линейной форме на векторах) $U \mapsto \omega(V,U)$; этот ковектор, с точностью до знака, совпадает с dH. В общем случае с функцией H на симплектическом многообразии (M,ω) можно по точно такому же правилу связать векторное поле V на M; оно называется глобально гамильтоновым векторным полем (с гамильтонианом H). В координатах Дарбу координаты (компоненты) этого поля суть в точности правые части системы (2). В классической механике исходная форма ω часто имеет вид (1), но даже и тогда при последующих преобразованиях (особенно когда с помощью симметрий понижают размерность) может произойти переход к другим ω. (Локальный) поток с гамильтоновым векторным полем фазовой скорости тоже называют гамильтоновым. Такой поток $\{\phi_t\}$ сохраняет форму ω, т.е. отображения ϕ_t являются симплектоморфизмами ($\phi_t^*\omega = \omega$). Обратно, если поток $\{\phi_t\}$ с полем фазовой скорости сохраняет ω, то локально поток и поле являются гамильтоновыми —любая точка многообразия M лежит в некоторой области W, в которой поле V получается описанным выше способом из некоторой функции (локального гамильтониана) H_W, определённой в W. Но, вообще говоря, от системы локальных гамильтонианов $\{H_W\}$, которые определены в областях W, в совокупности покрывающих M, нельзя перейти к единому «глобальному» гамильтониану (который был бы определён на всём M и всюду определял бы по описанному способу поле V).

Теперь о другом источнике симплектических многообразий. Здесь предполагается известным понятие комплексно-аналитического многообразия. Для такого многообразия M естественно вместо обычной римановой метрики рассматривать так называемую эрмитову метрику. Именно, поскольку касательное пространство к комплексному многообразию M само естественным образом является комплексным векторным пространством, то вместо евклидова скалярного произведения в нём естественно рассматривать эрмитово скалярное произведение (полуторалинейную форму по терминологии Бурбаки). Если такая форма задана во всех касательных пространствах и, будучи выражена в локальных координатах, имеет достаточно гладкие коэффициенты, то будем говорить об эрмитовой структуре на M или об эрмитовом многообразии. Вещественная часть g эрмитовой формы —это евклидово скалярное произведение; таким образом, эрмитово многообразие автоматически является также и римановым. (Здесь может всюду стоять приставка «псевдо»). А мнимая часть эрмитовой формы —это невырожденная кососимметрическая 2-форма ω. Если она замкнута, то эрмитово многообразие называется кэлеровым. Такое определение, с одной стороны, является коротким; с другой стороны, именно оно главным образом и используется при работе с кэлеровыми многообразиями. Но поначалу оно кажется каким-то формальным, непонятно чем мотивированным. Поэтому я приведу и другое определение, геометрически достаточно естественное. Риманова метрика g известным образом определяет связность Леви-Чивита на M. Последняя позволяет осуществлять параллельное перенесение векторов касательного пространства вдоль любой гладкой кривой $\gamma(t)$ на M. Получаются линейные отображения $T_{\gamma(t_1)}M \to T_{\gamma(t_2)}M$. Они сохраняют евклидово скалярное произведение, но поскольку мы имеем дело с комплексной ситуацией, то хотелось бы, чтобы они сохраняли и всё эрмитово скалярное произведение, а также были линейными не только над $\mathbb{R}$, но и над $\mathbb{C}$ (т. е., в понятном смысле, сохраняли бы умножение векторов на комплексные числа). Оказывается, это пожелание в точности эквивалентно кэлеровости.

Кэлеровых многообразий довольно много. На комплексном проективном пространстве имеется естественная кэлерова метрика (метрика Фубини-Штуди); она индуцирует кэлерову метрику и на алгебраических подмногообразиях этого пространства. (С другой стороны, существуют и такие кэлеровы многообразия, которые не являются алгебраическими многообразиями.)

Тот факт, что «симплектические» соображения и результаты составляют некий относительно самостоятельный и единый комплекс понятий и методов, неоднократно подчёркивал, начиная с середины 60-х гг., В. И. Арнольд, которому много пришлось иметь дело с этим комплексом, причём (в отличие от других исследователей) по различным поводам (гамильтоновы ДС, лагранжевы перестройки, асимптотические методы в теории уравнений с частными производными)[12]. Своего рода «предвестником» новой дисциплины, впоследствии органически вошедшим в её состав, была возникшая в предыдущем 20-летии теория лагранжевых и лежандровых перестроек и особенностей, к которой примыкает также ряд других вопросов. В этой области особенно много сделали В. И. Арнольд и его школа, а также А. Вайнстейн. Её изложение имеется в [3]. В принципиальном отношении на этом этапе, по сравнению с современным, недоставало открытия глобальных инвариантов самих симплектических многообразий (а не инвариантов каких-то связанных с ними объектов).

Стимулирующую роль в возникновении симплектической геометрии сыграла работа Ч. Конли и Э. Цендера, посвящённая доказательству для n-мерного тора $\mathbb{T}^n$ следующей гипотезы В. И. Арнольда: у симплектического диффеоморфизма g_1 компактного симплектического многообразия M, гомотопного тождественному диффеоморфизму g_0 в классе симплектических диффеоморфизмов посредством деформации $\{g_t\}$ скорость которой $\dfrac{dg_t}{dt}$ при всех t имеет однозначный гамильтониан[13],

[12] В конечном счёте, естественно, и у него появление симплектических многообразий происходило в духе указанных выше двух источников, но непосредственные причины обращения к ним были разнообразными.

[13] Это одна из формулировок условия на g_1, накладываемого в этой гипотезе. Чаще приводят другую формулировку, связанную с так называемыми асимптотическими

существует по меньшей мере столько неподвижных точек, сколько существует критических точек у гладкой функции на M (при $M = \mathbb{T}^n$ их $2n+1$, а если они невырожденные — 2^{2n}). В доказательстве сочетались две ранее возникшие идеи (уже использовавшиеся к тому времени в других задачах): идея П. Рабиновица о новом вариационном подходе к периодическим решениям гамильтоновых систем, и идея Ч. Конли о топологической характеризации поведения потока возле некоторых (так называемых изолированных или локально-максимальных) инвариантных множеств посредством некоторого обобщения классического индекса Морса положений равновесия градиентного потока (сам Морс говорил о критических точках функции, что эквивалентно).

Теперь гипотеза Арнольда доказана и в ряде других случаев, а несколькими авторами анонсировано её доказательство в общем виде.

Последний шаг, после которого симплектическая топология уже несомненно приобрела характер автономной дисциплины, сделал М. Громов [4]. Прежде чем говорить о его подходе, укажу некоторые из его результатов. Громов ввёл несколько симплектических инвариантов (т. е. инвариантов относительно симплектоморфизмов). Единственным инвариантом, известным ранее, был объём. Полезность новых инвариантов видна из следующего утверждения Громова[14], которое кажется удивительным и имеет наглядную формулировку, а также выразительное название «теорема о непрохождении симплектического верблюда через игольное ушко»: при $n > 1$ в $\mathbb{R}^{2n}$ с координатами p_i, q_i $(i = 1, \ldots, n)$ не существует непрерывного семейства симплектоморфизмов $\{\psi_t;\ 0 \le t \le 1\}$, сохраняющих (1), которое переводило бы шар B радиуса R из полупространства $p_1 < 0$ в полупространство $p_1 > 0$ таким образом, чтобы в процессе деформации пересечение

$$\psi_t B \cap \{(p, q);\ p_1 = 0\}$$

всё время находилось бы строго внутри некоторого $(2n-1)$-мерного шара радиуса $r \le R$. (Осьминог, подчинённый только условию сохранения объёма, конечно, может проползти через маленькое отверстие, что подтверждается опытом содержания этих животных в неволе.) Отмечу также, не вдаваясь в детали, что с помощью своего подхода Громов получил неожиданную информацию о глобальных свойствах лагранже-

---

циклами — гомологическим аналогом числа вращения Пуанкаре, относящегося к гомеоморфизмам окружности.

[14] Первый набросок доказательства был дан Громовым совместно с Я. М. Элиашбергом.

вых подмногообразий, даже подмногообразий обычного евклидова пространства (с координатами p_i, q_i и формой (1)), когда a priori не видно, с какой стати они должны иметь какие-то особенные свойства.

Как уже говорилось, на кэлеровом многообразии M имеется симплектическая структура, «хорошо» связанная с соответствующими комплексной и римановой структурами. По терминологии Громова, соответствующая псевдокомплексная структура[15] на M «доминируется» («is tamed by») симплектической (Громов точно описывает, какие именно соотношения он подразумевает под доминированием). Таких псевдокомплексных структур много, и всем известно, насколько настоящая комплексная кэлерова структура лучше всех прочих. Оказывается, что на симплектическом многообразии существует много псевдокомплексных структур, доминируемых симплектической; не пытаясь выделить из них какую-то одну «хорошую», Громов предложил рассматривать все их сразу (при этом естественно возникают и римановы метрики). Совокупность «плохих» структур оказалась в какой-то степени подходящим заменителем для одной «хорошей»! Для каждой из них можно говорить о псевдоголоморфных отображениях круга в наше многообразие (ради краткости говорят о псевдоголоморфных кругах) —они определяются путём непосредственного обобщения обычной голоморфности. Условие псевдоголоморфности записывается в виде некоторой квазилинейной системы уравнений в частных производных, обобщающей классическую систему Коши-Римана. Громов исследовал эту систему и доказал, грубо говоря, что, как и в классическом случае, она имеет много решений. Его симплектические инварианты определяются с помощью псевдоголоморфных кругов, отвечающих всевозможным псевдокомплексным структурам, доминируемым исходной симплектической.

Как видно, подход Громова связан не с ДС, а с уравнениями с частными производными. Но часть его результатов (а также идей и методов) оказывается полезной для теории ДС. Другими авторами дана более близкая к теории ДС трактовка этой части или, вернее, чего-то аналогичного. На этом пути получены лучшие результаты о периодических решениях гамильтоновых систем (К. Витербо, Х. Хофер и Э. Цендер. Родственным примером может служить теорема Хофера, упомянутая в конце п. 2.5). Эта сторона дела хорошо отражена в [5]. Сборник [6] посвящён более широкому кругу вопросов симплектической топологии,

[15] Т. е. структура комплексного пространства во всех касательных пространствах T_xM, в понятном смысле гладко зависящая от x; в данном случае она получается из исходной комплексной структуры на M, но в общем случае может получаться и как-нибудь иначе.

в том числе там освещены и некоторые связи с ДС, не затронутые в [5]. (Это особенно касается инвариантных лагранжевых многообразий, в основном торов, для которых до проникновения в теорию ДС новых симплектических идей ряд вопросов качественного характера даже не ставился (не считая, конечно, частного случая инвариантных кривых двумерных диффеоморфизмов, о которых говорил ещё Дж. Биркгоф). Насколько известно, обзоров на последнюю тему нет. В дополнение к сказанному можно сослаться на [7], [8].) Учебником по собственно симплектической топологии является [9]. В последнее время доклады по симплектической геометрии (как в связи с ДС, так и независимо от них) делались на международных и европейских математических конгрессах, так что в соответствующих трудах можно найти много информации о состоянии дел в этой дисциплине.

Отметим ещё два примыкающих цикла работ (хотя они —особенно второй —именно только в той или иной степени примыкают к нашей теме).

Продолжая и развивая начатые ранее исследования, В. И. Арнольд и его сотрудники занялись группой вопросов, получивших название «нелинейной теории Морса» [10]. В ней речь идёт о свойствах колеблемости и пересечений некоторых кривых или более общих многообразий, которые можно рассматривать как обобщения известных теорем Штурма и Морса; последние при этом выступают как относящиеся к тем частным случаям, когда эти кривые являются графиками некоторых функций или даже решений линейных дифференциальных уравнений.

Второй цикл —это два доказательства теоремы, что на двумерной сфере с любой римановой метрикой существует бесконечное число замкнутых геодезических (прежний результат, в основном восходящий к работам Л. А. Люстерника и Л. Г. Шнирельмана конца 20-х гг., но «дотянутый до конца» позднее [11], [12] —три замкнутых геодезических; правда, эти три геодезических отличаются отсутствием самопересечений). Одно доказательство начинается с принадлежащей В. Бангерту редукции задачи к двум случаям, для которых доказательства были даны самим Бангертом и Дж. Френксом [13], [14]. Здесь можно отметить замечательное сочетание новизны и преемственности (а также своего рода «элементаризации»). На случай, который рассмотрел Френкс, обратил внимание ещё Дж. Биркгоф. Это тот случай, когда имеется такая «простая» (не имеющая самопересечений) замкнутая геодезическая L, что любая пересекающая L геодезическая спустя некоторое время снова пересекает L. (Он охватывает, в частности, вполне классический случай метрик положительной кривизны). Биркгоф отметил, что в этом случае вопрос сводится к исследованию некоторого отображения кольцеобразной области в себя. Френкс доказал, что данное отображение имеет бесконечное число неподвижных точек, а это и означает существование бесконечного числа замкнутых геодезических. (Как известно, самому Биркгофу принадлежит некоторый результат об отображениях кольца —доказательство гипотезы, высказанной А. Пуанкаре и известной под названием «последней теоремы Пуанкаре», хотя Пуанкаре опубликовал её именно как гипотезу. Кстати, эта теорема стимулировала формулировку упомянутой выше гипотезы Арнольда, а Френкс начал свою работу в данной области с другого доказательства теоремы Биркгофа и родственных результатов.) Френкс использовал некоторые результаты М. Хендела (которые связаны с упоминавшейся выше гипотезой Арнольда; поскольку Хендел не опубликовал доказательств, Френкс привёл таковые при достаточных для его целей дополнительных предположениях. Затем Френкс ещё раз вернулся к этому кругу вопросов уже для того, чтобы наряду с теоремой Хендела дать независимое от общей симплектической теории доказательство гипотезы Арнольда для диффеоморфизмов поверхностей[16]) [15]. (Позднее Ш. Мацумото, продолжая эту линию исследования, предложил полное доказательство в общем случае гомеоморфизмов как гипотезы Арнольда для поверхностей[17], так и анонсированной Хенделом теоремы [16].) Вскоре после появления статей Френкса и Бангерта Н. Хингстон предложила второе доказательство теоремы о бесконечном числе замкнутых геодезических, основанное на вариационных соображениях [17]. Оно ближе по духу к традициям дифференциальной геометрии (и тем самым ещё дальше от темы настоящего раздела).

Надо сказать, что в России к симплектической геометрии относят также цикл исследований А. Т. Фоменко и его учеников о топологии интегрируемых гамильтоновых систем (см. их последнюю книгу [18]). Конечно, это геометрия и притом связанная с соответствующей симплектической структурой (без которой нельзя было бы говорить о гамильтоновых системах), но по своему содержанию этот цикл исследований довольно далёк от темы данного раздела; я бы отнёс его скорее к теории интегрируемых систем (о других аспектах этой теории см. п. 3.5).

[16] Здесь идёт речь об этой гипотезе для гомеоморфизмов ориентируемых поверхностей рода > 1, сохраняющих площадь. «Общими симплектическими» методами она к тому времени уже была доказана А. Флёром.

[17] В двумерном случае симплектичность отображения сводится к сохранению площади, а о нём можно говорить применительно не только к диффеоморфизмам, но и к гомеоморфизмам.

В книге Ш. Кобаяши «Группы преобразований в дифференциальной геометрии» (имеется русский перевод) почти в самом начале говорится: «Не все геометрические структуры сотворены равными: некоторые являются творениями природы, в то время как другие —продукты человеческого разума. Среди первых риманова и комплексная структуры выделяются своей красотой и богатством.» Эта книга вышла в 1972 г. Похоже, что тогда симплектические многообразия были скорее продуктами человеческого разума, но теперь усилиями последнего они постепенно становятся творениями природы, «освежающе непохожими»[18] на другие её творения.

1.2. Конформная динамика.

Другое направление, интенсивно развивавшееся в эти годы, но не выходящее за пределы теории динамических систем, а составляющее часть дифференциальной динамики —это конформная динамика, т. е. исследование итераций аналитических функций в области комплексного переменного. Фазовым пространством здесь служит некоторая область D на плоскости комплексного переменного (причём очень интересными оказываются уже те случаи, когда D есть вся плоскость $\mathbb{C}$ или плоскость, расширенная до сферы Римана) и речь идёт об определённой в D динамической системе с дискретным временем $\{f^n\}$, где f —аналитическая функция (хотя бы многочлен, даже многочлен второй степени!)

Это направление не является новым —оно восходит к классическим работам П. Фату и Г. Жюлиа начала века (если не говорить о ещё более ранних работах по локальным вопросам[19]). Уже тогда было обнаружено «сложное» поведение траекторий, напоминающее таковое в гиперболической теории. Последней тогда ещё не существовало, но уже было обнаружено (впервые —Ж. Адамаром) «сложное» поведение геодезических на поверхностях отрицательной кривизны; однако в то время эти два случая «сложного» поведения не сопоставлялись. С течением времени систематическая работа в конформной динамике прекратилась и это направление впало в длительную «спячку» (хотя отдельные работы

[18] Выражение В. И. Арнольда по более скромному поводу —в связи со сравнением линейной алгебры в симплектическом пространстве $(\mathbb{R}^n, \omega)$ с постоянной (имеющей постоянные коэффициенты) ω и обычной евклидовой геометрии.

[19] Основной локальный вопрос: пусть $f(a) = a$; при каких условиях возле a конформное отображение f сопряжено со своим линейным приближением, т. е. с линейным отображением $x \mapsto a + f'(a)(x - a)$, и если сопряжения нет, то что этому мешает? Если $|f'(a)| \neq 1$, сравнительно просто доказывается существование сопряжения, в противном случае ситуация гораздо сложнее [1].

время от времени появлялись; особенно надо отметить блестящий локальный результат К. Зигеля 1942 г.[20]), от которой около 1970 г. его пробудило, по-видимому, осознание связей или аналогий с уже возникшей к тому времени гиперболической теорией. Большое значение имели также численные эксперименты, обнаружившие ряд новых явлений и позволившие сформулировать ряд гипотез, работа над доказательствами которых значила очень много для всей этой области. Инициатива в таких экспериментах принадлежит Б. Мандельброту, позднее же, с появлением достаточно мощных персональных компьютеров, они стали широко доступными (хотя порой это требует осторожности).

В конформной динамике (как, впрочем, и при исследовании вещественных одномерных отображений, которыми тоже много занимались в рассматриваемое время) мы встречаемся с почти уникальной возможностью достаточно полного исследования сложного поведения ДС — поведения как в смысле качественной картины в фазовом пространстве, так и в смысле зависимости от параметров. Удаётся исследовать ДС, у которых в разных частях фазового пространства реализуются противоположные типы поведения траекторий —в одной части оно может быть гиперболическим (причём в конформной динамике нередко имеют дело с ослабленными вариантами гиперболичности, которые в данном случае успешно исследуются), в другой —квазипериодическим или напоминающим таковое.

Некоторое понятие о данном направлении может дать книга [19]. Если в обычных математических книгах рисунки иллюстрируют текст, то в [19] дело обстоит, пожалуй, наоборот —книга в значительной степени представляет собой альбом с полученными на компьютере красивыми картинками, которые поясняются в тексте. При этом обычно даются точные формулировки теорем, но не всегда приводятся доказательства. Даются также многочисленные литературные ссылки, приводятся подробная информация об истории, —в этом отношении [19] вполне удовлетворяет традиционным высоким требованиям к изложению учебно-обзорного характера. (В ней также имеются замечания о возникающих в некоторых случаях вычислительных трудностях). Здесь можно указать также имеющиеся на русском языке обзоры [20], [21] и готовящуюся к переводу книгу [22]; наконец, новейшая информация имеется в докладах на последних Международных математических конгрессах, на которых конформной динамике неизменно уделялось заметное внимание.

[20] Первый положительный результат для $|f'(a)| = 1$.

Несколько рисунков из [19] могут дать куда лучшее представление о множествах, возникающих в конформной динамике, чем несколько лекций без рисунков. Я же в порядке примера отмечу только следующее. В некотором смысле, вся «сложность» динамики $\{f^n\}$ «сосредоточена» на так называемом множестве Жюлиа $J = J_f$, которое может выглядеть довольно сложно и удивительно красиво. Но если не говорить о красоте, а только о сложности, то сложно устроенные объекты, играющие сходную роль, известны и в других разделах теории ДС. Пусть теперь $f = f_c$ зависит от параметра c (вполне содержательный и по сей день исследованный не вполне до конца пример: $f_c(z) = z^2 + c$). Тогда возникает вопрос об бифуркациях, т. е. об изменениях качественной картины при изменении c. В основном соответствующие значения c —это точки так называемого множества Мандельброта M. Вот здесь другие разделы теории ДС далеко уступают конформной динамике —ничего подобного подробным рисункам M из [19] в них нет.

Чем-то M удивительно похоже на множества Жюлиа, хотя это сходство —какое-то неуловимое, да оно и не может иметь простого описания —ведь для указанного выше семейства $\{f_c\}$ множеств Жюлиа бесконечно много, а M одно. Глобально M и J совсем различны, а сходство проявляется в их локальном строении. В помещённой в [19] статье Лей Тан (имя, фамилия) —ученицы одного из видных деятелей в данной области А. Дуади —объясняется, что возле некоторых точек $c \in M$ локальное строение M и локальное строение J_{f_c} в окрестности некоторых точек $z \in J$ асимптотически одинаковые: если рассматривать эти множества в микроскоп, то чем больше увеличение, тем больше их сходство в поле зрения микроскопа. Это пример теоремы, на формулировку которой навели компьютерные эксперименты. Работа Лей Тан была выполнена почти 15 лет назад; в данной области это большой срок, и по нынешним меркам её теорема может считаться простой. А вот пример весьма не простой «компьютерно-стимулированной» гипотезы: для указанного (внешне крайне простого!) семейства $\{f_c\}$ множество Мандельброта локально связно («гипотеза MLC»). Она привлекла самое серьёзное внимание специалистов (её формулировка сама по себе интересна, но кроме того оказывается, что будь эта гипотеза доказана, то получались бы интересные следствия, на чём я уже не буду останавливаться), и всё же существование сколь угодно малых связных окрестностей доказано не для всех точек M [21]. В имеющемся же доказательстве для части

[21] На конференции по теории динамических систем в Триесте осенью 1998 г. Р. Перец-Марко анонсировал доказательство гипотезы MLC в общем случае.

точек M снова обыгрывается некое локальное сходство между M и J (первым значительного продвижения здесь достиг Ж.-К. Йоккоз, а последние известные мне результаты принадлежат М. Любичу [23]).

Сам Б. Мандельброт был весьма обрадован, получив в своё время первые (по нынешним меркам, плохие) изображения множеств Жюлиа и введённого им и носящего ныне его имя множества M, так как они доставили новые и важные примеры того, что он называет фрактальными множествами или, короче, фракталами, укрепив его уверенность в их важности и доставив ценный пропагандистский материал. Слово «фрактал» происходит от «fraction» и связано с тем, что соответствующие множества обычно имеют дробную хаусдорфову размерность. Но если хаусдорфова размерность —точное математическое понятие, то фрактал таковым не является. По словам Мандельброта, „все фигуры, которые я исследовал и назвал фракталами, в моём представлении обладали свойством быть «нерегулярными, но самоподобными». Слово «подобный» не всегда имеет классический смысл «линейно увеличенный или уменьшенный», но всегда находится в согласии с удобным и широким толкованием слова «похожий».“ («Самоподобие» понимается примерно в том же смысле, как выше понималось «одинаковое локальное строение».) Это, конечно, не определение, а неформальное описание. Мандельброт поясняет, что множество дробной хаусдорфовой размерности, конечно, «нерегулярно», но оно не обязано быть самоподобным, а множество целой хаусдорфовой размерности вполне может быть «нерегулярным» (скажем, «изрезанным») и при этом обладать или не обладать свойством локального «самоподобия», поэтому «фрактальность» не надо понимать буквально. Так что последняя является каким-то не вполне точно определённым свойством, более или менее подробно описанным с привлечением многочисленных примеров как из математики, так и из естествознания. Фрактальны скалистое побережье, горная цепь, колеблющееся пламя, облако, колония плесени... Мандельброт даже указывает количественные характеристики самоподобия в различных естественнонаучных примерах. Конечно, в этих примерах, в отличие от математических, самоподобие имеет место только в некотором ограниченном диапазоне масштабов. По словам Мандельброта, в неодушевлённой природе концы этого диапазона могут различаться примерно в 10^4 раза, а в биологических примерах —в 10^2 раз.

Эти идеи и наблюдения Мандельброта приобрели известную популярность, и с его лёгкой руки различные другие авторы тоже стали обнаруживать фракталы в природе. Видимо, наряду с объектами, форма которых с высокой степенью точности изображается привычными «евклидовыми» фигурами, в природе действительно встречаются объекты «фрактальной» формы. Конечно, это только феноменология; встаёт вопрос, почему тот или иной объект имеет фрактальную форму и притом с такими-то количественными характеристиками. Насколько мне известно, в «математическом естествознании» (понимаемом в самом широком смысле) с ответом на этот вопрос дела пока обстоят неважно. Но можно напомнить, что и с пониманием природы привычных «евклидовых» форм прогресс был довольно медленным и ещё не завершился[22], так что не удивительно, что применительно к новым формам соответствующие вопросы остаются пока открытыми. В то же время фракталы стали «модными», со всеми вытекающими отсюда последствиями[23] (ср. с «теорией катастроф» п. 1.4).

Вернёмся к математике. Подчёркивая «самоподобие» фракталов, Мандельброт обратил внимание математиков на существенное свойство ряда «сложно устроенных, нерегулярных» множеств, которые встречаются в математике. Конечно, «самоподобие» может быть «артефактом», т. е. быть созданным руками человека. Такова ситуация в классических примерах вроде нигде не дифференцируемых функций К. Вейерштрасса и Б. Ван дер Вардена, кривых Дж. Пеано, Х. Коха и Д. Гильберта, ковра В. Серпинского. Во всех этих примерах некий объект строился с помо-

---

[22]Так, правильная форма кристаллов известна с древности; уже в прошлом веке были известны их количественные характеристики и тот факт, что данное вещество кристаллизуется всегда в одну и ту же кристаллическую форму или в одну из нескольких кристаллических форм со свойственными данному веществу характеристиками; давно возникло предположение, что дело здесь в расположении атомов или молекул в узлах некоторой кристаллической решётки; количественная реализация последнего предположения была дана Е. С. Фёдоровым и Шёнфлисом немногим более 100 лет назад. Однако только около 90 лет назад это предположение было доказано с помощью дифракции рентгеновских лучей на кристаллах, а что касается самого факта, что большинство веществ при низких температурах переходят в кристаллическую фазу, то лишь сравнительно недавно в статистической термодинамике стали получаться результаты, идущие в этом направлении (между прочим, они отчасти имеют отношение к некоторой части теории ДС; см. упоминание о фазовых переходах в п. 1.3). Наконец, экспериментальные исследования механизма роста кристаллов, в частности открытие дислокационного механизма роста —это почти исключительно послевоенный период (важная идея дислокации появилась раньше, но по другому поводу). О том же, чтобы получить механизм роста «из первых принципов», пока, кажется, вообще не было речи.

[23]Пожалуй, на этом поприще вершины своей карьеры фракталы достигли в следующей фразе: «Можно сказать, что Иисус Христос находится в центре многомерного фрактала, распространяющегося по некоторым правилам порождения, которые могут быть описаны в бинарных терминах» (М. Элиадис, И. Кулиано, «Словарь религий, образов и верований», М.: Рудомино и СПб: Университетская книга, 1997).

щью бесконечного числа шагов и, конечно, авторы стремились сделать эти шаги похожими друг на друга, чтобы построение было легче описать. Но в других случаях вроде J и M «самоподобие» не содержится непосредственно в исходном определении или построении и является немаловажным.

В начале века при возникновении конформной динамики использовались методы «чистой» теории функций комплексного переменного. При исследовании локальных вопросов использовались разложения в ряды и мажоранты, глобальных —большую роль играли соображения компактности различных множеств аналитических функций (то, что примерно тогда же было оформлено П. Монтелем в теорию «нормальных семейств аналитических функций», которая имеет и другие применения). Начиная с К. Зигеля, применяются различные приёмы борьбы с малыми знаменателями —более искусно построенные мажоранты у самого Зигеля, позднее метод КАМ (А. Н. Колмогорова-В. И. Арнольда-Ю. Мозера). В нём вместо разложений в ряды используется сходящийся быстрее более сложный процесс с бесконечным числом замен переменных; другой аспект этого метода состоит в некоторой аналогии с методом Ньютона решения нелинейного уравнения (по словам самого Колмогорова, он отчасти руководствовался этой аналогией). Эти два приёма имеют «общематематическое» значение; позднее для той же цели были разработаны более специальные приёмы (связанные с так называемой «перенормировкой» и с «геометрией» соответствующей теоретико-числовой задачи о «малости» знаменателя). Будучи специализированными, они позволили получить лучшие результаты, но (пока что?) только для одномерных задач (вещественных или комплексных). Расширение круга методов в 70-х гг. отчасти связано с развитием теории функций комплексного переменного (например, пригодились пространства Тайхмюллера, о которых уже много было известно). Очень удачным оказалось привлечение квазиконформных отображений. Соответствующий приём вначале смахивает на глупую авантюру. Желая построить конформное отображение с некоторыми свойствами, начинают с некоторого отображения f, которое всем было бы хорошо, если бы оно было конформным, но которое, увы, не является таковым; впрочем, оно конформно по отношению к некоторой нестандартной комплексной структуре, вполне заслуживающей ругательные названия, из которых самыми мягкими являются «нелепая» и «никому не нужная». Вот если бы удалось подправить f, сделав его конформным в обычном смысле... И тут на сцене появляется deus ex machina —«измеримая теорема Римана»[24], утверждающая, что f квазиконформно сопряжено с некоторым настоящим конформным отображением. Отмечу, наконец, уже упоминавшуюся перенормировку —приём, не связанный специфически с одномерной комплексной ситуацией[25]. В какой-то степени перенормировка связана с общей идеей локального самоподобия, но применяемой не столько к множествам, сколько к отображениям. Впрочем, я не уверен, что на тех, кто разрабатывал этот приём, повлияла общая идея Мандельброта. Вроде бы должна была повлиять, ибо этот приём использовался как раз для исследования упоминавшихся выше вопросов о J и M, но дело в том, что ещё раньше этот приём появился сперва в некоторых математических вопросах статфизики, а затем в работах по одномерной динамике в вещественной области.

Кстати, я ничего не говорил о последней. Она тоже получила значительное развитие, начиная с 70-х гг. Но, мне кажется, конформная динамика сейчас является во всех отношениях более крупным направлением и производит бо́льшее впечатление, поэтому, отнюдь не желая умалить достоинства одномерной вещественной динамики, я всё же ограничусь простым упоминанием о ней и ссылкой на книгу [25], которая переводится на русский язык (см., впрочем, конец п. 2.1). Сравнивая обе теории, нельзя не сказать, что обе они существенно используют специфические свойства изучаемых объектов, но в конформной динамике эта специфика составляет предмет богатой и глубокой теории функций комплексного переменного, а в вещественной специфика —это всего лишь свойства прямой. В последнем случае приходится удивляться, что на такой скромной базе всё-таки возникла и продолжает

[24]Так её называют в конформной динамике, вообще же она называется «теоремой о существовании квазиконформного гомеоморфизма» (какого именно, в названии не уточняется, и я тоже не буду этого делать). Теорема постепенно доказывалась во всё бо́льшей общности; для конформной динамики нужен именно последний вариант, принадлежащий Л. Альфорсу, Л. Берсу, И. Н. Векуа и Ч. Морри. А идея использовать её в конформной динамике принадлежит Д. Сулливану. Повидимому, он же указал и на возможность её использования в теории клейновых групп, что попало в печать несколько быстрее. Тем временем, начиная с 1981 г., измеримую теорему Римана независимо начали использовать в локальных вопросах (С. М. Воронин, Б. Мальгранж и Ж. Мартине-Ж. П. Рамис). Вслед за Сулливаном его идею в других задачах конформной динамики использовали А. Дуади-Дж. Хабборд, после чего она, так сказать, «внедрилась» в сознание исследователей в этой области.

[25]Выше, казалось бы, утверждалось обратное, но там речь шла не об общей идее перенормировки, а о некоем специфическом приёме, использующем перенормировку вместе с «геометрией» некоей теоретико-числовой задачи; в многомерной ситуации в первую очередь недостаёт понимания этой «геометрии».

успешно развиваться достаточно содержательная теория. Стоит добавить, что некоторые из недавних её успехов связаны с выходом на время исследования в комплексную область (см., например, конец п. 2.1). Ещё раньше выход в комплексную область использовался в связи с «универсальностью Фейгенбаума»[26] [25].) В самом широком плане такой приём, мягко говоря, не нов (в алгебре ему почти 450 лет), но вот в теории ДС до сих пор выход в комплексную область удачно срабатывал только в локальных и близких к ним вопросах[27]. Видимо, здесь на ограниченном «пятачке» одномерной динамики мы являемся свидетелями начала проникновения этой старой, но вечно юной идеи в куда более молодую теорию динамических систем.

---

[26] Речь идёт о некоторой закономерности (тоже своего рода самоподобии) в бесконечной последовательности бифуркаций удвоения периода одномерного отображения. (При такой бифуркации периодическая точка теряет устойчивость и из неё «рождается» устойчивая периодическая точка удвоенного периода.) Доказано, что эта закономерность является «свойством общего положения», сам же М. Фейгенбаум обнаружил её в ходе численных экспериментов. (По его несколько ироническому высказыванию, ему помогло то, что он вначале работал всего-навсего с программируемым микрокалькулятором, вследствие чего приходилось более тщательно продумывать ход вычислений, нежели бы это было нужно при использовании более мощного компьютера). Хотя непосредственно здесь говорится об одномерных отображениях, соответствующие последовательности бифуркаций встречаются и для многомерных ДС (включая потоки), потому что для них вполне может случиться, что «основные события» будут всё-таки «одномерными». См. рассказ самого Фейгенбаума о его открытии и (частично гипотетической) роли последнего [24].

[27] Под вопросами, в каком-то отношении близкими к локальным, здесь понимаются некоторые вопросы о бифуркациях, более или менее глобальные по фазовому пространству, но локальные по параметру. См. конец п. 2.3).

1.3. Неклассические группы преобразований.

В бо́льшей части настоящей брошюры под ДС понимается действие группы или полугруппы $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{R}_+$ [28] на фазовом пространстве X (причём X имеет определённую структуру и действие определённым образом согласовано с ней). Но можно рассматривать действие других групп. Тогда говорят о «группах преобразований», но если желать подчеркнуть, что нас интересуют вопросы, во многом сходные с рассматриваемыми для обычных ДС, то можно говорить о «ДС с неклассическим временем» (пробегающим группу или полугруппу G), тогда как ДС в прежнем смысле —это «ДС с классическим временем». Такая терминология тем более оправдана, что по историческим причинам название «группы преобразований» чаще всего используют, говоря либо о непрерывном действии компактной группы, либо об алгебраическом действии алгебраической группы, удовлетворяющем сильному условию регулярности; изучаемые вопросы в обоих случаях имеют другой характер.

Направление, о котором здесь будет идти речь, —это эргодическая теория ДС с неклассическим временем. Но сперва надо сделать одно отступление.

Ниже придётся упоминать аменабельные группы. Хотя их определение дал Дж. Нейман ещё в 1929 г., оно пока не стало общеизвестным. Поэтому я скажу о двух эквивалентных более поздних определениях[29], ограничиваясь только случаем дискретной группы G, во вто-

[28] Левое действие (полу)группы G на X —это такое отображение

$$G \times X \to X \qquad (g, x) \mapsto \phi_g(x),$$

что для единицы e

$$\phi_e(x) = x \text{ при всех } x$$

и

$$\phi_g \circ \phi_h = \phi_{gh} \text{ при всех } g, h.$$

Аналогично определяется правое действие. Для коммутативных G это одно и то же, но в общем случае —нет. По поводу обозначений $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{R}_+$ стоит уточнить, что согласно стандарту Бурбаки, эти множества состоят из неотрицательных элементов $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ (так что значок $+$ не надо понимать слишком буквально). Ниже встречается также $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$.

Замечу для дальнейшего, что по аналогии со случаем классического времени множество $\{\phi_g(x);\ g \in G\}$ называют траекторией (или орбитой) точки x (под действием G).

[29] Они выдержаны в более классическом духе, чем первоначальное определение Неймана, в котором речь идёт о возможности осуществления в пространстве ограниченных функций на G некоторого трансфинитного построения (дающего так называе-

ром определении даже конечно порождённой. (В общем случае речь шла бы о локально компактной топологической группе или полугруппе). В определении Е. Фёлнера постулируется существование некоторой системы $\{F_n\}$ подмножеств G, которую теперь называют фёлнеровской системой. Она играет примерно такую же роль, какую играют отрезки $[-N, N]$ для $\mathbb{Z}$ —при возрастании N они покрывают всю G; по ним можно осреднять; при сдвиге на фиксированный элемент группы среднее по достаточно большим множествам фёлнеровской системы почти не меняется. Другое определение (восходящее к Х. Кестену и усовершенствованное Р. И. Григорчуком) годится для конечно-порождённой группы G. Если она имеет n образующих, то её можно представить как фактор-группу $G = F_n/H$ свободной группы с n образующими по некоторой нормальной подгруппе H. Обозначим через $f(k)$ число несократимых слов из F_n длины $\leq k$, а через $h(k)$ —число тех из них, которые лежат в H. Почти очевидно, что $f(k) = 2n(2n-1)^{k-1}$. G аменабельна, если $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{h(k)} = 2n-1$, т. е. если в H число слов длины $\leq k$ растёт (с ростом k) практически столь же быстро, как и в F_n. Факторизация F_n по H является, стало быть, весьма основательной, —в G очень много слов от образующих равно 1! Тем не менее кое-что остаётся, —как-никак, коммутативные, нильпотентные и даже разрешимые группы аменабельны.

Об аменабельных группах см. в [26] (впрочем, второе из приведённых определений является более новым).

Теперь мы можем перейти к нашей теме. Вскоре после появления первых эргодических теорем («статистической» Дж. Неймана и «индивидуальной» Дж. Биркгофа) их попробовали перенести на другие группы и полугруппы преобразований с инвариантной мерой. Довольно быстро были доказаны аналоги эргодических теорем для $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Z}^n_+$, $\mathbb{R}^n_+$, затем перешли к другим или к более общим группам. По-видимому, естественным классом групп (полугрупп), для которых можно рассчитывать на эргодические теоремы, более или менее непосредственно напоминающие теоремы для классического времени, является класс локально-компактных аменабельных групп (полугрупп). Статистическая эргодическая теорема доказана именно в такой общности. С индивидуальной эргодической теоремой положение сложнее. Ограничимся дискретны-

---

мое левоинвариантное банахово среднее).

ми группами[30]. Пусть (X,μ) —пространство с конечной[31] мерой, в котором действует посредством сохраняющих меру преобразований $\{\phi_g\}$ дискретная аменабельная группа G. По аналогии с классическим случаем, в индивидуальной эргодической теореме должны фигурировать средние $f_n(x) := \frac{1}{\#F_n}\sum_{g\in F_n} f(\phi_g(x))$, где F_n —множество из фёлнеровской системы $\{F_n\}$, а $\#F_n$ —число его элементов. Оказывается, не всегда можно утверждать, что последовательность $f_n(x)$ сходится почти всюду. Достаточным для этого является следующее дополнительное условие об $\{F_n\}$: система $\{F_n\}$ —возрастающая (т.е. $F_n \subset F_{n+1}$) и, главное,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\#(F_n^{-1}F_n)}{\#F_n} < \infty$$

(последнее условие указано А. Кальдероном). Фёлнеровские системы, удовлетворяющие условию Кальдерона, существуют для почти нильпотентных групп (групп, имеющих нильпотентную подгруппу конечного индекса)[32]. Они существуют также для счётных локально конечных групп. Неизвестно, нет ли ещё какого-нибудь значительного класса групп, для которых существуют такие фёлнеровские системы, а также нельзя ли заменить условие Кальдерона каким-нибудь более общим. Таким образом, индивидуальная эргодическая теорема доказана в формулировке, достаточно близкой к классической, для почти нильпотентных

[30]В литературе рассматривались также действия локально-компактных групп и полугрупп. Предположение о дискретности делается для простоты изложения (в этом месте заметных различий между дискретным и локально компактным случаями не видно, хотя в дальнейшем таковое кое-где возникает.)

[31]Для классического времени хорошо известно, что эргодические теоремы имеют место и в пространствах с бесконечной мерой, причём при переходе к ним и формулировки, и доказательства почти не меняются, хотя при дальнейшем развитии теории случаи конечной и бесконечной меры оказываются существенно различными и сейчас это развитие в основном относится к случаю конечной меры. Но поскольку в случае неклассического времени ситуация с индивидуальной эргодической теоремой неясна, естественно пока что ограничиться случаем конечной меры, что обычно и делают.

[32]В [28] сказано, что счётные группы, для которых существует фёлнеровская система, удовлетворяющая рассматриваемым там условиям, основным из которых является условие Кальдерона, «в существенном (essentially)» суть группы с полиномиальным ростом, т.е. конечно порождённые группы с полиномиальным ростом введённой выше $f(k)$, а такие группы, как доказал М. Громов, почти нильпотентны. В [28] не сказано, что конкретно означают слова «в существенном»; поскольку говорить о полиномиальном росте можно только для конечно порождённых групп, то возможно, что именно они и имеются в виду. Но, насколько известно, даже и для них не доказано, что из условия Кальдерона следует полиномиальность роста $f(k)$.

и для локально конечных G. Для других групп в литературе имеются некоторые анонсы, подозрительно долго остающиеся не поддержанными подробными публикациями.

Об эргодических теоремах для аменабельных групп см. [27], [28].

Но, оказывается, и за пределами класса аменабельных групп могут иметь место эргодические теоремы. Во всяком случае, Р. И. Григорчук получил индивидуальную эргодическую теорему для конечно порождённых свободных групп (полугрупп) и некоторых близких к ним, —а ведь считается (да отчасти и видно из второго определения), что свободные группы максимально далеки от аменабельных[33]. Всё дело в том, что Григорчук изменил способ осреднения по «времени», т. е. по группе. Я бы сравнил это с переходом в теории рядов от обычной сходимости к чезаровским средним. Как известно, там имеется много различных способов суммирования. Быть может, нечто аналогичное ожидает нас и в эргодической теории? А может быть, хотя бы для конечно порождённых групп какой-то способ окажется универсальным?

Но я заговорил о неклассическом времени не ради одних только эргодических теорем (если бы речь шла только о них, это едва ли подошло бы под название данного параграфа). В эргодической теории систем с классическим временем эргодические теоремы составляют только часть. Исторически эта часть возникла первой и дала название всей теории, но уже полстолетия это именно часть и даже не половина. В «абстрактных», «чисто метрических» разделах эргодической теории обсуждаются различные свойства эргодических систем, вплоть до частичной классификации последних. При этом обычно приходится вместо произвольных пространств с мерой (хотя бы и нормированной) рассматривать пространства Лебега[34], что, впрочем, практически не сужает

[33]Первоначально Григорчук опубликовал сообщение о своих результатах только в трудах провинциальной конференции [29] (ограничиваясь только свободными группами, но не требуя конечности инвариантной меры). Оно не привлекло внимания, и позднее появились аналогичные работы других авторов [30]. Начали также рассматриваться аналогичные теоремы для действий некоторых полупростых групп Ли [31], [32].

Я не буду обсуждать здесь более ранних работ [33], [34]. Их пионерское значение бесспорно, но в них речь идёт о специальных ситуациях и у них имеются специфические особенности, которые хотелось бы понять с общих позиций, к чему я, —думаю, не я один, —не готов. (Например, в [34] осреднение по разрешимой группе производится таким образом, как если бы она была свободной.)

[34]Пространство Лебега —это пространство с мерой, изоморфное (в том смысле, как это естественно понимать для пространств с мерой) стандартному объекту — отрезку $[0,1]$ с нормированной мерой Лебега-Стильтьеса. Эквивалентное определение: пространство Лебега изоморфно отрезку $[0,a]$ с мерой Лебега, к которому до-

общности результатов с точки зрения возможности их приложения к конкретным примерам. В других разделах, которые условно можно назвать «прикладными», исследуются свойства конкретных систем или некоторых их классов. (Эти системы часто являются гладкими или топологическими, так что, в принципе, их изучение можно было бы отнести к топологической или гладкой динамике, но когда речь идёт о свойствах, известных из «абстрактной» эргодической теории, соответствующие исследования (классов) конкретных систем обычно тоже относят к эргодической теории.)

Для систем с неклассическим временем отдельные исследования такого рода появлялись и раньше, но широкое развитие они получили примерно после 1970 г. При этом в одних случаях выявлено сходство с классическим случаем, а в других —отличие от него, причём граница, отделяющая привычную ситуацию от необычной, проходит в различных вопросах по-разному. Часто, как и выше, ситуация для аменабельных групп аналогична классической; иногда уже $\mathbb{Z}^2$ разительно отличается от $\mathbb{Z}$.

Как и в предыдущей части § 1, невозможно в двух словах рассказать о целой науке. Приведу только несколько примеров (поскольку я пытаюсь охарактеризовать данную область в целом, некоторые из этих примеров относятся к более раннему периоду, нежели последняя четверть века). Ограничусь только действиями дискретных групп (хотя многое —но не всё —проходит для сепарабельных локально-компактных полугрупп[35]) и вначале (в пп. *а*-*в*) буду считать, что группа G действует на пространстве Лебега (X, μ) и что все преобразования сохраняют меру μ.

а. Один из разделов эргодической теории —спектральная теория —начинается с того, что элементам $g \in G$ сопоставляются операторы U_g

---

бавлено не более чем счётное множество «атомов» с мерами p_n, причём $a + \sum p_n = 1$ (нормированность). Это определение учитывает некоторые полезные особенности большинства встречающихся в эргодической теории конкретных примеров, позволяющие при анализе чисто метрических вопросов продвинуться значительно дальше, нежели это было бы возможно для общих пространств с мерой. О том, что класс пространств Лебега достаточно велик, свидетельствует следующий факт: метризуемый компакт с нормированной мерой (определённой на его борелевских подмножествах) является пространством Лебега.

Теорию пространств Лебега разработали Дж. Нейман и П. Халмош (употреблявшие другое название) и особенно В. А. Рохлин.

[35] Уже для некоммутативных топологических групп могут возникать затруднения из-за различия между левоинвариантной и правоинвариантной мерами Хаара. Это есть нечто новое по сравнению с дискретными группами.

в $L^2(X,\mu)$:

$$(U_g f)(x) = f(\phi_g^{-1}(x)). \tag{3}$$

При этом операторы U_g получаются унитарными и $U_{gh} = U_g U_h$, так что мы имеем дело с унитарным представлением[36] группы G. Возникает задача —исследовать свойства этого представления и выяснить, насколько полно они отражают свойства исходной ДС. При переходе от одной ДС к другой ДС, метрически изоморфной исходной, соответствующее представление заменяется на унитарно эквивалентное. В функциональном анализе разработана система понятий, относящихся к свойствам унитарных представлений, инвариантных относительно унитарной эквивалентности. В простейшем случае, когда речь идёт о степенях U^n унитарного оператора U (так что мы имеем дело с представлением $\mathbb{Z}$), всё сводится к спектру этого оператора; поэтому и в более общем случае соответствующие понятия, инварианты, свойства называют спектральными. Константы всегда инвариантны относительно (3) и они образуют одномерное подпространство; поэтому молчаливо ограничиваются рассмотрением этого представления на ортогональном к константам подпространстве $H \subset L^2(X,\mu)$ и соответствующие спектральные свойства называют также свойствами ДС $\{\phi_g\}$. Надо пояснить, что в данном случае даже для одного оператора U спектр понимается в более тонком смысле, нежели в элементарных курсах функционального анализа, где под спектром линейного оператора A понимают совокупность тех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых оператор $A - \lambda I$ не имеет всюду определённого ограниченного обратного. В смысле этого определения спектр ДС $\{\phi^n\}$ во всех практически интересных случаях совпадает с единичной окружностью; таким образом, он доставляет нам инвариант, который практически всегда одинаков и потому бесполезен. Но для различных специальных (и в то же время важных) классов операторов в функциональном анализе имеются более тонкие варианты понятия спектра; для нас наиболее существенно такое уточнённое понятие спектра для унитарного оператора U и самосопряжённого оператора A (последний выступает на сцену в случае потока как производящий оператор соответствующей однопараметрической группы унитарных операторов). Недостаток места заставляет отослать читателя по поводу этого понятия к менее элементарным учебникам по функциональному анализу

[36] Если бы мы в правой части (3) взяли ϕ_g вместо ϕ_g^{-1}, то получилось бы антипредставление: $U_{gh} = U_h U_g$, что в общем ничуть не хуже, но менее привычно. Для полугруппы пришлось бы иметь дело именно с антипредставлением, но кроме того (что существеннее) операторы U_g были бы не унитарными, а изометрическими.

(оно приводится также, хотя бы отчасти, в некоторых книгах по эргодической теории)[37]. Ограничусь указанием, что говорят о непрерывном спектре, когда у U или A нет собственных функций (на H); о дискретном спектре —когда собственные функции образуют полную систему (в H и тогда во всём $L^2(X,\mu)$); о смешанном спектре —в остальных случаях.

Следует предупредить, что если для двух ДС соответствующие представления унитарно эквивалентны, то отсюда, вообще говоря, не следует, что ДС метрически изоморфны. Поэтому свойства ДС, вообще говоря, не исчерпываются её спектральными свойствами. Но иногда это так. В классической ситуации метрического автоморфизма ϕ или потока с инвариантной мерой ϕ_t таков тот случай, когда ДС эргодична[38] и спектр соответствующего U или A дискретный. В этом случае спектр полностью определяет ДС с точностью до метрического изоморфизма. В неклассической ситуации Дж. Макки[39] выделил случай, который во многом аналогичен и потому получил то же название: это тот случай, когда рассматриваемое представление разлагается в дискретную прямую сумму неприводимых конечномерных представлений. За описанием этого разложения условно сохраняется название «спектр». Если G коммутативна, то ситуация вполне аналогична классической, но для общих групп это не совсем так; в частности, дискретный спектр может не определять ДС с точностью до метрического изоморфизма.

Если спектр не дискретный, то даже для классического времени едва ли можно говорить о какой-то общей теории, а скорее о примерах и классах примеров. Для неклассического времени известно ещё меньше.

[37] См., впрочем, п. 3.9.

[38] В «абстрактной» эргодической теории ДС с классическим временем доказывается, что каждая система в некотором естественном смысле разлагается и притом единственным образом на эргодические компоненты, поэтому принимается точка зрения, что свойства «общих» ДС как бы сводятся к свойствам их эргодических компонент и оттого в основном надо заниматься именно эргодическими ДС (тогда как в «прикладной» теории приходится, конечно, для каждой конкретной ДС стараться выяснить, эргодична она или нет). Для ДС с неклассическим временем сказанное остаётся в силе, если G —локально компактная группа со счётной базой (причём мера в фазовом пространстве может быть не инвариантной, а квазиинвариантной). При более общих G различные определения эргодичности и разложения на эргодические компоненты становятся неэквивалентными (см. статью «Метрическая транзитивность» в «Математической энциклопедии»); всё же в какой-то степени указанная точка зрения остаётся применимой.

[39] Надо сказать, что в первые две трети 60-х гг. Макки был едва ли не единственным, кто пропагандировал изучение ДС с неклассическим временем, выходящее за пределы эргодических теорем.

Отмечу один только факт, контрастирующий с ситуацией для классического случая. В своё время в классической ситуации С. Банах обратил внимание на то, что во всех известных ему примерах с лебеговским спектром этот спектр счётнократный, и поставил вопрос, обязательно ли это должно быть так. Теперь разобрано больше примеров и во всех них подтверждается наблюдение Банаха, но ответ на его вопрос попрежнему неизвестен[40]. А вот для мультипликативной группы ненулевых рациональных чисел известен пример действия с однократным лебеговским спектром (М. Новодворский).

Отмечу заодно ещё один пример контраста между классическим и неклассическим аменабельным временем, хотя этот пример и не «спектральный», по крайней мере, непосредственно не является таковым[41]. В. А. Рохлин высказал предположение, что если ДС с классическим временем обладает свойством перемешивания, то она обладает и свойством перемешивания любой кратности. Этот вопрос тоже остаётся открытым, тогда как для $G = \mathbb{Z}^2$ Ф. Ледраппье указал пример, где перемешивание есть, а кратного перемешивания нет.

б. Другим большим разделом эргодической теории является энтропийная теория, содержащая не только определение метрического инварианта «энтропия» и исследование его свойств, но и ряд родственных вопросов. Она в значительной степени переносится на аменабельные группы, начало чему положил А. М. Стёпин, определивший в конце 60-х гг. энтропию h_μ для действия аменабельной группы G с инвариантной нормированной мерой μ. Позднее совместно с А. Т. Таги-заде для непрерывного действия G на метрическом компакте он определил топологическую энтропию и доказал, что она совпадает с $\sup_\mu h_\mu$, где верхняя грань берётся по всем инвариантным нормированным мерам этого действия. (Тем самым подразумевается, что последние имеются; см. пункт *г*.) Это является обобщением относящейся к классическому времени теоремы Е. И. Динабурга-Т. Гудмана-Л. Гудвина. См. также *е*.

в. Вот ещё один пример, где класс аменабельных групп тоже оказывается тем естественным классом, на который переносится известный

[40]Если спектр имеет не только лебеговскую, но и сингулярную компоненту, то кратность первой может быть конечной, см. [35], где имеются также ссылки на более ранние примеры такого рода.

[41]Перемешивание, о котором здесь идёт речь, является «спектральным» свойством, т. е. определяется некоторым свойством спектра соответствующих $\{U\}$ или $\{U_t\}$, а для кратного перемешивания характеристики в терминах спектра не имеется (хотя из формулируемой ниже гипотезы Рохлина в конечном счёте следовало бы, что такая характеристика есть).

результат, первоначально полученный для классического времени: любые два эргодические действия двух счётных дискретных аменабельных групп на пространстве Лебега X, сохраняющие меру, траекторно эквивалентны, т. е. существует такой метрический изоморфизм $X \to X$, который переводит траектории одной системы в траектории другой (А. Конн,
Дж. Фельдман и Б. Вейсс, 1981 г.). С чисто метрической точки зрения имеется, стало быть, только одно разбиение на траектории эргодических действий —в качестве «стандартного образца» можно взять, скажем, разбиение окружности на траектории поворота на «иррациональный» угол[42].

У неаменабельной группы имеются траекторно неэквивалентные эргодические действия. Особенно резко контрастирует с теоремой Конна-Фельдмана-Вейсса следующий результат Р. Циммера (1980). Пусть G, H —две связные полупростые группы Ли ранга > 1 без центра и конечных факторгрупп. Пусть $\{\phi_g\}$ и $\{\psi_h\}$ —их действия на пространстве Лебега (X, μ), которые сохраняют меру μ, эргодичны и остаются таковыми при ограничении на любую неединичную нормальную подгруппу, причём любой элемент группы, отличный от единицы, сдвигает все или почти все[43] точки X. Если эти действия траекторно эквивалентны, то G и H изоморфны и после соответствующего отождествления их элементов оба действия становятся метрически изоморфными. Иными словами, существуют такие изоморфизм групп Ли $f\colon G \to H$ и метрический автоморфизм $h\colon X \to X$, что $h\phi_g = \psi_{f(g)}$ для всех $g \in G$.

Когда нечто может реализовываться, по существу, единственным образом (т.е. единственным образом с точностью до очевидных модификаций вроде «подкручивания» на f и h выше), то часто говорят о «жёсткости»[44]. К моменту появления работы Циммера уже был получен ряд результатов (прежде всего, Г. Мостова и Г. А. Маргулиса) о жёсткости дискретных подгрупп групп Ли; они, как отмечает сам Цим-

---

[42] Т. е. на угол, несоизмеримый с «полным» (360°). При реализации окружности как $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ это есть сдвиг на иррациональное (в обычном смысле слова) число. Замечу, что именно разбиение окружности на траектории этого сдвига встречается при построении наиболее известного примера неизмеримого множества.

[43] В первом случае говорят о свободном действии. Во втором случае Макки и Циммер называют действие «существенно свободным» («essentially free»; более точным переводом было бы «в сущности свободным»).

[44] Этот термин пришёл, по-видимому, из геометрии поверхностей, где, впрочем, некоторые из наиболее авторитетных специалистов предпочитали говорить об «однозначной определённости» и только для некоего инфинитезимального варианта последней употребляли название «жёсткость».

мер, оказали на него влияние (в данном случае, возможно, не столько в смысле непосредственной логической зависимости, сколько в отношении идейных ассоциаций[45]). Позднее появились работы (прежде всего, А. Катка и его сотрудников) о некоторых явлениях жёсткости в более гладкой ситуации, смыкающейся с гиперболической теорией.

г. Широко известна теорема Н. М. Крылова-Н. Н. Боголюбова, которая находится на грани между топологической динамикой и эргодической теорией. Она утверждает, что топологическая динамическая система с классическим временем, фазовое пространство которой компактно, имеет хотя бы одну нормированную инвариантную меру. Вскоре после её опубликования Н. Н. Боголюбов указал, что точно такая же теорема справедлива для непрерывных действий аменабельных групп[46] на компактах (об этой его работе 1939 г. см. [36]). Можно доказать, что и обратно, если для любого непрерывного действия локально компактной группы на компактах имеется конечная инвариантная мера, то группа аменабельна.

д. Эта теорема Боголюбова, как и относящаяся к «классическому» случаю теорема Крылова-Боголюбова, ничего не говорит о свойствах инвариантной меры —в различных примерах они могут быть различными; может также случиться, что одна система имеет много нормированных инвариантных мер, в том числе и эргодических, свойства которых существенно различаются. Одна мера может быть сосредоточена в одной точке (неподвижной при всех ϕ_g), а другая —быть положительной для всех открытых множеств. Первая мера эргодична[47], но никаких содержательных утверждений о системе с такой мерой (кроме того, что у системы есть неподвижная точка), разумеется, сделать нельзя. Во втором случае мера может быть, а может и не быть эргодической; если она эргодическая, то она может обладать или не обладать более сильными свойствами «квазислучайного» характера (в «классической» ситуации —перемешивание, положительная энтропия и т. д.). Иногда существование инвариантной меры, заведомо заслуживающей особого внимания, известно заранее (с этим мы сталкиваемся в «классической»

[45] Однако у Циммера есть теорема (к сожалению, формулируемая слишком громоздко), следствиями которой являются как его результат о жёсткости, так и часть результатов Мостова и Маргулиса, так что формальные связи здесь тоже имеются.

[46] В то время Н. Н. Боголюбов называл такие группы «банаховыми», ибо они характеризуются существованием банахова среднего.

[47] Когда одна и та же топологическая ДС рассматривается одновременно с различными инвариантными мерами, то вместо «эргодичности ДС по отношению к мере μ» часто говорят об «эргодичности меры μ».

ситуации, рассматривая гамильтоновы системы), иногда же заранее никакой «привилегированной» инвариантной меры не имеется и специально выясняется вопрос о существовании не просто инвариантных мер, а мер с теми или иными интересными свойствами. Естественно, это делается в гораздо более конкретной ситуации, нежели в общих теоремах Крылова-Боголюбова или Боголюбова.

Интересный и важный класс примеров, для которых исследуется данный вопрос, возникает из статистической физики или по крайней мере подсказывается ею. Представим себе, что в каждой точке решётки $\mathbb{Z}^n$ находится частица, которая может находиться в одном из k возможных состояний («решётчатая система»). Обозначим фазовое пространство состояний одной частицы через A (например, можно взять $A = \{1, \ldots, k\}$, если нет особых причин обозначать состояния частицы как-то иначе). Тогда состояние всей нашей бесконечной системы частиц описывается функцией $\xi\colon \mathbb{Z}^n \to A$ —$\xi(g)$ для точки $g \in \mathbb{Z}^n$ есть состояние находящейся в этой точке частицы. Я нарочно обозначаю точку $\mathbb{Z}^n$ через g, чтобы сразу перейти от $\mathbb{Z}^n$ к произвольной группе G (собственно, в бо́льшей части этого пункта можно было бы взять и полугруппу, но ограничимся группой, чтобы потом не делать оговорок). Конечно, в случае $G \neq \mathbb{Z}^n$ мы уже не можем представлять себе некий кристалл, расположенный в $\mathbb{R}^n$, но попрежнему можем рассматривать функции $\xi\colon G \to A$. Совокупность $\Omega := A^G$ всех таких функций есть фазовое пространство нашей бесконечной системы. Оно естественно снабжается топологией (тихоновская топология прямого произведения бесконечного числа экземпляров пространства A)[48] и несколько менее естественным образом —метрикой. Несколько меньшая естественность метрики состоит в том, что имеется много метрик, индуцирующих эту топологию, и *a priori* нет оснований предпочесть одну из них другим. Опыт показывает, что в случае $G = \mathbb{Z}^n$ для наших целей хороша следующая метрика. Взяв какую-нибудь (безразлично, какую) метрику d в A (например, можно принять, что расстояние между различными точками A равно 1, или положить $d(i,j) = |i-j|$), взяв какое-нибудь (безразлично, какое) число $a \in (0,1)$ и обозначив

$$|g| = \sum_r |g_r| \quad \text{для } g = (g_1, \ldots, g_k) \in \mathbb{Z}^n,$$

[48]Читатель, не знакомый с тихоновской топологией, может принять по определению, что в данном случае это есть топология, индуцируемая вводимой ниже метрикой ρ.

положим

$$\rho(\xi, \eta) = \sum_{g \in \mathbb{Z}^n} a^{|g|} d(\xi(g), \eta(g)).$$

Легко проверяется, что топология в Ω, индуцируемая этой метрикой, есть как раз тихоновская топология. Для других групп тоже можно взять нечто аналогичное, заменив $a^{|g|}$ на подходящую функцию от g, которая, так сказать, достаточно быстро убывает при удалении g от единицы группы; я не буду на этом останавливаться. Таким образом, Ω —метрический компакт.

Наконец, имеется естественное действие G на Ω:

$$(g, \xi) \mapsto \phi_g(\xi), \quad \text{где } (\phi_g(\xi))(h) = \xi(gh) \text{ при всех } h \in G. \tag{4}$$

Здесь мы обозначили групповую операцию как умножение $(g, h) \mapsto gh$, а не как сложение $(g, h) \mapsto g+h$, потому что G может быть некоммутативной. (Когда имеют дело с $\mathbb{Z}^n$, то, конечно, имеют дело с обычным сложением и записывают его с помощью знака $+$). ϕ_g —гомеоморфизмы Ω.

Полученный объект —метризуемый компакт Ω с действующей на нём согласно сказанному группой G, —называют топологической ДС Бернулли или топологическим бернуллиевским действием группы G. Основанием для такого названия служит то, что при $G = \mathbb{Z}$ элемент $\xi \in \Omega$ можно интерпретировать как запись результатов бесконечной последовательности испытаний, имеющих одни и те же возможные исходы, которые образуют множество A: $\xi(n)$ —это исход испытания в момент времени n (время дискретно и пробегает $\mathbb{Z}$). При этом $\xi(n)$ с $n \leq 0$ —это результаты уже проведенных испытаний (в частности, $\xi(0)$ —это результат испытания, проведенного «сейчас»), а $\xi(n)$ с $n > 0$ —это результаты будущих испытаний; первые нам уже известны, вторые нет. Чаще говорят о двусторонне бесконечной последовательности

$$\ldots, \xi(-n), \xi(-n+1), \ldots, \xi(-1), \xi(0); \xi(1), \xi(2), \ldots, \xi(n), \ldots, \tag{5}$$

представляя себе её элементы записанными именно так, как выше, —в порядке возрастания номера слева направо. Чтобы выделить положение элемента с номером ноль, использована точка с запятой. Действие $\mathbb{Z}$ на Ω сводится к итерированию «топологического сдвига Бернулли»

$$\sigma\colon \Omega \to \Omega, \quad \xi \mapsto \sigma\xi, \quad (\sigma\xi)(n) := \xi(n+1)$$

и обратного к нему отображения σ^{-1}. При этом сдвиге последовательность (5) сдвигается налево относительно точки с запятой; прежнее $\xi(1)$

становится элементом с нулевым номером, так что можно представить себе, что мы ещё раз повторили испытание и теперь уже знаем этот элемент. Обозначим проекцию бесконечного произведения

$$\Omega = A^{\mathbb{Z}} = \ldots A \times A \times \ldots \times A \times \ldots$$

на его «нулевой» сомножитель A через π_0, так что $\pi_0\xi = \xi(0)$. Тогда можно сказать, что при последовательных испытаниях в момент времени n наблюдается исход $\pi_0(\sigma^n\xi)$.

Из сказанного видно, что при $G = \mathbb{Z}$ один и тот же объект (Ω, σ) может интерпретироваться двумя способами. С точки зрения статфизики, с которой мы начали, речь идёт о состояниях бесконечной цепочки. Ни о какой динамике в обычном смысле —в смысле эволюции системы с изменением времени —при этом нет речи, ибо о настоящем времени вообще не говорится. Число n в (5) —это номер элемента цепочки, а действие σ соответствует пространственному сдвигу цепочки на одно «звено». С вероятностной точки зрения, к которой мы перешли, n может считаться «настоящим, физическим» временем: за время n точка ξ фазового пространства переходит в $\sigma^n\xi$. Это соответствует тому, что мы представляем себе испытания, входящие в данную последовательность испытаний, осуществляющимися один за другим; сюда добавляется ещё указание, что в опыте наблюдается не ξ, а только $\pi_0\xi$, так что с изменением времени наблюдаются величины $\pi_0\sigma^n\xi$, которые в данном случае совпадают с $\xi(n)$. (В более общем случае фазовое пространство Ω и отображение $\sigma\colon \Omega \to \Omega$ могут быть другими, а наблюдаемая величина может быть некоторой функцией $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, так что с течением времени из наблюдений получается последовательность $f(\sigma^n\xi)$.) Статфизическая точка зрения годится и при $G = \mathbb{Z}^n$ с $n > 1$; «динамика» опять-таки означает не изменение состояния со временем (которого нет), а действие пространственных сдвигов (трансляций) на рассматриваемую систему. Говорить же о последовательности испытаний больше не приходится, хотя можно вообразить испытания, почему-то пронумерованные элементами $\mathbb{Z}^n$ (чему, пожалуй, ещё можно дать (квази)реалистическую интерпретацию) или даже элементами общей группы G. Для $G \neq \mathbb{Z}^n$ статфизическая интерпретация тоже становится условностью речи, навеянной аналогией с физически реальным случаем $G = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{Z}^3$.

Хотя мы отчасти использовали вероятностный язык и упомянули о Бернулли, пока никаких вероятностей у нас не было. С именем Якова Бернулли, как известно, связано исследование последовательности одинаковых независимых испытаний. В этом случае каждый возможный исход испытания $a \in A$ имеет некоторую вероятность $p(a)$, а независимость испытаний проявляется в том, что результат испытания в момент времени n не зависит от результатов испытания в другие моменты времени. Стало быть, вероятность того, что в моменты $n_1, \ldots, n_l$ получатся исходы $a_1, \ldots, a_l$, есть $p(a_1) \cdot \ldots \cdot p(a_l)$. Вот мы фактически и описали меру μ в Ω, по отношению к которой последовательность случайных величин $\pi_0(\sigma^n \xi)$ описывает последовательность независимых одинаковых испытаний. Повторим описание ещё раз, перенося его на общий случай $\Omega = A^G$, когда вероятностная интерпретация теряет непосредственный смысл, хотя условно можно продолжать использовать вероятностный язык.

Элементам $a \in A$ должны быть заранее приписаны вероятности или меры $p(a) \geq 0$; при этом сумма последних должна равняться 1. Тем самым подмножеству $B \subset A$ приписывается мера $p(B) = \sum\limits_{a \in B} p(a)$ и мы получаем меру на конечном множестве A, что, конечно, тривиально. Мера на Ω, которая будет построена, зависит от задания этих $p(a)$, т. е. этой меры p на A.

Цилиндрическим подмножеством пространства Ω называется множество вида

$$C = \{\xi;\ \xi(g_1) \in B_1,\ \ldots,\ \xi(g_l) \in B_l\}, \tag{6}$$

где $g_1, \ldots, g_l \in G$, $B_1, \ldots, B_l \subset A$. Ему приписывается мера

$$\mu(C) = p(B_1) \cdot \ldots \cdot p(B_l). \tag{7}$$

В теории меры доказывается, что на σ-алгебре борелевских подмножеств компакта Ω существует и притом единственная мера μ, которая для цилиндрических множеств (6) принимает значения (7). С точки зрения теории меры, она является прямым произведением

$$p^G = \ldots \times p \times p \times \ldots \times p \times \ldots$$

мер p на сомножителях A прямого произведения A^G. Почти очевидно, что эта мера инвариантна относительно действия (4) группы G и что действие эргодично по отношению к этой мере.

В классическом случае сдвиг σ, рассматриваемый по отношению к построенной мере, называется метрическим автоморфизмом Бернулли. Саму меру естественно тоже называть бернуллиевской. Свойства ДС $\{\sigma^n\}$ с этой мерой резко отличаются от свойств эргодической ДС с дискретным спектром. $(\{\sigma^n\}, \mu)$ имеет перемешивание всех степеней, счётнократный лебеговский спектр и положительную, но конечную (метрическую) энтропию. Вообще, автоморфизм Бернулли —это как бы образец ДС с «квазислучайными» свойствами (что и понятно ввиду его происхождения) и даже, так сказать, крайний такой образец, если не считать ДС с бесконечной энтропией. В случае неклассического времени бернуллиевские ДС играют аналогичную роль.

Само по себе определение бернуллиевской ДС и бернуллиевской меры не зависит от того, аменабельна ли G. Для дальнейшего же в этом и следующем пп. требуется аменабельность.

Значительным достижением теории ДС является теорема Д. Орнстейна, согласно которой автоморфизмы Бернулли с одинаковой энтропией метрически изоморфны. Д. Орнстейн и Б. Вейсс показали, что эта теорема переносится на бернуллиевские действия аменабельных групп [37], [38].

е. Мера на A (т. е. система чисел $p(a) \geq 0$, удовлетворяющая условию $\sum p(a) = 1$) может выбираться произвольно; таким образом, у топологической ДС Бернулли имеется континуум инвариантных эргодических мер. Но оказывается, что помимо построенных выше, эта ДС имеет очень много других инвариантных нормированных мер, в том числе и эргодических. Некоторые из них безусловно заслуживают особого внимания.

При $G = \mathbb{Z}$ некоторые меры, как и бернуллиевские, выделяются (из общего огромного множества инвариантных мер) или вводятся (независимо от того, что мы знаем о прочих мерах) на основании вероятностных соображений. В теории вероятностей рассматриваются некоторые последовательности одинаковых испытаний, которые не являются независимыми. Особенно важны те случаи, когда $\{\pi_0(\sigma^n\xi);\ n \in \mathbb{Z}\}$ оказывается марковским процессом. Им соответствуют новые инвариантные нормированные меры μ в A, которые иногда эргодичны, иногда нет. Но при переходе от $\mathbb{Z}$ к G определение марковского свойства теряет смысл. Некое разумное видоизменение этого определения выработано для $G = \mathbb{Z}^n$, но пока что соответствующие объекты, насколько известно, играют заметную роль в теории случайных полей, а не в эргодической теории. Мы их оставим в стороне и обратимся от теории вероятностей к статистической физике, с которой мы начали, но от которой затем ушли.

С физической точки зрения бернуллиевские меры отвечают такой ситуации, когда состояния частиц в вершинах решётки $\mathbb{Z}^n$ не зависят друг от друга. Так, конечно, может быть при отсутствии взаимодействия между ними, но интересен как раз тот случай, когда взаимодействие имеется. В этом случае соображения, заимствованные из статфизики, приводят к некоторым новым нормированным инвариантным мерам. Их определению, как мы увидим, можно придать такую форму, что оно уже не будет относиться специально к топологической бернуллиевской ДС, а будет иметь смысл для действия группы G (попрежнему аменабельной) на метрическом компакте. Правда, при этом может случиться, что не существует мер, удовлетворяющих этому определению. Но если они существуют, то заслуживают внимания. Следует предупредить, что наша цель здесь всё-таки не статфизика, а теория ДС, поэтому в излагаемых далее построениях даже применительно к решётчатым системам встречается некоторое несоответствие со статфизикой. Можно доказать, что на окончательные результаты для таких систем оно не влияет. Но для нас указания, заимствованные из статфизики, имеют скорее эвристический характер, так что на это несоответствие можно вообще не обращать внимания.

В статистической физике для системы, имеющей конечное число состояний $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ с энергиями $E(\alpha_j)$, вводят так называемую статистическую сумму

$$Z = \sum_{j=1}^{N} e^{-\beta E(\alpha_j)}, \tag{8}$$

где β —величина, обратная температуре, выраженной в подходящих единицах; поскольку же температуру издавна измеряют в градусах, то для перехода к «подходящим» единицам её надо умножить на константу Больцмана k; итак, $\beta = \dfrac{1}{kT}$. Для системы макроскопических размеров рассматриваемая в феноменологической термодинамике свободная энергия F выражается через Z:

$$F = -\frac{\ln Z}{\beta}. \tag{9}$$

При термодинамическом равновесии (отвечающем данной температуре T) состояние α_j имеет вероятность

$$p(\alpha_j) = e^{-\beta E(\alpha_j)}/Z. \tag{10}$$

Одна из возможных характеризаций этого распределения вероятностей такова: при данных β и $E(\alpha_j)$ величина

$$\sum p_i E(\alpha_i) + \frac{1}{\beta} \sum p_i \ln p_i \tag{11}$$

достигает минимума по всем распределениям вероятностей $(p_1, \dots, p_N)$ как раз когда $p_i = p(\alpha_i)$. А если подставить эти p_i в (11), получится как раз F. (При $p_i = 0$ в (11), естественно, подразумевается, что $p_i \ln p_i = 0$, поскольку $\lim\limits_{p \to 0} p \ln p = 0$. Значит, можно считать, что в (11) фигурируют только положительные p_i. Опустив же в (8) слагаемые с теми j, для которых $p_j = 0$, мы можем только уменьшить статсумму Z, и если для этой уменьшенной Z будет доказано, что

$$\sum p_i E(\alpha_i) + \frac{1}{\beta} \sum p_i \ln p_i \geq -\frac{1}{\beta} \ln Z \quad \text{при } p_i > 0, \ \sum p_i = 1, \qquad (12)$$

то тем более это будет справедливо для первоначальной Z. Поскольку $\ln x$ —вогнутая функция, т. е. её график обращён выпуклостью вверх, то при любых $x_i > 0$

$$\sum p_i \ln x_i \leq \ln \sum p_i x_i.$$

В частности,

$$\sum p_i \ln (e^{-\beta E(\alpha_i)}/p_i) \leq \ln \sum p_i e^{-\beta E(\alpha_i)}/p_i = \ln \sum e^{-\beta E(\alpha_i)},$$

а это равносильно (12).) Заметим кстати, что при подстановке в (11) $p_i = p(\alpha_i)$ первое слагаемое получается равным энергии нашей системы в данном равновесном состоянии, а второе —равным $-TS$, где $S := -k \sum p_i \ln p_i$ —её энтропия (измеренная в макроскопических единицах, используемых в феноменологической термодинамике). Таким образом, $F = E - TS$, —в феноменологической термодинамике это соотношение является определением F.

После этого краткого экскурса в статфизику вернёмся к нашей решётчатой системе или, более общо, к ДС Бернулли (с аменабельной G). Сперва сделаем одно терминологическое замечание. Бывает, что в разных науках одно и то же слово имеет совсем разный смысл. Если науки далеки друг от друга, это не приводит к недоразумениям, —трудно представить себе, как можно было бы спутать «клетки» в топологии с «клетками» в биологии. Но бывает и так, что слово имеет разный смысл в довольно близких разделах науки, которые со временем соприкасаются и даже частично перекрываются. Тогда терминологию стоит уточнять. Такое случилось с термином «состояние». В теории ДС состояние —это точка фазового пространства. В статфизике состояние —это распределение вероятностей, т. е. мера, в фазовом пространстве. (В конце предыдущего абзаца слово «состояние» один раз употреблялось именно в таком смысле.) Если принять последнюю терминологию, то не надо говорить о точках фазового пространства как о состояниях. В теории решётчатых систем их часто называют «конфигурациями»[49]. Но эта брошюра написана с иных позиций, и «не назвать ли нам меру мерой?»

Суммарная энергия всей бесконечной решётчатой системы, вообще говоря, бесконечна и работать с ней нельзя. Но разумно считать, что в ней можно как бы выделить часть, приходящуюся на одну частицу, и что для частицы, находящейся в точке g, этот вклад является некоторой функцией $E(g, \xi)$ от g и состояния всей решётчатой системы ξ. Мы считаем, что взаимодействие инвариантно относительно левых групповых сдвигов. Значит, если в точке g частица находится в состоянии $\xi(g)$, а в точках gh (со всевозможными h) —в состояниях $\xi(gh)$ (как это и есть для состояния всей системы ξ), то вклад в энергию, приходящуюся на «g-ю» частицу, таков же, как вклад в энергию, приходящийся на «e-ю» частицу (e —единица группы), если она находится в состоянии $\xi(g)$, а «h-е» частицы —в состоянии $\xi(gh)$. Последнее имеет место при состоянии всей системы $\phi_g(\xi)$. Итак, $E(g, \xi) = E(e, \phi_g(\xi))$, и нам достаточно рассматривать функцию $f(g) := -E(e, \xi)$, которую мы будем считать непрерывной. (Знак «минус» не имеет физической мотивировки, но принят в соответствующих математических работах, слегка упрощая часть формул. Излагаемая теория хотя и навеяна статфизикой, но в конечном счёте является математической, и фигурирующие в ней величины в общем случае никак не могут иметь такого физического смысла, как в обсуждаемом сейчас примере.) Тогда

$$E(g, \xi) = -f(\phi_g(\xi)). \tag{13}$$

(При более реалистическом подходе для случая $G = \mathbb{Z}^n$ начинают с

[49]На что имеются известные основания. В классической механике конфигурация системы —это расположение её частей, без учёта скоростей их движения. А сейчас мы имеем дело с равновесной статфизикой, где о движениях не говорится. (При желании можно вообразить, что если какие-то движения есть, то они являются «скрытыми», «спрятанными внутри состояний» и только эффективно учитываются в фигурирующей ниже энергетической характеристике f. Впрочем, физические задачи с конечным числом состояний частиц решётки бывают связаны со спином, а спин вообще не описывается в классических терминах с различением координат и импульсов и с разделением энергии на потенциальную и кинетическую. Раз уж зашла об этом речь, надо сказать, что на самом деле квантовомеханическое описание спина сложнее обсуждаемой здесь примитивной ситуации, где говорится только, что у частицы имеется конечное число состояний (с соответствующими энергетической характеристикой). Тем не менее иногда —и, по-видимому, чаще, чем можно было бы ожидать, —описываемая примитивная модель оказывается дающей достаточно хорошее приближение.)

того, что взаимодействие сводится к парным, тройным, ... r-арным, ... взаимодействиям; однако в предположении, что все взаимодействия быстро убывают с увеличением числа частиц и расстоянием, результат в конечном счёте оказывается таким же.)

План наших действий будет состоять в том, чтобы сперва рассмотреть конечный «кусок» S_n решётчатой системы, образованный частицами, расположенными в тех точках решётки $\mathbb{Z}^n$, которые лежат в кубе или, более общо, воображаемыми частицами, занумерованными элементами фёлнеровского множества F_n. Затем мы хотим сделать некоторый предельный переход при $n \to \infty$. Формула (9) подсказывает, что разумно взять

$$-\frac{\ln Z_{F_n}}{\beta \# F_n}, \tag{14}$$

где $\#F_n$, как и ранее, —число элементов F_n. В пределе при $n \to \infty$ (существование которого, конечно, надо доказать) получается свободная энергия, приходящаяся на одну частицу. («Суммарная» свободная энергия всей бесконечной решётчатой системы, под которой следовало бы понимать предел $-\ln Z_{F_n}/\beta$, скорее всего, будет бесконечной).

При осуществлении этого плана некоторые детали конкретизируются не совсем так, как это могло бы показаться более естественным.

Во-первых, в (14) опускают знак минус и соответствующий предел называют не «свободной энергией» (приходящейся на одну частицу), а «давлением» и соответственно обозначают через P. Если не говорить о «житейском» смысле слова «давление», то в термодинамике для макроскопической непрерывной физической системы под давлением понимают следующее: надо выразить F через объём системы V и температуру T (возможно, и через какое-то ещё параметры); тогда $P = -\partial F(V,T)/\partial V$. Называя взятый с обратным знаком предел (14) давлением, Рюэлл, по-видимому, исходил из того, что для решётчатой системы вместо производной F по объёму естественно взять приращение F, получающееся при добавлении одной частицы, а это и приводит к (14) (причём как раз без минуса, если приращение, как и производную в случае непрерывной системы, брать с обратным знаком). Однако в самой статфизике о давлении для решётчатых систем, кажется, не говорят.

Во-вторых, обычно полагают $\beta = 1$. Это соответствует изменению функции $f(\xi)$ на постоянный множитель, что не принципиально. (Существенным это становится только тогда, когда по каким-то причинам надо рассматривать не одну f, а семейство βf с параметром β. В физике для этого есть серьёзное основание —надо с самого начала иметь в виду, что одна и та же система будет рассматриваться при разных температурах. В теории ДС нет причин с самого начала уделять особое внимание семейству βf; если же когда-нибудь в этом возникнет нужда (что действительно бывает), ничто не мешает тогда и заменить f на βf.)

В-третьих (это более серьёзно), Z_{F_n} определяют так. Состояния S_n суть элементы A^{F_n} (т. е. функции $F_n \to A$). Каждую такую функцию α мы каким-нибудь образом продолжаем до отображения $\xi_\alpha\colon F \to A$ и полагаем (ср. (13))

$$Z_{F_n} := \sum_{\alpha \in A^{F_n}} e^{-\sum_{g\in F_n} E(g,\xi_\alpha)} = \sum_{\alpha\in A^{F_n}} e^{\sum_{g\in F_n} f(\phi_g(\xi_\alpha))}. \tag{15}$$

В показателе здесь учитывается взаимодействие «g-й» частицы (с $g \in F_n$) со всеми остальными частицами «решётки», не только отвечающими элементам F_n. С точки зрения статфизики правильнее было бы, рассматривая выделенный «кусок» S_n как изолированную систему, учесть только взаимодействия частиц из S_n друг с другом. (Тогда и продолжать $\alpha\colon F_n \to A$ до $\xi_\alpha\colon F \to A$ не понадобилось бы.) Повторяю, что на самом деле (при естественных предположениях о взаимодействиях) это не меняет окончательного результата и что для нас это вообще не так уж важно. Z_{F_n} зависит от конкретного выбора продолжений α до ξ_α. Но оказывается, что при любом таком выборе существует предел

$$P(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\# F_n} \ln Z_{F_n}, \tag{16}$$

который не зависит ни от конкретного выбора ξ_α, ни от использованной фёлнеровской системы. $P(f)$ называют топологическим давлением, отвечающим непрерывной функции $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$. (Оно, конечно, зависит от G и A, а в более общей ситуации, к которой мы вскоре перейдём, —от рассматриваемой ДС, но обычно они считаются фиксированными и потому не указываются явно в обозначении для P.) Выражение (11), как будет пояснено ниже, тоже имеет естественный аналог для решётчатой системы («приходящийся на одну частицу»), в котором вместо конечного распределения вероятностей $(p_1, \dots, p_N)$ фигурирует мера μ в фазовом пространстве, инвариантная относительно $\{\phi_g\}$. Естественно сравнить этот аналог с $P(f)$ (т. е. с точностью до знака, со свободной энергией, приходящейся на одну частицу), и обратить внимание на те меры, при которых эти две величины совпадают (если такие меры существуют).

Пока что речь шла о топологической ДС Бернулли (это использовалось, когда говорилось о её «куске» S_n и о продолжении состояния α последнего до ξ_α). Теперь мы перейдём к общей топологической ДС с аменабельной G и компактным фазовым пространством X, считая также заданной непрерывную $f\colon X \to \mathbb{R}$.

Пусть $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_l\}$ —конечное открытое покрытие X. Положим $\phi_g^{-1}\mathcal{U} := \{\phi_g^{-1}U_1, \ldots, \phi_g^{-1}U_l\}$,

$$\mathcal{U}_{F_n} := \bigvee_{g\in F_n} \phi_g^{-1}\mathcal{U},$$

где использовано следующее обозначение: для нескольких конечных покрытий $\mathcal{U}_t$, $t \in T$, через $\bigvee\limits_t \mathcal{U}_t$ обозначается покрытие, элементы которого суть всевозможные непустые пересечения $\bigcap\limits_{t\in T} U_{k_t}$ с $U_{k_t} \in \mathcal{U}_t$. Положим

$$Z_{F_n,\mathcal{U}} := \sum_{U\in\mathcal{U}} e^{\sup\limits_{x\in U} \sum\limits_{g\in F_n} f(\phi_g x)}. \tag{17}$$

$$P(f) := \sup_{\mathcal{U}} \lim_{n\to\infty} \frac{Z_{F_n,\mathcal{U}}}{\#F_n}, \tag{18}$$

где $\sup\limits_{\mathcal{U}}$ берётся по всевозможным конечным покрытиям пространства X. Такое определение, в отличие от (15), (16), уже не связано с какими-то специфическими фазовым пространством и групповым действием. В то же время для бернуллиевской ДС оно приводит к тому же $P(f)$. (Различия между (17)), (18) и (15), (16) в основном сводятся к тому, что для бернуллиевской ДС используется только одно покрытие

$$\mathcal{U} = \{U_a;\ a \in A\}, \qquad \text{где } U_a := \{\xi : \pi_0(\xi) = a\}; \tag{19}$$

заметим, что при этом

$$\mathcal{U}_{F_n} = \{U_\alpha;\ \alpha \in A^{F_n}\}, \qquad \text{где } U_\alpha := \{\xi;\ \xi|F_n = \alpha\},$$

так что прежние $\xi_\alpha \in U_\alpha$. Оказывается, что в данном случае на $\mathcal{U}$ из (19) как раз и достигается фигурирующая в (18) верхняя грань $\sup\limits_{\mathcal{U}}$. Кроме того, в правой части (15) фигурируют произвольно выбранные $\xi_\alpha \in U_\alpha$, а в (17) в показателе берётся верхняя грань по всем таким ξ_α; оказывается, что для данных ДС и $\mathcal{U}$ это не меняет предела $\dfrac{1}{\#F_n} \ln Z_{F_n,\mathcal{U}}$.)

Мы получили некий аналог «свободной энергии на одну частицу». Теперь займёмся аналогом (11). $\sum p_i \ln p_i$ —это, конечно, взятая с обратным знаком энтропия[50] распределения вероятностей $(p_1, \ldots, p_N)$. Аналогом последнего для общей ДС является инвариантная нормированная мера μ, а аналогом энтропии является упомянутая в *б* энтропия h_μ. Аналогом же (средней) энергии, приходящейся на одну частицу, является $-\int_X f d\mu$ (знак «минус» вызван «минусом» в определении f). Итак, аналогом (11), взятым с обратным знаком, является

$$h_\mu + \int_X f d\mu. \tag{20}$$

Для частного случая ДС Бернулли можно было бы более детально проследить переход от (11) к (20), аналогично тому как это было сделано для $P(f)$. Но для $P(f)$ это давало эвристическую мотивировку определения (которое иначе казалось бы «взятым с потолка»), в чём нет нужды для обоих слагаемых в (20). (На самом деле нечто в этом роде можно было бы привести в связи с опущенным в *б* определением h_μ. Я не стал этого делать, поскольку для ДС с классическим временем определение h_μ достаточно широко известно, а переход в определении к общему случаю является непосредственным.)

После всего сказанного читатель, вероятно, найдёт естественной следующую теорему (которую, однако, всё же надо доказывать, и это отнюдь не просто):

$$\sup_\mu \Big(h_\mu + \int_X f d\mu \Big) = P(f), \tag{21}$$

где верхняя грань берётся по всем инвариантным нормированным мерам рассматриваемой топологической ДС. В отличие от простого случая системы с конечным числом состояний, верхняя грань не всегда достигается, а если достигается, то не всегда на единственной мере. Если верхняя грань достигается, то соответствующие меры называют равновесными мерами (а часто также и состояниями равновесия, опять-таки используя слово «состояние» в смысле статфизики, а не теории ДС). Соотношение (21) называют «вариационным принципом для топологического давления». Изучение соответствующих вопросов составляет предмет так называемого «термодинамического формализма» для ДС.

[50] В теории информации естественно использовать не натуральный, а двоичный логарифм. Но в статфизике, как и в более аналитических математических вопросах, используют натуральный логарифм, от чего соответствующие величины только умножаются на некоторый постоянный множитель.

Я отмечу здесь только одно. В случае ДС Бернулли с $G=\mathbb{Z}^n$ существование равновесной меры доказано для любой непрерывной f, но при этом имеется существенное различие между случаями $n=1$ и $n>1$. В первом случае равновесная мера для гёльдеровской f единственна, а во втором —не обязательно. Для решётчатой системы неединственность равновесной меры отвечает известному (не только людям, но и животным[51]) физическому явлению —фазовому превращению.

Для ДС с классическим временем основы термодинамического формализма в духе только что намеченного подхода были заложены П. Уолтерсом и Д. Рюэллем в начале 70-х гг.; в частности, они доказали вариационный принцип. Для Рюэлля это было тем более естественно, что он ещё раньше много занимался математическими вопросами статистической физики. Поэтому он был также первым или одним из первых, кто стал распространять эту теорию на действия $\mathbb{Z}^n$. Переход к общим аменабельным G был осуществлён А. М. Стёпиным и А. Т. Таги-заде в [39].

Имеется другой подход к выделению и исследованию «интересных» мер, предложенный для ДС с классическим временем Я. Г. Синаем тоже около 1970 г. [40] (причём он сразу отметил, что он годится и для неклассического времени, и в виде примера указал, что для ДС Бернулли так можно получить меры, возникающие в статфизике). Соответствующие меры называются «гиббсовскими». Гиббсовская мера для ДС $\{\phi_g;\ g\in G\}$ в компакте X строится по заданным нормированной инвариантной мере μ_0 и функции $f\in L^\infty(X,\mu_0)$. По этим данным строится последовательность мер μ_n, абсолютно непрерывных относительно μ_0 с «плотностью» (т. е. производной Радона-Никодима)

$$\frac{e^{\sum_{g\in F_n} f(\phi_g x)}}{\int_X e^{\sum_{g\in F_n} f(\phi_g y)} d\mu_0(y)}.$$

Гиббсовские меры —это предельные точки последовательности мер μ_n (в смысле слабой сходимости мер). Они не обязательно инвариантны[52]. Но если гиббсовская мера является не предельной точкой, а пределом, то она инвариантна. Инвариантные гиббсовские меры являются равно-

[51]Правда, животным оно известно для непрерывной системы (вода), а с фазовым превращением в решётчатых системах познакомились только люди, когда стали изучать магнитные и электрические явления в кристаллах.

[52]В статфизике меры, не являющиеся трансляционно инвариантными, могут быть вполне естественными : достаточно представить себе, что в одном полупространстве имеется одна фаза, а в другом —другая. Это столь же реально, как и тот случай, когда всё пространство заполнено одной фазой и соответствующая мера трансляционно инвариантна.

весными, обратное же не обязательно. Для ДС с классическим временем и гиперболическим поведением траекторий обратное имеет место для «хороших» f.

При исследовании равновесных и гиббсовских мер ДС с гиперболическим поведением траекторий используется приём «кодирования», позволяющий в некотором смысле представить рассматриваемую ДС как подсистему бернуллиевской ДС. Буквально подсистема последней была бы инвариантном подмножеством A в соответствующем Ω; в топологическом контексте естественно рассматривать замкнутые A. Оговорка «в некотором смысле» связана с тем, что такое A нульмерно, так что системы с фазовым пространством бо́льшей размерности никак не может быть топологически эквивалентной ограничению $\{\phi_g|A\}$ ДС Бернулли на A. Но она вполне может быть факторсистемой последней, т. е. получаться из неё при факторизации по некоторому отношению эквивалентности, инвариантному относительно ДС. В удачных случаях A и факторизация допускают достаточно подробное описание, причём при факторизации точки A хотя и «склеиваются» друг с другом, но это происходит не очень часто —«большинство» точек ни с чем не склеивается. Этот приём (когда он срабатывает) позволяет сводить ряд вопросов об исследуемой ДС к вопросам, относящимся к $\{\phi_g|A\}$. Успех, конечно, зависит от того, удастся ли найти «удачное» кодирование. Для систем с наиболее чётко выраженным гиперболическим поведением траекторий (системы Аносова и базисные гиперболические множества) удачное кодирование связано с так называемыми марковскими разбиениями, которые для гиперболических автоморфизмов двумерного тора были введены Р. Адлером и Б. Вейссом, для систем Аносова —почти одновременно Я. Г. Синаем и затем в усовершенствованном виде, пригодном также и для базисных гиперболических множеств —Р. Боуэном [41].

Синай и Боуэн не только построили новые инвариантные меры, но и специально выделили те случаи, когда эти меры представляют особый интерес. Впоследствии их подход[53] переносился на другие типы систем с несколько (ненамного) «ухудшенной» гиперболичностью —биллиарды, псевдоаносовские гомеоморфизмы поверхностей, аттракторы типа аттрактора Лоренца. Что же касается действий аменабельных групп, то сколько-либо продвинутых применений этого подхода за пределами ре-

[53]Собственно, формально их подходы не совсем совпадают —у Боуэна вообще нет общего понятия гиббсовской меры (которое само по себе, как и понятие равновесной меры, не связано с кодированием), а он просто называет так те меры, которые строит для рассматриваемых им систем. Но с более широкой точки зрения это всё-таки один подход.

шётчатых систем мне не известно.

Хотя выше почти всё время отмечалось особое положение аменабельных групп, на самом деле работы по эргодической теории (или близким вопросам статфизики), где группы не аменабельны, не исчерпываются теми немногими работами такого характера, которые упоминались (или подразумевались) выше. Имеется ряд работ, в которых, в отличие от того, что делается для аменабельных групп, используется какая-то дополнительная структура. Например, могут фиксироваться образующие элементы группы[54], какое-нибудь разбиение или покрытие фазового пространства. (Ведь и для $\mathbb{Z}^n$, рассматривая бернуллиевскую ДС, мы начали с использования фиксированного покрытия (оно же в данном случае и разбиение) (19) —вернее, там это было настолько естественно, что мы вначале даже не отмечали этого специально. О других разбиениях мы заговорили только при переходе к более общим групповым действиям.) Однако пока что было бы затруднительно охарактеризовать исследования такого рода какими-то общими чертами.

Новых обзоров по теме п. 1.3 я не знаю. О ситуации в начале рассматриваемого периода см. [42].

1.4. Бифуркации.

За последнюю четверть века преобразился облик и изменилась роль одного из разделов теории гладких ДС —теории бифуркаций. Буквально это слово означает «раздвоение»; в этом смысле оно употребляется, например, в анатомии («бифуркация бронха»). В математике этот термин употребляется в более широком смысле —для обозначения качественных изменений рассматриваемых объектов при изменении параметров, от которых эти объекты зависят. Более точных общих формулировок здесь дать нельзя, потому что рассматриваемые объекты и интересующие исследователей свойства этих объектов могут быть самыми различными. Точные формулировки относятся к тем или иным конкретным задачам.

Первоначально в математике о бифуркациях говорили применительно к фигурам равновесия вращающейся жидкости. Речь идёт о задаче: при каких условиях тело, состоящее из однородной жидкости, на частицы которой действуют только силы их взаимного притяжения по закону тяготения Ньютона, может вращаться как твёрдое тело? Соот-

[54] Уже упоминавшийся выше изменённый способ осреднения по группе, предложенный Р. И. Григорчуком, формально зависит от выбора её образующих. Зависит ли от этого результат, в общем случае неизвестно (но в эргодическом случае не зависит).

ветствующую фигуру и называют равновесной. Как точные решения этой задачи известны только некоторые эллипсоидальное фигуры (эллипсоиды Маклорена и Якоби) и кольца, но кроме того известно, что имеются другие фигуры, близкие к названным. Эти фигуры обнаружены с помощью бифуркационных соображений —начинают с эллипсоидальной фигуры равновесия E_λ, непрерывно зависящей от некоторого параметра λ, от которого зависит исследуемая задача; оказывается, что когда λ проходит некоторое (как говорят, «бифуркационное») значение λ_0, то возникает новая (уже не обязательно эллипсоидальная) фигура равновесия E'_λ, которая тем ближе к E_λ, чем ближе λ к λ_0, так что можно сказать, что семейство фигур E'_λ «ответвляется» при $\lambda = \lambda_0$ от семейства E_λ. В этом случае слово «бифуркация» употребляется в смысле, достаточно близком к буквальному —при увеличении параметра E_λ как бы раздваивается на E_λ и E'_λ. Аналитически вопрос сводится к исследованию некоторого интегрального уравнения[55], и поэтому естественно, что «бифуркационная» терминология стала применяться вообще при исследовании интегральных уравнений, зависящих от параметра. А поскольку видным деятелем в теории фигур равновесия вращающейся жидкости был А. Пуанкаре, то не удивительно, что он перенёс эту терминологию в качественную теорию обыкновенных дифференциальных уравнений, при этом он стал применять её в более широком смысле, для любых качественных изменений.

По инициативе Р. Тома вместо бифуркаций говорят о «катастрофах». Это слова тоже не надо понимать буквально. Приведу примеры, действительно серьёзно рассматривавшиеся в работах по «теории катастроф»: если нарушается устойчивость упругой конструкции, то это, скорее всего, катастрофа, но если солнечные лучи, преломляясь в воде, образуют на дне ручья яркие линии —это едва ли кого-нибудь волнует, кроме разве детей, видящих это впервые. Как возможный (но не доведённый до математической модели[56]) пример «катастрофы» упоминают о резком изменение в течении болезни, после которого больной почти на глазах начинает поправляться; это если и катастрофа, то только для бактерий.

Если катастрофа —синоним бифуркации, то можно спросить, какой термин удачнее. Как ясно из сказанного, ни тот, ни другой не приходится понимать буквально. Но «катастрофа» —слово обычного (литератур-

[55]Довольно необычного: в нём подинтегральное выражение известно, а неизвестной является область интегрирования.

[56]Точнее, математические модели подобного явления предлагались, но, кажется, они не были связаны с «теорией катастроф» и исследовались численно.

ного и разговорного) языка, имеющее определённый и притом весьма эмоционально окрашенный смысл, а о первоначальном значении слова «бифуркация» знает намного меньше людей, и даже у них с ним едва ли связаны какие-то эмоции. Поэтому для науки более подходит нейтральное слово «бифуркация», а для массовых изданий —«катастрофа».

Весьма содержательное математические идеи Р. Тома об особенностях гладких отображений и бифуркациях критических точек функций (он продолжал пионерские работы Х. Уитни, но пошёл значительно дальше) и по содержанию, и по времени заметно выходят за пределы данной брошюры; последующие работы в этой области тоже выходят (если не по времени, то по содержанию). Их непосредственные применения в теории динамических систем таковы. Рассматриваются системы, у которых одни переменные (скажем, y; это, вообще говоря, не число, а вектор) изменяются быстро, а другие (скажем, x) —медленно (такие системы действительно встречаются и являются достаточно важными); предполагается, что при фиксированным x для «быстрых» переменных y получается градиентная система

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\nabla f(x, y)$$

(так тоже бывает, но уже реже), вследствие чего $y(t)$ быстро приближается к устойчивому положению равновесия последней, т. е. к критической точке f как функции от x, являющейся локальным минимумом. Далее движение происходит таким образом, что $x(t)$ постепенно изменяется, при этом изменяется и соответствующая критическая точка функции $y \mapsto f(x, y)$, с каковой почти точно совпадает $y(t)$. В один прекрасный момент с критической точкой происходит бифуркация, — скажем, она сливается с другой критической точкой и исчезает, после чего $y(t)$ должно устремиться к другой критической точке. Ясно, что в такой ситуации результаты о бифуркациях критических точек функций весьма существенны для понимания качественной картины, но на данном уровне приближения речь идёт только о довольно тривиальной более или менее непосредственной ссылке на эти результаты. Далее утверждается, что и не зная дифференциальных уравнений, а только предполагая, что они имеют описанный характер, и наблюдая изменения в реальной «физической» системе[57], можно сделать качественные выводы об особенностях функции f и тем самым понять наиболее существенные

[57] Она может относиться и не к физике, а, скажем, к экономике, биологии, даже, как говорят, к психологии или социологии. Для систем, относящихся к физике, обычно более или менее известны их математические модели или по крайней мере общий

свойства данной системы. В конечном счёте речь идёт о том, что предлагается некоторая гипотетическая интерпретация экспериментальных данных. Никаких иных оснований не приводится (легко поверить, что имеются быстрые и медленные переменные, но какие экономические, психологические, социальные законы позволяют думать, что быстрые переменные должны двигаться по градиенту какой-то функции? если так, то она, видимо, сама имеет какой-то экономический, биологический, психологический, социологический смысл?) Всё это имеет подозрительно натурфилософский стиль[58], а натурфилософия фактически устарела уже при Ньютоне, хотя процветала ещё более века[59].

В брошюре В. И. Арнольда [43] имеется несколько страниц, где всё это описано несколько подробнее, но со столь же критических позиций, с которых написаны предыдущие строки[60]. Там же имеются литера-

---

характер последних. В этих случаях применения «теории катастроф» не вызывают сомнений.

[58]Конечно, психологические, экономические или социологические вопросы в старину к натурфилософии не относили, как явствует из самого её названия. Но я и говорю только о стиле.

[59]Раз уж зашла об этом речь, отмечу ещё следующее. Имеется известный приём иллюстрации взаимоотношений между логическими понятиями —круги Эйлера-Венна. Скажем, мы хотим проиллюстрировать взаимоотношение между понятиями «домашние животные», «млекопитающие», «кошки», «собаки». Рисуем два частично пересекающихся «круга» (которые могут быть и овалами, если их удобнее будет рисовать) —«млекопитающие» и «домашние животные», внутри первого рисуем два круга —«кошки» и «собаки», которые не пересекаются друг с другом, но оба частично пересекаются с «домашними животными». При этом никто не думает, будто бы множество животных в каком-то смысле двумерно и что четыре интересующих нас множества суть и вправду круги или овалы. Не могут ли иногда те рисунки, которые рисуют «катастрофисты», интерпретироваться как какие-то условные изображения каких-то взаимоотношений, не обязательно связанных с теми конкретными моделями, о которых при этом говорят, вроде того как для кругов Эйлера-Венна несущественно, что это именно круги и притом на плоскости? Это можно предполагать, если фактическая сторона дела в экономических и прочих вопросах действительно такова, как описывают «катастрофисты», а модели в этих случаях сомнительны, как говорят их критики. Том как раз и полагал, что теория катастроф даёт нам некий новый язык форм и что более сложные системы и взаимоотношения между ними как бы строятся из элементарных блоков, описываемых согласно сказанному выше посредством отдельных систем с отдельными особенностями из некоего определённого списка. (Кстати, сам этот список оказался неполным.) Но если нет оснований считать, что изучаемая физическая система действительно такова, как сказано (т. е. с медленными и быстрыми переменными, причём последние, часть которых нам неизвестна, изменяются по градиенту), то как ещё могли бы интерпретироваться эти блоки и рисунки?

[60]Основное содержание этой брошюры, конечно, состоит не в критическом обсуждении теории катастроф, а в изложении понятий теории особенностей, её прило-

турные ссылки. С иных позиций написана популярная статья [45], где отношение к нефизическому использованию «катастрофической» идеологии положительное. Наконец, в книге [46] авторы на базе подробно и элементарно изложенных в первой её половине сведений из теории особенностей рассмотрены разнообразные приложения теории катастроф —от не вызывающих принципиальных возражений до куда более «натурфилософских» (по стилю).

Из сказанного не следует, будто теория особенностей гладких отображений и бифуркаций критических точек функций мало что дала для теории ДС, а там, где дала, это получалось путём довольно непосредственного использования достижений топологов. Значительным оказалось идейное влияние первой теории на вторую, провозвестником которого около 1970 г. выступил В. И. Арнольд. Надо сказать, что Том с самого начала утверждал, что та «теория катастроф», о которой говорилось выше, —это только первая, элементарная часть некоей более обширной теории (вот она-то уж точно будет универсальной). Но это общее указание им никак не конкретизировалось, и Арнольд отправлялся не от этого неопределённого указания (заклинания), а от конкретного фактического содержания теории особенностей гладких отображений. Он никогда не претендовал на универсальность соответствующего подхода (к моменту его выступления уже были известны факты, исключающие таковую), но резонно указывал, что он имеет довольно широкую, хотя и не безграничную, область применений, а что касается её границ, то в некоторых случаях их даже можно было уже тогда довольно чётко очертить. Своего рода первым манифестом нового веяния была его статья [47], в которой объяснялось, что в теорию локальных бифуркаций ДС можно естественным образом перенести ряд понятий, первоначально возникших в теории особенностей или вообще в гладкой топологии —коразмерность, стратификация, трансверсальность, универсальные и версальные семейства, модули и их число, бифуркационные диаграммы, конечная определённость.

Я немного остановлюсь только на одной (и, вероятно, самой простой) из пропагандировавшихся в [47] идей: вырождения коразмерности k неустранимым образом встречаются только в k-параметрических семействах[61], поэтому целесообразно рассматривать такие положения

жений, её истории и ранней истории теории бифуркаций ДС. Ещё меньше о теории катастроф и больше об остальном сказано в его обзоре [44].

[61]Это значит, что существуют такие k-параметрические семейства ДС, что и для них, и для всех достаточно близких к ним семейств при некотором значении параметра в соответствующей ДС имеется вырождение рассматриваемого типа. («Бли-

равновесия в соответствующем бифуркационном контексте[62]. (Впрочем, могут быть и другие причины появления вырождений довольно высокой коразмерности, —прежде всего, наличие симметрий. Множество положений равновесия, имеющее большую коразмерность в классе «общих» ДС, может быть множеством положений равновесия «с симметриями», коразмерность которого в классе ДС с соответствующими симметриями невелика или даже равна 0. Но всегда ли мы можем быть уверены в точности этих симметрий, особенно если они не являются следствиями законов природы? Не могут ли симметрии в действительности слегка нарушаться, и не стоит ли поинтересоваться, что происходит при таком нарушении?[63]) Поэтому теория локальных бифуркаций —не какое-то внешнее дополнение к локальной качественной теории, а существенная её часть. Уже одно это изменение точки зрения (пусть и не совсем новое, но впервые чётко намеченное в столь широких масштабах) существенно повлияло на облик не только теории бифуркаций, но и всей локальной качественной теории.

Разумеется, в [47] могла быть реализована только часть намеченной программы (хотя ко времени написания [47] группой Арнольда уже была проведена определённая работа в этом направлении. Кроме того, в [47] было указано, как в новую теорию входят ранее полученные значительные результаты[64].) После публикации [47] как группой Арнольда, так и другими математиками была проведена большая работа по конкретной реализации нового подхода. Для потоков на плоскости «типичные» локальные бифуркации[65] в двух- и трёхпараметрических семействах изучены почти с такой же степенью подробности, с какой раньше были изучены локальные бифуркации в однопараметри-

---

зость» понимается как близость в смысле C^m, где m зависит от того конкретного типа вырождений, о котором идёт речь.) Если же имеется $(k-1)$-параметрическое семейство, то путём сколь угодно малого его возмущения можно получить семейство ДС, ни одна из которых не имеет вырождения данного типа.

[62]Несомненно, что авторы «классических» работ (в понятных обозначениях, появившихся в период $(-\infty, t_{[47]})$) это «чувствовали» (как «чувствовали» они и многое другое из новой парадигмы). Но они давали на сей счёт разъяснения (если вообще их давали) только применительно к интересовавшим их задачам и к рассматривавшимся при этом случаям малой коразмерности. По большей части это как-то проплывало мимо сознания более широких кругов.

[63]Некоторая работа такого рода проводилась как в специальном контексте теории катастроф (информацию см. в [46]), так и вне него.

[64]Частично этот материал более детально изложен в конце учебника Арнольда [48].

[65]Т. е. бифуркации, относящиеся к объектам локальной качественной теории — положениям равновесия и периодических траекторий потоков, неподвижным и периодическим точкам диффеоморфизмов.

ческих семействах. В случаях бо́льшей размерности картина до сих пор не столь исчерпывающая, но всё же довольно полная, потому что вопрос о локальных бифуркациях в таких семействах в значительной степени сводится к аналогичному вопросу для потоков на плоскости[66].

Наряду с локальными бифуркациям можно говорить о «глобальных» бифуркациях, меняющих фазовую картину в целом и не локализованных возле положений равновесия или периодических траекторий. В большинстве случаев правильнее бы было говорить о «полулокальных» бифуркациях, имея в виду, что при исследовании таковых мы обращаем внимание не только на то, что происходит при возмущении возле какого-то «локального» объекта, но на то, что происходит в некоторой области фазового пространства («вдали» от локального объекта, если таковый вообще играет какую-то роль), обычно в некоторой окрестности некоторого инвариантного множества невозмущённой системы, не сводящегося к положению равновесия и т. п. Однако при этом, вообще говоря, не идёт речи о полном контроле за всем фазовым пространством, так что название «глобальная бифуркация» является, пожалуй, несколько преувеличенным. С другой стороны, в классических работах А. А. Андронова и его сотрудников (восходящих ещё к довоенным временам, хотя частично опубликованных позднее) рассматривались изменения всего «фазового портрета» потока на всей фазовой плоскости, т. е. самые настоящие глобальные бифуркации. Впрочем, хотя это восходит к упомянутым старым вопросам, по-видимому, только в последние 25 лет или около того для потоков на плоскости окончательно выяснилось, что надо добавить к прежним сведениям о локальных или полулокальных бифуркациях, чтобы получить полное описание изменений глобальной качественной картины при бифуркациях в типичных однопараметрических семействах.

Изложение результатов, достигнутых по этим (локальным и полулокальным) вопросам к середине 80-х гг., имеется в [49]; более новых публикаций со сколько-либо обширными сводками результатов я не знаю. Для «типичных» двух- и трёхпараметрических потоков на плоскости переход от локальных и полулокальных бифуркаций к «настоящим» глобальным, кажется, не исследован. Для таких потоков после [49] были подробно исследованы бифуркации так называемых «полициклов», обоб-

[66]В ряде случаев благодаря использованию центрального многообразия автоматически получается полная редукция к потокам на плоскости, но иногда центральное многообразие имеет размерность 3 или 4; в этом случае ситуация сложнее. Всё же искусственным образом удаётся произвести некоторую редукцию к двумерному случаю, хотя и не столь полную.

щающие бифуркации замкнутых сепаратрисс [50].

Другое значительное изменение в теории бифуркаций связано с исследованием таких полулокальных (а иногда и глобальных) бифуркаций в размерностях > 2 для диффеоморфизмов и > 3 для потоков, которые связаны со сложным поведением траекторий[67]. Это —принципиально новое направление. Ему уделено должное внимание в [49], однако здесь последующее развитие представляется более значительным. К сожалению, приходится повторить сказанное по другому поводу: более новых обзоров сравнимой полноты нет.

К началу 70-х гг. динамические системы со сложным поведением траекторий более или менее успешно исследовались в тех случаях, когда это поведение определялось гиперболичностью. Уже тогда, а тем более теперь гиперболическая теория в какой-то степени приобрела известную завершённость, хотя в ней остаются нерешённые задачи и работы на эту тему появляются и поныне. Баланс работ определённо сместился в сторону бифуркационной тематики. Это связано с открытием комплекса явлений, связанных с нетрансверсальными гомоклиническими траекториями. Он настолько обширен и разнообразен, что его изучение далеко от завершения хотя бы в первом приближении. Первым обратил внимание на принципиально новые бифуркационные явления, так или иначе связанные с нетрансверсальными гомоклиническими траекториями, Л. П. Шильников в совместной с Н. Г. Гавриловым работе 1972 г. [51] (а отчасти в 1970 г.). Конкретно там были обнаружены четыре различных типа бифуркаций, из которых один происходит на границе систем с простой динамикой —систем Морса-Смейла. В этом случае дано символическое описание возникающих гиперболических множеств и были указаны вторичные бифуркации, при которых рождаются и исчезают устойчивые периодические траектории. Чем ближе значение параметра к критическому, тем большее число таких траекторий может появиться[68].

---

[67] Исследовались, конечно, и полулокальные бифуркации, более или менее непосредственно аналогичные соответствующим бифуркациям для потоков на плоскости, которые с таким поведением траекторий не связаны. Их исследование —необходимая составная часть теории (и о них тоже говорится в [49]), но для нас они не столь интересны.

[68] В [51] рассматривался трёхмерный поток (что фактически покрывает и случай двумерного диффеоморфизма). Многомерные аналоги ситуации из [51] были рассмотрены в [52], [53], [54], причём в двух последних работах исследование идёт дальше аналогов результатов [51]. В [51], как и в ряде других работ в этой области, предполагалось, что отображение последования для исходной периодической траектории гладко сопряжено с линейным; в [52], [53], [54] такого предположения не делается.

После этого наметилась возможность изучения сложного поведения траекторий в некоторых ситуациях, находящихся за пределами «чистой» гиперболической теории. Едва ли будет преувеличением сказать, что в настоящее время теория бифуркаций стала основным (хотя и не единственным) источником примеров ДС со сложным поведением траекторий, в каком-то смысле выдерживающим малые возмущения (если не все, то «многие»). Для контраста можно отметить, что в предшествующий период гиперболические множества были открыты вне связи с теорией бифуркаций; в основном то же относится и к упоминаемому ниже аттрактору Лоренца. Он был обнаружен в результате исследования соответствующей ДС в широком диапазоне значений параметра, от которого она зависит, и при этом были отмечены различные происходящие в ней бифуркации, в том числе и связанные с аттрактором Лоренца, но его свойства рассматриваются безотносительно к бифуркациям[69].

Примерно тогда же Ш. Ньюхаус (вначале —только для двумерного диффеоморфизма) обратил внимание на нетрансверсальные гомоклинические траектории гиперболических множеств, не сводящихся к периодическим траекториям [56]. Позднее он назвал гиперболическое множество A (обычно локально-максимальное[70] и топологически транзитивное), которое не сводится к периодическим траекториям и у которого имеется нетрансверсальная гомоклиническая траектория (так что неустойчивое и устойчивое многообразия некоторой траектории из A где-то касаются друг друга), диким гиперболическим множеством (а о существовании в ДС такого множества говорят как о дикой гиперболичности). Определение «дикое» намекает на тот факт, что с таким множеством связан ряд неожиданных бифуркационных явлений. Сперва Ньюхаус обнаружил пример, в котором дикая гиперболичность сохраняется при любом малом возмущении[71], хотя само это множество

[69] Отчасти сказанное относится и к весьма важному аттрактору Эно, введённому независимо от теории бифуркаций. Однако со временем он оказался тесно связанным с последней: во-первых, он возникает (и играет важную роль) при некоторых бифуркациях; во-вторых (исторически это обнаружилось раньше), описание его свойств получается при некоторых значениях параметров, от которых он зависит; нет сомнений, что при других значениях параметров свойства могут быть другими, хотя (пока?) это подробно не исследовано. Я не говорю здесь об аттракторе Эно единственно по той причине, что о нём говорится у Йоккоза [1]; см. также его доклад на семинаре Бурбаки [55].

[70] Это значит, что A является максимальным инвариантным множеством в некоторой своей окрестности. Локально-максимальные инвариантные множества (не обязательно гиперболические) называют также изолированными.

[71] В этом пункте я скорее описываю результаты, чем даю точные формулировки. В частности, малость возмущения понимается в смысле некоторого C^r, но я ничего

A —вроде канторового, так что между устойчивыми многообразиями его траекторий имеются не содержащие таких многообразий «полосы», куда, казалось бы, можно при малом возмущении «убрать» все дуги неустойчивых многообразий траекторий из A, имеющие «неподходящие» направления (эти многообразия ведь тоже «не идут сплошняком»). В A плотны периодические траектории, и можно показать, что у них при всюду плотном множестве значений параметров имеются нетрансверсальные гомоклинические траектории. Таким образом, Ньюхаус обнаружил, что в пространстве ДС имеются области, в которых всюду плотны ДС с нетрансверсальными гомоклиническими траекториями. Теперь их называют «областями Ньюхауса». В понятном смысле говорят также об «областях Ньюхауса» в «типичных» конечнопараметрических семействах ДС[72].

Дальнейшие исследования были направлены как на обнаружение областей Ньюхауса в тех или иных ситуациях, так и на исследование свойств ДС из таких областей. Оба вопроса были отчётливо поставлены в [57], где утверждалось, что: а) при определённых условиях вблизи системы с гомоклиническим касанием существуют области Ньюхауса; б) в таких областях существуют ДС со счётным множеством устойчивых периодических траекторий, причём таких ДС в некотором смысле «много». (Очевидно, само по себе это сильнее и удивительнее, чем обнаруженное в [51] увеличения числа таких решений при приближении параметра к бифуркационному значению, но если сопоставить [51] и утверждение «а», то это уже не покажется таким уж удивительным).

После Ньюхауса бифуркации, связанные с нетрансверсальными гомоклиническими траекториями, стали популярны во всём мире. Однако в [57] утверждение «а» было скорее угадано (тогда как «б», видимо, можно считать более или менее доказанным, хотя, как выяснилось позднее, и при излишне ограничительных предположениях). Очень существенный прогресс был достигнут в фундаментальной работе Ньюхауса [58] (см. также дополняющую её статью К. Робинсона [59]). После [58], [59] описанные выше утверждения для двумерных диффеоморфизмов можно считать в основном доказанными и даже улучшенными благодаря снятию излишних условий (хотя, по-видимому, некоторые из более поздних публикаций можно квалифицировать как окончательную доработку во-

не говорю об этом r (в различных случаях оно может быть различным)

[72] Должен предупредить, что в точных формулировках, относящихся к областям в пространстве ДС и к областям в семействах, имеются некоторые различия. Приводя только приблизительное описание этих результатов, я игнорирую эти различия как «технические».

просов, восходящих к середине 70-х гг.). Работы [60] и [61] посвящены некоторым многомерным аналогам той же группы вопросов (ослабление условий [60] достигнуто в [62]).

Параллельно был исследован ряд других вопросов о нелокальных бифуркациях. Сложность качественной картины в подобных задачах делает сомнительным, чтобы здесь можно было бы получить полное описание этой картины при фиксированных значениях параметра и полное описание её изменения при изменении параметра. Часто описание, не вполне полное, даётся только для некоторого множества значений параметра; это, конечно, особенно интересно, если это множество оказывается в каком-то смысле «значительным». В этом отношении современные работы часто принципиально не могут претендовать на ту полноту описания качественной картины, которая во многих случаях достигнута в теории потоков на плоскости или при исследовании систем с равномерно гиперболическим поведением траекторий. Естественно, при описании изменений качественной картины теперь нередко речь может идти только об изменении каких-то существенных её особенностей. В этом отношении результаты исследования сложных бифуркаций не имеют той полноты, какая была свойственна теории во времена Андронова. Но это, по-видимому, связано с существом дела. Некоторый дефект современного состояния дел скорее состоит в отсутствии чётких общих формулировок, какие черты качественной картины привлекают наше внимание. Это указывается в конкретных задачах, но каждый раз по-своему. Похоже, что для обобщающих формулировок пока не пришло время.

Информация о состоянии теории нелокальных бифуркаций в середине 80-х гг. имеется в [49]. В докладе Йоккоза [1] приведено несколько более новых результатов и даны литературные ссылки. Особо обращаю внимание на (цитированную там) книгу Ж. Палиса и Ф. Такенса [63]. Дополнительно укажу несколько новых работ группы Л. П. Шильникова, потому что работы этой группы (в том числе и прежние) пока недостаточно известны[73].

В названии статьи [64] фигурирует бифуркационное явление, при котором некоторая периодическая траектория неограниченно удлиняется и «в пределе» исчезает, причём при этом от неё не остаётся видимого следа вроде петли сепаратриссы или чего-нибудь в этом роде (она

[73]В частности, в [63] имеется ссылка только на одну раннюю работу Шильникова, написанную до его основных «бифуркационных» работ (но уже выходящую за рамки равномерной гиперболичности).

«бесследно исчезает в голубом небе», откуда и название «катастрофа голубого неба», данное (вначале, видимо, в шутку) таким бифуркациям). Для двумерных потоков такое явление (без указанного названия) было открыто Ф. Фуллером и подробнее изучено (уже под придуманным к тому временем названием) В. С. Медведевым. В [64] же эта бифуркация рассмотрена в трёхмерном случае. Она имеет коразмерность 1, т. е. является «типичной», и происходит при пересечении некоторой гиперповерхности в пространстве всех систем. Одновременно описывается и другая бифуркация коразмерности 1, быть может более интересная.

Представляет очевидный интерес вопрос: каким образом в гладкой системе дифференциальных уравнений может появиться сложно устроенный аттрактор[74]? Этот вопрос связан со следующим наблюдением: до сих пор ни в одной прикладной задаче не обнаружены аттракторы типа базисных множеств потоков с аксиомой А (не сводящиеся к периодическим траекториям). Естественно поэтому попытаться построить такие аттракторы бифуркационными методами. В данной работе в этом направлении решается следующая задача: как через простую бифуркацию гладкого векторного поля можно из простого векторного поля (Морса-Смейла) получить поле со странным аттрактором[75]? В ра-

[74]Это слово происходит от *attract* —притягивать, привлекать, и употребляется как название множеств, которые как бы притягивают к себе близкие траектории. В литературе встречаются различные формализации этого свойства «притягивать траектории». В настоящей брошюре по большей части под аттрактором понимается компактное инвариантное множество A, которое устойчиво по Ляпунову (т. е. для любой его окрестности V имеется такая окрестность W, что ни одна положительная полутраектория, начинающаяся в W, никогда не выйдет из V) и таково, что все положительные полутраектории, начинающиеся в некоторой окрестности A, с возрастанием времени неограниченно приближаются к A. (Это почти дословная перефразировка принадлежащего А. М. Ляпуновым определения асимптотической устойчивости положения равновесия.)

[75]Насколько я могу судить, «странные» и «хаотические» аттракторы —это не точные термины, а несколько неопределённые названия (ср. с «фракталами» Мандельброта), к тому же несущие в себе оттенок эмоционального отношения, связанного с первоначальным удивлением. Под «странными аттракторами» обычно понимаются аттракторы (т. е. множества, как бы притягивающие траектории), устроенные в каком-то смысле «сложно» и «странно»; они не являются многообразиями или чем-нибудь в этом роде (скажем, не состоят из нескольких «кусков» многообразий). «Хаотический» аттрактор характеризуется «квазислучайным» поведением его траекторий. Ещё в начале 70-х гг. В. М. Алексеев предложил формализовать «квазислучайность» как положительность топологической энтропии. (Но имеются и другие (неэквивалентные) формализации (см. [63]), позволяющие рассматривать и некоторые аттракторы с нулевой энтропией как всё-таки хаотические.) Понимаемые в таком смысле, «хаотичность» и «странность» —не синонимы: аттрактор может быть многообразием и в то же время иметь положительную энтропию; он может иметь нулевую

боте обнаружена и изучена бифуркация коразмерности 1, приводящая к появлению гиперболического странного аттрактора, носитель которого является соленоидом Смейла-Вильямса. Интересно, что при приближении к бифуркационной гиперповерхности соленоид не претерпевает бифуркаций, а длина любой замкнутой траектории в нём стремится к бесконечности.

Другой пример появления странного аттрактора при бифуркации рассмотрен в [65]. Этот аттрактор, существующий в некотором интервале значений параметра возмущения, при всех его значениях содержит некоторое дикое гиперболическое множество, что гарантирует изобилие соответствующих бифуркационных явлений[76].

В [53], [66] показано, что в области Ньюхауса всюду плотны ДС со сколь угодно высокой кратностью седлоузловых периодических траекторий. Опираясь на эти работы, В. Ю. Калошин показал, что в области Ньюхауса имеются ДС со сколь угодно высокой скоростью роста при $T \to \infty$ числа $N_{\mathrm{per}}(T)$ периодических траекторий с периодом $\leq T$. Более того, для любой функции $f(T)$ такие ДС, для которых $N_{\mathrm{per}}(T) \geq f(T)$ при достаточно больших T, образуют в этой области с C^n-топологией (с любым натуральным n) множество второй категории, так что нельзя сказать, что речь идёт о каком-то исключительном явлении. Это даёт ответ на вопрос, возникший около 30 лет назад.

В [67], [68] показано, что в некоторых случаях при наличии негрубого гетероклинического контура возможны бифуркационные явления, похожие на связанные с нетрансверсальными гомоклиническими траекториями.

Ещё одним значительным достижением, связанным с полулокальными бифуркациями, является исследование бифуркаций «аттрактора Лоренца». Последний, в соответствии с его названием, был открыт Э. Лоренцом в результате численного эксперимента с некоторой конкретной системой 3-го порядка, внимание к которой мотивировалось гидродинамическими соображениями. Открытие Лоренца привлекло внимание только примерно 10 лет спустя, причём прикладников (в широком смысле сло-

---

энтропию и в то же время не быть многообразием и вообще быть устроенным более или менее сложно. Другое дело, что большинство встречающихся «странных» аттракторов являются и «хаотическими» (что связано с присущей им некоторой гиперболичностью, пусть и более слабой, чем у «настоящих» гиперболических множеств).

[76] В [63] имеются ссылки на более ранние работы западных авторов, тоже отмечавших возникновение странных аттракторов при некоторых бифуркациях. Обычно это были не равномерно гиперболические аттракторы, а аттракторы типа аттрактора Лоренца, о котором говорится ниже.

ва) и математиков-теоретиков оно заинтересовало по различным причинам. Прикладников оно убедило в реальном существовании странных (или хаотических) аттракторов открытые математиками гиперболические странные аттракторы большинству из них не были известны, поскольку примеров таковых в задачах естественнонаучного происхождения не встречалось. Для математиков же аттрактор Лоренца представляет интерес не как ещё одна демонстрация уже известных возможностей поведения траекторий, а, наоборот, как объект, хотя и близкий по ряду своих свойств (как раз тех, которые произвели особое впечатление на прикладников) к гиперболическим аттракторам, но в то же время отличный от них по другим свойствам (для математиков именно эти тонкости и интересны). Математическая интерпретация результатов Лоренца была начата Д. Рюеллем и Ф. Такенсом в статье под названием «Странный, странный аттрактор». Повторение слова «странный» (помимо того, что оно навеяно фильмом С. Крамера) связано с тем, что: а) данный аттрактор является странным в том смысле, что он имеет динамически сложную структуру траекторий (счётное множество седловых периодических траекторий, континуум устойчивых по Пуассону, и т. д.) и в то же время сохраняется при малых возмущениях (всё это похоже на уже известные в то время равномерно гиперболические аттракторы, которые, однако, многими тоже воспринимались как нечто странное); б) он не являются равномерно гиперболическим (хотя определённая гиперболичность в нём наблюдается); в) в отличие от равномерно гиперболических множеств, его внутренняя структура не остаётся неизменной при малых возмущениях; точнее, она непрерывно изменяется в любом однопараметрическом семействе систем общего положения с таким аттрактором. Значит, если любое качественное изменение считать бифуркаций, то они происходят при всех значениях параметра семейства, причём это явление является «неустранимым» в том смысле, что оно присуще и всем достаточно близким семействам ДС. Первое само по себе не ново, поскольку то же самое имеет место и в давно известном примере семейства потоков на торе, имеющего в координатах $x, y \bmod 1$ вид $\dot{x} = 1$, $\dot{y} = \lambda$. Но в этом случае сколь угодно малым изменением семейства можно обеспечить, чтобы бифуркации происходили только тогда, когда λ принадлежит к дополнению к некоторому открытому всюду плотному множеству (стало быть, с топологической точки зрения бифуркационные значения параметра являются «исключительными»[77]). Второе к моменту появления статьи Рюелля и

[77]Здесь возникает отмеченная по несколько другому поводу А. Н. Колмогоровым

Такенса тоже не было совершенно новым, так как аналогичное явление в другом примере было раньше обнаружено С. Смейлом и Р. Абрагамом[78], но здесь это явление было обнаружено в ином примере[79].

В связи со сказанным, применительно к аттрактору Лоренца под «бифуркациями» понимают не просто изменения его внутренней структуры, а изменения, в каком-то смысле «существенные». Таковы заведомо те бифуркации, при которых аттрактор Лоренца возникает или исчезает, но также и некоторые другие. Конкретное уточнение, какие качественные изменения являются существенными, связано с конкретным описанием самого аттрактора Лоренца и в этом смысле специфически привязаны к определённой ситуации.

Некоторая модель аттрактора Лоренца была предложена Р. Вильямсом. Приняв её, можно изучать внутреннее строение данного аттрактора (включая поведение лежащих в нём траекторий); можно также доказать, что действительно существуют системы третьего порядка с таким аттрактором и что он выживает при малых возмущениях. Однако при этом накладываются такие условия на рассматриваемую систему, которые хотя и могут выполняться для каких-то систем, но не выполняются в исходной системе Лоренца, так что, строго говоря, остаётся неясным, действительно ли Лоренц имел дело с аттрактором, названным его именем.

Эти вопросы были сняты в работе [69]. В ней указаны более широкие условия, гарантирующие существование аттрактора Лоренца. Это условия геометрического характера на некоторое отображение последования. Проверка этих условий для самой системы Лоренца до сих пор отчасти опирается на численный эксперимент, но таковый производился неоднократно, в различных группах и с различными программами, так что результаты не вызывают сомнений[80]. Внутренняя структура

коллизия между топологической и метрической точками зрения: при достаточной гладкости рассматриваемых семейств множество бифуркационных значений параметра всегда имеет положительную меру. Подобные вопросы входят в компетенцию теории КАМ, а применительно к данному примеру —также более специальной теории М. Эрмана и Ж.-К. Йоккоза, на обзорный доклад которого я сослался в самом начале.

[78] Ср. с «принцессой на горошине», ещё ранее описанной Г.-Х. Андерсеном. Она всю ночь пыталась путём приведения себя в общее положение сделать беспокоившие её ощущения исключительными, но это ей не удалось.

[79] Из сказанного об областях Ньюхауса ясно, что там это явление тоже наблюдается. Но, как говорилось, для них в середине 70-х гг. имелись скорее догадки, чем строгие результаты.

[80] Поясняю ещё раз: принципиальный факт существования ДС с аттрактором Лоренца был ясен уже после первых публикаций Дж. Гукенхеймера и Р. Вильямса; не-

рассмотренного в [69] аттрактора (если не говорить об изменениях при некоторых бифуркациях) —такая, как у Вильямса, но свойства системы возле аттрактора —другие («притяжение» траекторий к аттрактору может быть более слабым). В последующих работах других авторов (посвящённых, главным образом, эргодическим свойствам аттрактора Лоренца —другие вопросы в основном закрыты[81]) последний понимается именно в смысле [69]. Кроме того, в данной работе более подробно изучена его внутренняя структура (в частности, дано его символическое описание, приспособленное также и к задачам бифуркации).

Для нас здесь важно, что в [69] для их модели не только подтверждены утверждения о сохранении аттрактора Лоренца при малых возмущениях и постоянно происходящем при этом изменении его структуры, но и описан сценарий появления такого аттрактора, т. е. последовательность бифуркаций, приводящая к его рождению, а также рассмотрены бифуркации, происходящие после его рождения, и в том числе указан сценарий его разрушения.

§2. «Именные» проблемы

2.1. Грубые системы.

Уже из простейших примеров видно, что иногда качественные свойства ДС могут изменяться при сколь угодно малых возмущениях, а иногда — нет. Тривиальный пример —если в ДС никаких движений на самом деле не происходит, т. е. если речь идёт о тождественном диффеоморфизме или о потоке с нулевым векторным полем фазовой скорости. Тогда, конечно, при сколь угодно малом возмущении могут получиться различные качественные картины. Менее вырожденный пример —когда имеется неподвижная точка диффеоморфизма или положение равновесия потока (нуль соответствующего векторного поля), которые асимптотически устойчивы, но не экспоненциально устойчивы. Тогда при сколь угодно малом (в смысле C^1) возмущении в одних случаях неподвижная точка (положение равновесия) может вообще исчезнуть, а в других случаях исчезновения не происходит, но устойчивость может нарушиться.

сложные конкретные системы дифференциальных уравнений, в которых при некоторой бифуркации рождается аттрактор Лоренца, указаны в работах, цитированных в [63]; ни то, ни другое не связано с численными экспериментами. На них отчасти опирается «только» проверка наличия аттрактора Лоренца в рассматривавшейся Лоренцом системе.

[81] Информацию см. в [70].

Если же неподвижная точка экспоненциально устойчива, то при C^1-малом возмущении она не исчезает и остаётся асимптотически устойчивой; то же относится и к экспоненциально устойчивому положению равновесия. В данном случае речь идёт о сохранении локальной качественной картины (возле неподвижной точки или положения равновесия). Те случаи, когда качественная картина во всём фазовом пространстве выдерживает малые возмущения, заслуживает особого внимания. В связи с этим по идее А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина (1937 г.) вводят следующее определение.

Диффеоморфизм f гладкого замкнутого многообразия M называется грубым, если для любого достаточно C^1-близкого к нему диффеоморфизма g существует гомеоморфизм $\chi\colon M \to M$, сопрягающий f и g в том смысле, что

$$\chi \circ f = g \circ \chi. \tag{22}$$

Поток $\{\phi_t\}$ на гладком замкнутом многообразии M, задаваемый гладким векторным полем фазовой скорости $\mathbf{v}$ (так что $\dfrac{d}{dt}\phi_t(x) = \mathbf{v}(\phi_t(x))$), называется грубым, если любое достаточно C^1-близкое к $\mathbf{v}$ поле $\mathbf{w}$ определяет поток $\{\psi_t\}$, эквивалентный потоку $\{\phi_t\}$ в том смысле, что существует гомеоморфизм $\chi\colon M \to M$, переводящий траектории первого потока в траектории второго потока с сохранением направления движения по ним. Стоит отметить некоторые особенности этого определения (более подробное обсуждение имеется в [71]). В случае непрерывного времени не требуется, чтобы гомеоморфизм χ сопрягал невозмущённый и возмущённый потоки в том смысле, что

$$\chi \circ \phi_t = \psi_t \circ \chi \quad \text{при всех } t \tag{23}$$

(что казалось бы естественным аналогом (22)). Дело в том, что если у потока имеется замкнутая траектория, то при возмущении её период может измениться, а тогда (23) невозможно; между тем изменение периода мы не считаем изменением качественной картины. Не требуется, чтобы χ было диффеоморфизмом, потому что если у диффеоморфизма f имеется неподвижная точка (которая у грубого диффеоморфизма должна сохраняться при малом возмущении), то при возмущении собственные значения соответствующей матрицы линейного приближения могут измениться, а если бы χ в (22) было диффеоморфизмом, этого не могло бы произойти. Для потоков аналогичные соображения оформляются несколько сложнее (потому что мы требуем эквивалентности, а не выполнения (23)), но вывод попрежнему состоит в том, что, вообще говоря, χ не может быть диффеоморфизмом. В определении Андронова и Понтрягина дополнительно требовалось, чтобы при достаточной близости g к f или $\mathbf{w}$ к $\mathbf{v}$ гомеоморфизм χ был C^0-близком к тождественному. Позднее М. М. Пейксото предложил этого не делать, так что имеются два логически различных варианта грубости —по Андронову-Понтрягину и по Пейксото. Первое формально более ограничительно, чем второе, но теперь известно, что на самом деле эти варианты эквивалентны. Поэтому я позволю себе их не различать, хотя на самом деле их эквивалентность —весьма нетривиальный факт (о чём в своём месте будет сказано отдельно). Вместо грубости часто (особенно за рубежом) говорят о «структурной устойчивости».

После того как в классической работе А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина было введено понятие грубой системы и охарактеризованы грубые потоки на плоскости (точнее, на двумерной сфере), естественно возник вопрос о качественной характеризации поведения траекторий грубых систем в других случаях. В определении говорится о том, что происходит при возмущении; в характеризации, о которой идёт речь, говорится только о поведении траекторий невозмущённой системы. М. М. Пейксото перенёс теорему Андронова-Понтрягина на потоки на замкнутых поверхностях; формулировка при этом почти не изменилась. Во всех этих случаях грубые потоки образуют открытое всюду плотное множество в пространстве всех потоков с C^1-топологией. Естественно, встал вопрос, какие системы являются грубыми в многомерных случаях (а для систем с дискретным временем —уже и в двумерном[82]). Наиболее непосредственное обобщение условий грубости двумерных потоков приводит к так называемым системам Морса-Смейла; кроме того, по аналогии с этим случаем можно было бы думать, что грубые системы образуют открытое всюду плотное множество в пространстве всех ДС на рассматриваемом многообразии с C^1-топологией. Но всё это оказалось неверным, за исключением предположения о грубости систем Морса-Смейла. Не лишённая драматизма история исследований в этой области неоднократно описывалась, в том числе и мной (см. ниже), поэтому я сразу перейду к ответу. В ходе «гиперболической революции» С. Смейл высказал предположение, что для грубости необходимо и достаточно, чтобы множество неблуждающих точек было гиперболическим[83] (это

[82] Грубые диффеоморфизмы окружности были описаны А. А. Майером вскоре после появления работы Андронова-Понтрягина. Они тоже образуют открытое всюду плотное множество в пространстве всех C^1-диффеоморфизмов.

[83] Определение систем Морса-Смейла и гиперболических множеств приводится в

главное), чтобы периодические точки были в нём плотны (совокупность этих двух условий называется «аксиомой A» Смейла) и чтобы соответствующие устойчивые и неустойчивые многообразия имели только трансверсальные пересечения («сильное условие трансверсальности»). Достаточность была доказана (в полной общности —Р. К. Робинсоном) в конце предыдущего 20-летия, необходимость же доказана только теперь, хотя очень важный шаг был уже давно сделан Ч. Пью, доказавшим на первый взгляд простую, а на самом деле трудную лемму о замыкании. Она утверждает, что если данная гладкая система имеет неблуждающую точку x, то сколь угодно малым в C^1-смысле возмущением можно обеспечить, чтобы x стала периодической. Несколько упрощённое и уточнённое по сравнению с первоначальным доказательство имеется в [72], где также показано, что аналогичная лемма верна и в классе гамильтоновых систем. (В последнем классе, как и в классе ДС, сохраняющих объём, C^k-аналог этой леммы при достаточно большом k неверен! Ссылки на соответствующие работы М. Эрмана и Дж. Ксиа см. в [1].). Но и после того, как эта лемма была доказана, прошло немало времени, пока не удалось доказать необходимость условий грубости, гипотетически указанных Смейлом. Для динамических систем с дискретным временем необходимость была доказана Р. Мане, для потоков —Ш. Хаяши. (В [71] упоминаются некоторые «промежуточные» работы, отчасти тоже сыгравшие роль.) Стоит заметить, что Мане и Хайаши пришлось добавить к лемме о замыкании ещё некоторые утверждения сходного характера (столь же «очевидные»).

Упоминавшаяся ваше эквивалентность грубости по Андронову-Понтрягину и по Пейксото следует из того, что условия, необходимые для второй, являются достаточными для первой. Более простого доказательства эквивалентности не известно, хотя, казалось бы, этот факт должен быть более элементарным.

Несколько более слабым, чем грубость, свойством является так называемая Ω-грубость, состоящая, грубо говоря, в сохранении при малых возмущениях множества неблуждающих точек вместе с динамикой на нём. Точное определение см. в любом учебнике по гиперболической

учебниках по гладким динамическим системам, обзорах [73] и [101], а также в соответствующих статьях в «Математической энциклопедии». Стоит обратить внимание, что применительно к положениям равновесия терминология, установившаяся в теории гладких динамических систем с 60-х гг., отличается от прежней: теперь экспоненциально устойчивые (неустойчивые) фокусы и узлы тоже относят к числу гиперболических положений равновесия, а раньше гиперболическими назывались только сёдла.

динамике или в обзоре о гиперболических множествах [73]. Название связано с тем, что множество неблуждающих точек часто обозначают через Ω. Здесь мы тоже примем это обозначение. Необходимое и достаточное условие Ω-грубости было высказано в виде гипотезы С. Смейлом и Дж. Палисом. Главным в нём является гиперболичность множества неблуждающих точек; сверх того нужны ещё плотность в нём множества периодических точек и так называемая ацикличность этого множества. Имеются эквивалентные условия, в которых требуется либо гиперболичность и ацикличность некоторого другого множества, которое *a priori* могло бы быть меньше чем Ω, либо одна гиперболичность некоторого множества (множества цепно рекуррентных точек), которое *a priori* могло бы быть больше Ω; на самом деле при выполнении упомянутых условий все эти множества совпадают с Ω. Эквивалентность этих условий и их достаточность доказали С. Смейл и его сотрудники; по теперешним меркам это сравнительно несложно (достаточность доказывается легче, чем достаточность соответствующего условия для грубости). Доказательство необходимости оказалось столь же трудным, как и для грубости; для систем с дискретным временем его дал Дж. Палис сразу же после работы Мане, а для потоков —Ш. Хаяши.

Обзор [71] отражает ситуацию вплоть до начала 80-х гг. (в историческом отношении его дополняют воспоминания М. Пейксото [74]). Достижения следующих лет: [75], [76], [77], [78].

В определении грубой системы говорится о возмущениях, малых в смысле C^1. Если рассматривать диффеоморфизмы $f, g, \dots$ (векторные поля $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \dots$) класса C^k и если в определении грубости исходной ДС (определяемой f или $\mathbf{v}$) «близость» g к f ($\mathbf{w}$ к $\mathbf{v}$) понимать как C^k-близость, то получится определение свойства, которое естественно назвать C^k-грубостью. (От гомеоморфизма χ попрежнему гладкости не требуется. При этом попрежнему можно требовать или не требовать близости χ к тождественному преобразованию, так что получаются два варианта C^k-грубости —C^k-грубость по Андронову-Понтрягину и C^k-грубость по Пейксото.) В новых терминах прежняя грубость —это C^1-грубость. Что можно сказать о C^k-грубости при $k > 1$?

Пока что ничто не противоречит предположению, что C^k-грубость эквивалентна C^1-грубости (не считая, конечно, того, что о C^k-грубости можно говорить только применительно к ДС класса C^k). Однако положительных результатов на сей счёт всего два: это так а) в размерности 1 (и для потоков, и для диффеоморфизмов); б) для потоков на ориентируемых двумерных замкнутых многообразиях и на трёх простейших неориентируемых двумерных замкнутых многообразиях —тех, у которых эйлерова характеристика равна 1 (проективная плоскость), 0 (тор) или -1. Во всех этих случаях C^k-грубые системы образуют открытое всюду плотное множество в пространстве всех ДС класса C^k на данном многообразии. В остальных случаях попытка найти необходимое условие C^k-грубости на том пути, который привёл к успеху при $k = 1$, упирается, прежде всего, в вопрос о справедливости C^k-варианта леммы о замыкании. В свете сказанного выше, перспективы здесь вызывают сомнения. Можно ещё добавить, что если несколько усилить утверждения леммы о замыкании (казалось бы, совершенно естественным способом), то уже её C^2-аналог не будет справедлив. См. цитированную в [1] статью К. Гутьерреса, а также [79] (усиление леммы, которое, как показано в [79], при $k = 2$ неверно, близко к утверждениям, доказанным и использовавшимся при $k = 1$ Мане и Хайаши).

Можно определить понятие грубости для систем с некомпактным фазовым многообразием и для потоков на компактных многообразиях с краем. Ситуация в этих случаях далеко не полностью выяснена. Известно, что она отчасти отличается от описанной выше.

По темам последних трёх абзацев я не знаю более новых работ, чем указанные в [71].

Наконец, надо остановиться на грубости гладких отображений отрезка $[0, 1]$ в себя, которые не являются взаимно однозначными (для диффеоморфизмов отрезка вопрос тривиален). Определение грубости дословно переносится на этот случай (с заменой слова «диффеоморфизм» на «гладкое отображение»). Сразу же бросается в глаза новое обстоятельство: при наличии критических точек (точек x, где $f'(x) = 0$) отображение f не может быть C^1-грубым. Действительно, путём возмущения, сколь угодно малого в смысле C^1, можно столь заметно изменить характер критической точки, что это «почувствуется» даже при нашем довольно грубом подходе, когда всё рассматривается с точностью до топологического сопряжения. Например, можно обеспечить, чтобы возмущённое отображение переводило некоторый отрезок в одну точку; или, наоборот, чтобы каждая точка имела только конечное число прообразов. Поэтому при наличии критических точек в содержательной теории речь должна идти о C^k-грубости с $k > 1$. В свете сказанного выше ясно, что это создаёт немалые трудности.

Используя специфику одномерного случая и пользуясь выходом в комплексную область (где, к счастью, уже имелись результаты, которые удалось использовать), О. С. Козловский смог справиться с этими трудностями в простейшем нетривиальном случае так называемых унимодальных отображений, т. е. гладких отображений отрезка в себя, имеющих ровно одну критическую точку [80]. Результат состоит в том, что при любом $k > 1$ унимодальное C^k-гладкое отображение отрезка в себя является C^k-грубым в том и только том случае, когда оно удовлетворяет аксиоме A (подходящим образом переформулированной применительно к одномерным отображениям с критическими точками) и его критическая точка является невырожденной (вторая производная в ней отлична от нуля). Козловский доказал также, что унимодальные отображения, удовлетворяющие аксиоме A (к которой уже тривиальным образом можно добавить условие невырожденности критической точки), всюду плотны в пространстве всех унимодальных отображений класса C^k. Собственно, в этом и состоит его основной результат, из которого уже сравнительно легко получается необходимость приведённого выше условия грубости, тогда как его достаточность была известна раньше.

2.2. 21-я проблема Гильберта.

В этом пункте мы будем иметь дело с системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной области

$$\frac{dy}{dx} = C(x)y, \qquad y = (y^1, \ldots, y^p) \in \mathbb{C}^p. \tag{24}$$

За одним исключением, которое будет оговорено, она подразумевается голоморфной во всей расширенной плоскости комплексного переменного (сфере Римана) $\overline{\mathbb{C}}$, кроме нескольких особых точек $a_1, \ldots, a_n$. Голоморфность системы в точке $x \in \mathbb{C}$ означает просто голоморфность в этой точке коэффициентов матрицы $C(x)$. Если среди a_i нет ∞, то система (24) должна быть голоморфной в точке ∞; это означает следующее: перепишем (24) в терминах новой независимой переменной $\zeta := 1/z$; коэффициенты полученной системы

$$\frac{dy}{d\zeta} = -\frac{1}{\zeta^2}C\Big(\frac{1}{\zeta}\Big)y \tag{25}$$

должны иметь в точке $\zeta = 0$ устранимую особенность. Решения (24), вообще говоря, ветвятся (простейший пример:

$$p = 1,\ n = 2,\ S := \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{x}y; \tag{26}$$

решения суть $y = Cx^\alpha$). Но их можно рассматривать как функции на универсальной накрывающей поверхности $\widetilde{S}$ области S, и там они являются однозначными голоморфными функциями. (У линейной системы любое решение действительно продолжается на всю $\widetilde{S}$, что доказывается примерно так же, как и вероятно известное читателю утверждение, что в вещественной области решения линейной системы продолжается на весь тот интервал, полупрямую или всю прямую $\mathbb{R}$, где определены и непрерывны коэффициенты этой системы. Для нелинейных систем ни комплексный, ни вещественный варианты утверждения о продолжении, вообще говоря, не верен.) Точки $\widetilde{S}$ я буду обозначать с добавлением тильды, при этом $\widetilde{x}$ лежит над точкой $x \in S$; поэтому для решений (24)) лучше писать $y(\widetilde{x})$. Вполне может случиться, что для какого-то решения какой-то конкретной системы (24) однозначность достигается уже при его подъёме на какую-то ме́ньшую, чем $\widetilde{S}$, накрывающую поверхность области S (иногда решение однозначно уже в самой S). Но ничто не мешает всё равно поднять его на $\widetilde{S}$ —«каши маслом не испортишь».

Проекцию $\widetilde{S} \to S$, переводящую точку $\widetilde{x} \in \widetilde{S}$ в накрываемую ею точку $x \in S$, обозначим через π. Гомеоморфизмы $\sigma\colon \widetilde{S} \to \widetilde{S}$, для которых $\pi \circ \sigma = \sigma \circ \pi$ (т.е. которые переставляют между собой точки $\widetilde{x}$, лежащие над одной и той же x), называют скольжениями. Группа всех скольжений обозначается через Δ. Она изоморфна более конкретному объекту —фундаментальной группе $\pi_1(S, x_0)$, которая в данном случае является свободной группой с $n-1$ образующими, отвечающими обходам вокруг каких-нибудь $n-1$ из точек a_i. Однако группы $\pi_1(S, x_0)$, в отличие от Δ, отчасти зависят от x_0 (при различных x_0 они изоморфны, но «стандартного» изоморфизма между ними нет, как нет и «стандартного» изоморфизма $\pi_1(S, x_0) \to \Delta$.)

Сумма двух решений линейной системы —снова решение, произведение решения на постоянный скаляр —решение, поэтому решения (24) образуют векторное пространство $\mathfrak{Y}$, в данном случае комплексное. Из того, что решение однозначно определяется своим значением при каком-нибудь $\widetilde{x_0}$, легко следует, что $\mathfrak{Y}$ p-мерно. Базис в $\mathfrak{Y}$ —это то, что в теории дифференциальных уравнений называется фундаментальной системой решений. Наряду с векторно-матричной системой (24) рассматривается матричная систем

$$\frac{dY}{dx} = C(x)Y, \tag{27}$$

где Y —квадратная матрица p-го порядка. Её столбцы суть решения (24), и их линейная независимость означает невырожденность матрицы $Y(\widetilde{x})$ (при любом $\widetilde{x} = \widetilde{x_0}$, для чего достаточно доказать её невырожденность при каком-нибудь $\widetilde{x_0}$); в этом случае матрицу $Y(\widetilde{x})$ называют фундаментальной матрицей системы (24) (так что фундаментальная матрица — это матрица, столбцы которой образуют фундаментальную систему решений). Общее решение (24) имеет вид $y = Y(\widetilde{x})c$ с постоянным $c \in \mathbb{C}^p$. При использовании в $\mathfrak{Y}$ базиса, образованного столбцами $Y(\widetilde{x})$, координаты этого y даются вектор-столбцом c.

Всё это аналогично определениям и утверждениям из теории линейных систем в вещественной области. А вот и нечто новое: если $y(\widetilde{x})$ — решение (24) или $Y(\widetilde{x})$ — решение (27) и $\sigma \in \Delta$, то $\widetilde{x} \mapsto y(\sigma\widetilde{x})$ или $\widetilde{x} \mapsto Y(\sigma\widetilde{x})$ — тоже решение (24) или (27). Действительно, у любой точки $\widetilde{x_0} \in \widetilde{S}$ имеется в $\widetilde{S}$ окрестность $\widetilde{U}$, которую π гомеоморфно отображает на окрестность $U := \pi(\widetilde{U})$ точки $x_0 = \pi\widetilde{x_0}$ в S; тогда $\sigma\widetilde{U}$ — окрестность $\sigma\widetilde{x_0}$ в $\widetilde{S}$, которую π тоже гомеоморфно отображает на U; ясно, что

$$\sigma(\pi|\widetilde{U})^{-1} = (\pi|\sigma\widetilde{U})^{-1}. \tag{28}$$

Утверждение, что $y(\widetilde{x})$ является решением (24) в $\widetilde{U}$, означает, что $y_1(x) := y((\pi|\widetilde{U})^{-1}x)$ — решение (24) в U. Утверждение, что $\widetilde{x} \mapsto y(\sigma\widetilde{x})$ является решением (24) в $\widetilde{U}$, означает, что $y_2(x) := y(\sigma(\pi|\widetilde{U})^{-1}x)$ — решение (24). Но ввиду (28) $y_2(x) = y((\pi|\sigma\widetilde{U})^{-1}x)$, а это действительно решение (24), ибо $y(\widetilde{x})$ является решением в $\sigma\widetilde{U}$ (как и на всей $\widetilde{S}$). Итак, $y(\sigma\widetilde{x})$ действительно является решением (24) возле любой точки $\widetilde{x_0} \in \widetilde{S}$. Пользуясь изоморфизмом $\Delta \approx \pi_1(S, x_0)$, можно переход от $y(\widetilde{x})$ к $y(\sigma\widetilde{x})$ описать как изменение решения (24) при его аналитическом продолжении по цепочке кругов, взятых вдоль замкнутого пути, отвечающего σ. Но это подразумевает несколько отождествлений различных объектов — Δ и $\pi_1(S, x_0)$, голоморфных функций на $\widetilde{S}$ и наборов их элементов по Вейерштрассу.

Таким путём возникает преобразование

$$\sigma_*\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Y}, \quad (\sigma_* y)(\widetilde{x}) = y(\sigma^{-1}\widetilde{x}),$$

очевидно, линейное и невырожденное. При этом $(\sigma_*\tau_*) = \sigma_*\tau_*$ (если бы мы определили $(\sigma_* y)(\widetilde{x})$ как $y(\sigma\widetilde{x})$, то получилось бы $(\sigma_*\tau_*) = \tau_*\sigma_*$; то же самое отмечалось в п. 1.3, *а*). Обозначая через $\mathrm{GL}(\mathfrak{Y})$ группу невырожденных линейных преобразований пространства $\mathfrak{Y}$, получаем представление

$$\Delta \to \mathrm{GL}(\mathfrak{Y}), \quad \sigma \mapsto \sigma_*, \tag{29}$$

которое называется представлением монодромии (для (24)). Взяв в $\mathfrak{Y}$ какой-нибудь базис, т. е. фундаментальную систему решений, объединённую в фундаментальную матрицу $Y(\widetilde{x})$, можем перейти к матричному представлению $\chi\colon \Delta \to \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$, для которого $\chi(\sigma)$ описывает изменение координат в этом базисе элемента $y \in \mathfrak{Y}$ при переходе к $\sigma_* y$. Как легко видеть, $Y(\widetilde{x}) = Y(\sigma\widetilde{x})\chi(\sigma)$, что является эквивалентным определением χ. Представление χ тоже называют представлением монодромии. Оно определяется заданием $n-1$ невырожденной матрицы —образов образующих Δ (значит, эти матрицы описывают аналитическое продолжение решений при обходах вокруг $n-1$ особой точки), так что является более конкретным объектом, нежели (29). Но самой системой (24) χ определено не совсем единственным образом: при изменении базиса в $\mathfrak{Y}$ представление χ заменяется на сопряжённое представление $C\chi C^{-1}$, где C —некоторая постоянная матрица. В связи с этим монодромией называют также и весь класс сопряжённых представлений $\{C\chi C^{-1};\ C \in \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})\}$ (он уже определяется системой (24)).

Нас будут интересовать системы (24), имеющие особенности сравнительно «слабого» типа. Особая точка $a_i \neq \infty$ называется фуксовой, если $C(z)$ имеет в этой точке полюс первого порядка; особая точка ∞ называется фуксовой, если коэффициенты (25) имеют в точке $\zeta = 0$ полюс первого порядка. Система, у которой все особые точки фуксовы, называется фуксовой системой. Можно доказать, что у фуксовой системы, у которой особые точки суть $a_1, \ldots, a_n$ и, возможно, ∞, $C(x)$ имеет вид

$$C(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{x - a_i},$$

где B_i —постоянные матрицы. При этом точка ∞ тоже будет особой в том и только том случае, когда $\sum B_i = 0$.

«Слабость» фуксовых особенностей проявляется и в поведении решений возле особых точек. Если x стремится к фуксовой особой точке a, то $|y(x)|$ может расти или убывать не быстрее некоторой степени $|x-a|$. Сказанное нуждается в некотором уточнении, потому что даже для (26) при $\Im\alpha \neq 0$ можно обеспечить сколь угодно большой рост $|y|$ с уменьшением $|x|$, если приближаться к 0 по спирали, вдоль которой $|y|$ убывает медленно по сравнению с числом оборотов, сделанных вокруг 0 (тогда $|y|$ изменяется главным образом за счёт этих оборотов). Нужное уточнение очень просто: $|y|$ растёт или убывает не быстрее некоторой степени от $|x-a|$, когда x стремится к a, оставаясь внутри фиксированного угла с вершиной в a.

Изолированная особая точка a системы (24) называется регулярной, если для неё выполняется то же самое свойство не более чем степенно́го роста или убывания решений при приближении x к a (с тем же уточнением об угле). Оказывается, в регулярной особой точке коэффициенты правой части системы имеют полюс, но не обязательно первого порядка, так что существуют регулярные особые точки, не являющиеся фуксовыми. Но уже при полюсе второго порядка особая точка может не быть регулярной. Лишь немногим более 10 лет назад удалось указать алгоритм, позволяющий (если удастся реально проделать все вычисления) определять, является ли особая точка регулярной. Он оказался весьма громоздким. Было бы неосторожно утверждать, что его совсем нельзя упростить, но по-видимому среди всех систем, коэффициенты которых имеют полюс в a, регулярные системы расположены каким-то сложным образом, так что «распознающий» их алгоритм не может быть слишком простым.

Если все особые точки системы регулярные, то и вся система называется регулярной.

Теперь можно перейти к нашей теме —21-й проблеме Гильберта (её называют также «проблемой Римана-Гильберта»). Она гласит: показать, что «всегда существует линейное дифференциальное уравнение (на самом деле имеется в виду не одно уравнение, а система. —*Д. А.*) фуксова типа с заданными особыми точками и заданной группой монодромии» (теперь говорят точнее о представлении монодромии). Гильберт вполне мог иметь в виду не только те системы, которые мы теперь называем фуксовыми, а (по теперешней точной терминологии) регулярные системы. Независимо от неясности с терминологией начала века, здесь реально имеются две проблемы —«фуксова» и «регулярная». Последняя была вскоре положительно решена Й. Племелем (между прочим, фактически это было первое удачное использование теории сингулярных интегральных уравнений, основы которой именно в данной связи и были заложены Племелем, хотя формально в тот момент Племель о них не говорил). Племель пытался также вывести отсюда положительную разрешимость фуксова варианта, но на самом деле его редукция проходит при некотором дополнительном условии на представление монодромии, т. е. фактически он получил некоторое достаточное условие положительной разрешимости фуксовой 21-й проблемы. Оно состоит в том, что хоть одна из матриц монодромии, отвечающих обходам вокруг особых точек $a_1, \ldots, a_n$, приводится к диагональному виду. Но это было осознано много позже. По словам Ю. С. Ильяшенко, он заметил пробел у Племеля в 1975 г., когда говорил о фуксовых системах в своих лекциях. В печати неполнота рассуждений Племеля была отмечена, по-видимому, только в 1985 г. в обзоре [81]. Но тогда ещё оставалась надежда, что для фуксовых систем ответ всё-таки всегда положителен. Неожиданностью явилось открытие А. А. Болибрухом противоречащего примера [82][84]. Продолжая работу в этом направлении, Болибрух, с одной стороны, построил серию контрпримеров различного характера, а с другой —нашёл новые достаточные условия различной степени общности, гарантирующие положительный ответ; в этой работе участвовали и другие авторы. Вот одно из новых достаточных условий, принадлежащее В. П. Костову и А. А. Болибруху: представление χ неприводимо.

Новые методы нашли применение и к некоторым другим задачам аналитической теории (задача Биркгофа о стандартной форме системы в окрестности нерегулярной особой точки). Следует отметить, что в работах Болибруха вместо интегральных уравнений обычно используются векторные расслоения; такой геометрический подход впервые появился в работе Х. Рорля, датированной в точности началом предыдущего 20-летия (и содержащей, в частности, другое доказательство теоремы Племеля); другим постоянным «ингредиентом» его работ является принадлежащее А. Левелю (1961) усовершенствование классической локальной теории, построенной ещё в прошлом веке (главным образом, Л. Фуксом и А. Пуанкаре). Изложение этого направления (хотя теперь уже не совсем полное) см. в [83].

Замечу, что можно сформулировать (и исследовать) нелинейный аналог задачи Римана-Гильберта [84].

2.3. Гипотеза Дюлака.

Эта гипотеза состояла в том, что система двух уравнений в $\mathbb{R}^2$

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y), \tag{30}$$

в которой f и g суть многочлены (скажем, n-й степени), может иметь только конечное число предельных циклов. Ниже оно обозначается через $L(f, g)$. Сам А. Дюлак рассматривал утверждение «$L(f, g) < \infty$» не как гипотезу, а как теорему, которую ему удалось доказать (1923 г.). В действительности Дюлак правильно понял, что доказательство сводится к анализу отображения последования вдоль полицикла[85] и что

[84] Это, несомненно, была одна из лучших работ, опубликованных в «Математических заметках» (если не лучшая из них). Но хотя «Заметки» вообще-то переводятся на английский язык, эта работа не была переведена —в то время «краткие научные сообщения» (где как раз и публикуются последние новинки) не переводились!

[85] Полицикл —это замкнутая кривая L, состоящая из сепаратрисс, соединяющих некоторые положения равновесия, и самих этих положений равновесия, причём направления движения (с ростом t) по сепаратриссам отвечают одному и тому же

сложность проблемы связана с неаналитичностью этого отображения; он установил некоторые свойства последнего, однако их недостаточно для требуемого заключения, что у него может быть только конечное число неподвижных точек. В 1977 г. Ф. Дюмортье высказал сомнения в полноте рассуждений Дюлака. Летом 1981 г. Р. Муссю сделал эти сомнения предметом широкого обсуждения, написав о них нескольким коллегам. Независимо тем же летом Ю. С. Ильяшенко обнаружил ошибку в мемуаре Дюлака (он занял более категорическую позицию, прямо говоря об ошибке в определённом месте), после чего «теорема Дюлака» была переименована в гипотезу. В печати это переименование совершилось, по-видимому, в препринте Ю. С. Ильяшенко, цитированном в уже упоминавшемся обзоре [81], а затем —в самом этом обзоре. Статья [85] подводит итоги этому этапу критического освоения мемуара Дюлака (к которому, конечно, добавилось много другого).

Теперь гипотеза Дюлака полностью доказана. Для $n = 2$ это сделал Р. Бамон, а в общем случае —Ю. С. Ильяшенко и Ж. Экаль [86], [87]. Методы Ильяшенко и Экаля различны; оба метода применялись и в других задачах. Теорию Ильяшенко называют «геометрической», тогда как подход Экаля связан с новым процессом суммирования расходящихся рядов, хорошо приспособленным для использования в аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Краткое изложение подхода Экаля имеется в [88]. Предшественниками Экаля в отношении его процесса суммирования —но не в задаче Дюлака —были Ж.-П. Рамис и В. Бальзер. Книга последнего [89] является упрощённым изложением этого процесса (не совсем с позиций Экаля) и ряда его применений (к тем задачам, которыми интересовался сам Бальзер). Она заканчивается доказательством теоремы Б. Брааксмы, согласно которой формальные решения нелинейных мероморфных обыкновенных дифференциальных уравнений всегда суммируемы с помощью нового процесса, так что в этом отношении ничего лучшего желать не приходится!

В этом пункте уместно сказать о 16-й проблеме Гильберта. Её первая половина относится к вещественной алгебраической геометрии, а

направлении обхода по L. При наличии у L точек самопересечения (таковыми могут быть только положения равновесия) фактически дополнительно требуется, чтобы путём малой деформации ориентированной кривой L могла получиться замкнутая кривая без самопересечений (иначе не приходится говорить о рождении предельного цикла из ориентированной кривой L).

Название «полицикл» получило распространение в последние годы, хотя, кажется, ещё не стало стандартным. Раньше часто говорили «сепаратриссный контур (многоугольник)», «сложный цикл» и т. п.

вторая —к теории дифференциальных уравнений. В обоих половинах указаны удачно поставленные крупные научные задачи, но, насколько можно судить, они не только формально относятся к различным разделам математики, но и по существу далеки друг от друга, о чём Гильберт, по-видимому, не вполне отдавал себе отчёт. Нас интересует вторая часть 16-й проблемы. Она состоит в том, чтобы получить оценку сверху числа предельных циклов системы (30), где f, g —многочлены n-й степени, в виде явно указанной функции от n. Сама постановка этого вопроса подразумевает, что для любого n число

$$H(n) := \max\bigl\{L(f,g);\ f,\ g \text{ —всевозможные многочлены } n\text{-й степени}\bigr\} < \infty. \quad (31)$$

До сих пор неизвестно, так ли это.

В своё время И. Г. Петровский и Е. М. Ландис [90], [91], [92] полагали, что им удалось доказать (31) и получить некоторую оценку для $H(n)$; в частности, они утверждали, что $H(2) = 3$. Однако теперь известно, что система (30), в которой f, g —многочлены второй степени, может иметь четыре предельных цикла (Ши Сонглин. Его пример изложен в [85], [94].)

Конечно, нередко бывало, что кто-нибудь намечал правильный путь исследования, но допускал ошибку при его реализации, —иногда это был просто досадный просмотр, иногда же из виду упускалось нечто существенное. Но в данном случае ситуация оказалась более сложной. В [90], [91] имеются ценные идеи, оказавшие влияние на дальнейшее развитие теории обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной области, но что касается собственно 16-й проблемы Гильберта, намеченный там подход встречает препятствия, не преодолённые до сих пор.

В [90], [91] использовался выход в комплексную область, где геометрическим образом, отвечающим системе (30), является не система кривых (траекторий), а двумерное слоение (слоение с двумерными слоями) с особенностями (последние суть те точки, где $f = g = 0$). Обсуждались некоторые свойства этого слоения, для чего была введена относящаяся к нему система понятий, в значительной степени перекликающаяся с общей теорией слоений, которая зародилась несколько раньше и примерно в то же время стала успешно развиваться. В других местах [90], [91] отмечались специфические особенности рассматриваемых слоений, отвечающих именно многочленам f, g в (30), в частности, было начато обсуждение типичных свойств таких слоений. Само по себе всё это весьма содержательно. Но оказывается, что в комплексной области системы (30) может иметь бесконечное число предельных циклов (Петровский и Ландис по-видимому допускали такую возможность, аккуратно же это выяснил Ю. С. Ильяшенко. Ссылку см. в [81]). Поэтому Петровский и Ландис попытались доказать, что из них только сравнительно небольшое явно оцениваемое число может попасть в вещественную область. Систематическая проверка, организованная в конце 60-х гг. С. П. Новиковым на специально посвящённом этому семинаре (при моём активном участии в роли «адвоката дьявола») показала, что эта часть [90], [91] несостоятельна (независимо к тому же выводу пришёл Ю. С. Ильяшенко). А собственно для 16-й проблемы Гильберта эта часть является решающей[86].

Некоторый прогресс достигнут в исследовании двух локальных (по параметру) вариантов 16-й проблемы Гильберта. В первом, исследование которого было начато Ю. С. Ильяшенко, речь идёт об оценке (в зависимости от степени соответствующих многочленов) наибольшего числа предельных циклов, которые могут родиться при полиномиальном возмущении полиномиальной гамильтоновой системы, обычно — системы с полиномиальным гамильтонианом. Ситуация на середину 80-х гг. освещена в [81] (раздел об «ослабленной проблеме Гильберта»); после того работа продолжалась, но более новой сводки результатов, насколько известно, нет. Другой вариант был предложен В. И. Арнольдом. Его первоначальная формулировка оказалась чересчур оптимистической [95]. Сейчас предметом исследований является более слабый вариант, который и называют «проблемой Гильберта-Арнольда», хотя формально ни у Гильберта, ни у Арнольда такой задачи нет: «доказать, что в типичном k-параметрическом семействе векторных полей на плоскости $\mathbb{R}^2$ (или, после естественных доопределений, на проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$) из полицикла рождается только конечное число предельных циклов, оцениваемое сверху константой, зависящей только от k». Она доказана для полициклов, содержащих только элементарные особые точки (т. е. такие, для которых у матрицы линейного приближения хоть одно из собственных значений ненулевое). В. Ю. Калошин получил для числа возможных предельных циклов, рождающихся в такой ситу-

[86]В той части [90], [91], где говорится об общих свойствах рассматриваемых слоений, имеются пробелы и неточности (что было сразу же отмечено несколькими людьми), но в этой части дефекты более или менее поправимы, требуя главным образом уточнений формулировок. В основном это указано в [92]. С критикой же, касающейся перехода от общих вопросов к самой 16-й проблеме Гильберта, они согласились позднее [93] (только после упомянутого семинара)

ации, оценку вида e^{ck^2} с некоторой константой c. (Предположительно должна существовать полиномиальная по k оценка.)

2.4. Однородные потоки и гипотеза Рагунатана.

Значительным достижением в теории ДС алгебраического происхождения —так называемых однородных потоков—было полученное М. Ратнер доказательство гипотезы М. Рагунатана и её метрического аналога (ввиду наличия здесь аналогии говорят о метрической гипотезе Рагунатана, что, строго говоря, неправильно. Сам Рагунатан сформулировал свою гипотезу только в частном случае; общая формулировка и метрический аналог были предложены Ш. Дани). Приведу необходимые определения, сообщая заодно ещё некоторые сведения об однородных потоках.

Однородный поток —это ДС на однородном пространстве G/D, где G —группа Ли, D —её замкнутая подгруппа, определяемая левым[87] действием на G/D некоторой подгруппы $H \subset G$: под действием элемента $h \in H$ смежный класс gD, служащий элементом G/D, переходит в hgD. Собственно, на G/D действует слева вся G, но нас (в конечном счёте) интересует только ограничение этого действия на H. Ниже всегда предполагается, что G/D имеет конечный объём; это значит, что на G/D имеется конечная мера μ, инвариантная относительно указанного действия G. (То, что известно о более общем случае —это скорее различные примеры.) В наиболее популярных (и старых) примерах подгруппа $H = \{h_t;\ t \in \mathbb{R}\}$ —однопараметрическая, так что получается поток в обычном смысле слова (с классическим временем); однако можно рассматривать и многомерные H.

Обозначим через $\mathfrak{g}$ алгебру Ли группы G, а через $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ —группу Ли всех линейных преобразований $\mathfrak{g}$ как векторного пространства. В теории групп Ли вводят так называемое присоединённое представление Ad, являющееся некоторым гомоморфизмом групп Ли

$$\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \qquad g \mapsto \mathrm{Ad}_g$$

(и определяющее некоторое действие G в $\mathfrak{g}$: $(g, X) \mapsto \mathrm{Ad}_g X$). Для его определения в общем случае потребовалось бы привести ряд начальных сведений из теории групп Ли, что потребовало бы места, а читателю, имеющему эти сведения, определение Ad тоже должно быть известным.

[87]Подразумевается, что G/D состоит из левых смежных классов gD. Если бы речь шла о правых смежных классах Dg (их совокупность лучше обозначать через $D\backslash G$, но пишут и G/D), то однородный поток определялся бы правым действием.

Но несложно привести определение Ad в важном частном случае, когда G —матричная группа Ли, т. е. подгруппа группы невырожденных матриц $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ или $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ (с некоторым n), являющаяся гладким подмногообразием последней. $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ или $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ является открытым подмножеством в пространстве $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ или $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ всех матриц (в том числе и вырожденных) соответствующего порядка. Последнее как векторное пространство (т. е. отвлекаясь от умножения матриц) изоморфно $\mathbb{R}^{n^2}$ или $\mathbb{C}^{n^2}$ (рассматриваем коэффициенты матрицы как обычные координаты в $\mathbb{R}^{n^2}$ или $\mathbb{C}^{n^2}$, только занумерованные иначе). Итак, в данном случае G является подмножеством векторного пространства, и ясно, что имеют в виду, говоря, что G —гладкое подмногообразие. Оказывается, что $\mathfrak{g}$ можно считать просто касательным пространством к G в точке, являющейся единичной матрицей I, только это пространство лучше перенести параллельно самому себе из I в 0 (нулевая матрица). (Таким образом, обычными касательными прямыми к G в I служат прямые $I+tA$, $t\in\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $A\in\mathfrak{g}$.) Тогда действие G в $\mathfrak{g}$ сводится просто к сопряжению матриц:

$$\mathrm{Ad}_g X = gXg^{-1} \qquad (g\in G\subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \text{ или } \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}),\ X\in\mathfrak{g}).$$

Элемент $g\in G$ называется унипотентным, если все собственные значения преобразования Ad_g равны 1. Подгруппа Ли $U\subset G$ называется унипотентной, если все её элементы унипотентны. Частным случаем являются так называемые орисферические подгруппы. Подгруппа $H\subset G$ называется орисферической, если имеется такой элемент $g\in G$, что $g^n h g^{-n}\to e$ при $n\to\infty$ для всех $h\in H$ (e —единица группы G). Название вызвано тем, что в одном частном случае такие подгруппы тесно связаны с так называемыми орисферами в геометрии Лобачевского. (Объяснение этой связи потребовало бы слишком длительного отступления —пришлось бы описывать теоретико-групповую трактовку геодезических потоков на многообразиях (хотя бы только поверхностях) постоянной отрицательной кривизны. Если же читатель знаком с этой трактовкой, то ему, скорее всего, известна и упомянутая связь.) Однопараметрическая орисферическая подгруппа называется орициклической (по причине той же связи).

Однородный поток (вообще говоря, с многомерным временем) на факторпространстве G/D группы Ли G, получающийся при действии унипотентной подгруппы $U\subset G$ на смежные классы посредством левых сдвигов, называют унипотентным. Если подгруппа орисферическая (орициклическая), то и поток называют орисферическим (орициклическим).

Гипотезы Рагунатана-Дани относятся к унипотентному потоку (возможно, с многомерным «временем») на факторпространстве G/D конечного объёма. Первая гипотеза гласит, что замыкание каждой траектории такого потока является однородным подпространством конечного объёма, а вторая —что любая эргодическая мера для этого потока, конечная на компактах, сосредоточена на таком же подпространстве и имеет там простое алгебраическое описание, происходя из меры Хаара на подгруппе, с которой связано однородное подпространство. Вторая гипотеза доказана Ратнер и в таком варианте, когда не предполагается, что G/D имеет конечный объём, а требуется только конечность рассматриваемой эргодической меры.

В доказательстве важную роль играет выделенное Ратнер некоторое свойство —его называют «свойством Ратнер» —однопараметрических унипотентных подгрупп. Судя по высказываниям самой Ратнер, нащупать это свойство ей помогли её предыдущие работы по однородным потокам, формально посвящённые совсем другим вопросам. (В них было обнаружено явление жёсткости орициклических потоков: в определённых случаях из метрического изоморфизма двух таких потоков следует, что этот изоморфизм имеет алгебраическое происхождение, в основном получаясь из некоторого внутреннего автоморфизма G в сочетании со сдвигом на постоянное время вдоль траекторий.) С другой стороны, можно отметить ряд работ, где были доказаны частные случаи обоих гипотез. Большинство из них относится к орисферическим подгруппам; первый результат такого рода был получен Г. А. Хедлундом ещё в 1936 г. Однако по современным меркам для орисферических потоков ситуация слишком проста, в связи с чем для них, собственно, не столько доказывались гипотезы Рагунатана и Дани, сколько вообще проводилось далеко идущее исследование их топологических и метрических свойств. Г. А. Маргулис установил справедливость топологической гипотезы Рагунатана в значительно более сложном случае —для некоторых однопараметрических[88] унипотентных (но не орициклических) потоков на $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})/SL(3,\mathbb{Z})$. Это позволило ему доказать известную в теории чисел гипотезу Оппенгейма-Давенпорта о квадратичных формах (идея о привлечении унипотентных потоков для её доказательства была высказана ещё Рагунатаном). Затем Маргулис и Дани доказали топологическую гипотезу Рагунатана для всех унипотентных потоков «общего положения» в том же пространстве и получили некоторые дополнения к предыдущему теоретико-числовому результату Маргулиса.

[88] Т. е. получающихся при действиях однопараметрических подгрупп.

(Вообще, создаётся впечатление, что в работах Маргулиса и др. возникает новый раздел геометрической теории чисел, в котором «местом действия» является не евклидово пространство и тор, а группы Ли и их однородные пространства. Наиболее близкие к евклидову случаю нильпотентные группы начали играть соответствующую роль ещё до Маргулиса, однако тогда речь шла не столько о новых теоретико-числовых результатах, сколько о «групповой и динамической» интерпретации уже известных фактов.)

После того, как обе гипотезы (топологическая и метрическая) были доказаны, удалось установить справедливость некоторых их обобщений. Правда, в одном отношении это не совсем обобщения, потому что дополнительно требуется связность U (насколько это дополнительное требование необходимо —этот вопрос обсуждается), зато в других отношениях условия на U ослабляются до следующих: а) U порождена унипотентными элементами (Ратнер); б) U порождена квазиунипотентными элементами, т. е. элементами g, для которых собственные значения Ad_g равны 1 по модулю (А. Н. Старков). В случае *а* заключения остаются теми же, что и выше, а в случае *б* несколько модифицируются (например, замыкание траектории —по-прежнему многообразие, но уже не обязательно являющееся однородным пространством, а только определённым образом связанное с таковыми).

По контрасту с теоремой Ратнер стоит заметить, что давно известны случаи, когда замыкание некоторой траектории не является многообразием. Г. А. Маргулис указал, что такое явление заведомо имеет место, если однопараметрический однородный поток обладает известным в теории гладких динамических систем свойством равномерной частичной гиперболичности (в данном случае это эквивалентно тому, что он не квазиунипотентный).

Для полноты картины упомяну несколько более старых результатов об однородных потоках. В известном смысле теория однородных потоков сводится к теории эргодических однородных потоков: в неэргодическом случае Старков описал разбиение G/D на эргодические компоненты, которые хотя и могут не быть однородными пространствами, но накрываются таковыми (с конечной кратностью накрытия); при этом ограничение исходного потока на компоненту поднимается до однородного потока на накрытии. Поэтому эргодические потоки заслуживают первостепенного внимания; накоплена значительная информация об их свойствах, относящихся к эргодической теории. Имеется критерий эргодичности однородного потока, формулирующийся в терминах алгебраических условий на определяющие поток «входные данные». В основном он был получен в итоге работ Л. Ауслендера (разрешимый случай), К. Мура (полупростой случай) и Ш. Дани (общий случай); некоторые завершающие штрихи независимо внесли Старков и Д. Витте. Описаны спектры однородных потоков. Для однородных потоков доказана гипотеза В. А. Рохлина, упомянутая в п. 1.3, *a* (Старков на базе метрической теоремы Ратнер). В специальном случае, когда $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, о свойствах однородных потоков (т. е. геодезических и орициклических потоков на поверхностях G/D постоянной отрицательной кривизны) довольно много известно и без предположения о конечности объёма (в данном случае —площади) поверхности G/D (хотя вопрос далеко не исчерпан). Это тесно связано с действиями фуксовых групп на круге Пуанкаре, а последние привлекает внимание уже более 100 лет. В [99] имеется сводка результатов, позволяющих сопоставить свойства потоков и действий.

Однородным потокам посвящены доклад Ратнер [96] и обзоры [97], [98], [100].

2.5. Гипотеза Зейферта.

Эта гипотеза состояла в том, что гладкий поток без положений равновесия на трёхмерной сфере $\mathbb{S}^3$ обязательно имеет замкнутую траекторию. Основанием для этой гипотезы послужила теорема Г. Зейферта, согласно которой замкнутая траектория имеется у всех потоков, получающихся при малом возмущении «потока Хопфа», который сейчас будет описан. Реализуем трёхмерную сферу $\mathbb{S}^3$ как множество тех точек (z, w) двумерной комплексной плоскости $\mathbb{C}^2$ (с вещественной точки зрения она четырёхмерна), для которых $|z|^2 + |w|^2 = 1$. Фазовая скорость потока Хопфа —это векторное поле, сопоставляющее точке (z, w) вектор (iz, iw). Траектории потока Хопфа суть окружности $\{e^{it}z, e^{it}w\}$; разбиение $\mathbb{S}^3$ на эти окружности —это известное в топологии расслоение Хопфа[89], откуда и название потока. Помимо доказательства, данного самим Зейфертом, имеются по крайней мере два других доказательства его теоремы, принадлежащие Ф. Б. Фуллеру и М. Боттколу (ссылки и изложение идеи Фуллера см. в [101]). Фуллер использовал «индекс Фуллера» —введённую им топологическую харак-

[89] Точнее, расслоение Хопфа —это отображение $\mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$, получающееся при отождествлении в точку каждой из указанных окружностей. С ним связано (неожиданное в то время) открытие Х. Хопфа, что гомотопическая группа $\pi_3(\mathbb{S}^2) \neq 0$.

теристику поведения траекторий возле замкнутой траектории[90], а Боттккол —своеобразные вариант теории возмущений (предложенный в одной работе Ю. Мозера о периодических решениях возле положения равновесия); таким образом, методы этих работ имеют более широкое значение (чего, по-видимому, нельзя сказать о доказательстве самого Зейферта). Но они тоже относятся только к малым возмущениям потока Хопфа.

С гипотезой Зейферта связана «гипотеза о торе»: если на границе «полнотория» («сплошного тора») $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ векторное поле фазовой скорости направлено всюду внутрь (или всюду вовне) полнотория и в нём нет положений равновесия, то в нём имеется замкнутая траектория. Интуитивно кажется, что последняя должна, так сказать, делать один оборот вдоль полнотория; поэтому построенный Фуллером пример, когда, правда, имеется замкнутая траектория, но она гомотопна нулю в полнотории, послужил «тревожным сигналом», предостерегающим от доверия к наивной интуиции.

В настоящее время обе гипотезы опровергнуты даже для аналитических потоков. В основном это заслуга К. Куперберг [103], [104], построившей C^∞-контрпримеры, после чего У. Тёрстен и Э. Гис указали аналитическую модификацию построения. Стоит отметить и вклад предыдущих авторов. Ф. В. Вильсон построил контрпримеры к многомерным аналогам гипотезы Зейферта. Это, в общем, не удивительно, — довольно понятно, что в многомерном случае квазипериодические траектории вполне могут «заменить» периодическую, что и имеет место у Вильсона, —однако часть его технических приёмов пригодилась последующим авторам. Неожиданностью был контрпример П. Швейцера (уже «настоящий», трёхмерный) с потоком гладкости C^1 (1974 г. На русском языке пример Швейцера изложен в книге Тамуры [102]). После этого более гладкие варианты обоих гипотез не внушали большого доверия, однако даже поднять гладкость в контрпримерах до C^2 удалось далеко не сразу (Дж. Харрисон).

Интересно, что, как доказал Х. Хофер, гипотеза Зейферта верна для так называемых контактных потоков [105]. Контактные потоки бывают на нечётномерных многообразиях M^{2n+1}. Такой поток определяется с помощью так называемой контактной формы λ, т. е. пфаффовой фор-

[90]Этот индекс не имеет ничего общего (кроме самого слова «индекс») с упомянутым в п. 1.1 индексом Конли. Если говорить о соответствующих классических корнях, то индекс Фуллера связан не с индексом Морса, а с индексом Кронекера-Пуанкаре.

мы, для которой $(2n+1)$-мерная форма

$$\lambda \wedge \underbrace{d\lambda \wedge \ldots \wedge d\lambda}_{n \text{ раз}} \tag{32}$$

всюду отлична от нуля. (Я опускаю уточнения о требуемой степени гладкости λ.) Это определение напоминает определение симплектической структуры на чётномерном многообразии[91], но по существу здесь имеется по крайней мере одно существенное различие. Задание симплектической формы никак не выделяет никаких направлений в точках M. Контактная же форма в каждой точке x определяет некоторое одномерное направление, —именно, направление вырождения формы $d\lambda$: вектор $X \in T_xM$ имеет это направление, если

$$d\lambda(X,Y) = 0 \quad \text{для любого } Y \in T_xM.$$

Вдобавок фиксируется имеющий это направление вектор $X_x \in T_xM$, для которого $\lambda(X_x) = 1$. Векторное поле X иногда называют полем Ж. Риба. Контактный поток —это поток с векторным полем фазовой скорости X.

В действительности теорема Хофера является более общей: если у трёхмерного замкнутого многообразия M одномерная группа когомологий $H^1(M,\mathbb{R}) = 0$, то любой контактный поток на M имеет замкнутую траекторию. Это частный случай гипотезы А. Вайнстейна, в которой многообразие не предполагается трёхмерным.

Форму (32) можно принять за форму объёма на M. (Для читателя, который связывает понятие «объём» только с римановой геометрией, замечу, что если на m-мерном гладком многообразии M задана нигде не обращающаяся в нуль m-мерная внешняя форма Ω, то на M существует такая риманова метрика, для которой «элемент объёма» выражается

[91] Сходство усиливается, если учесть следующую теорему Г. Дарбу: в окрестности каждой точки x можно ввести такие локальные координаты $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n, z)$, в терминах которых $\lambda = dz + \sum y_i dx_i$. Однако контактной структурой обычно называют не пару (M, λ) с контактной формой λ, а определяемое последней на M поле $2n$-мерных касательных подпространств $E_x \subset T_xM$, где

$$E_x = \{X \in T_xM;\ \lambda(X) = 0\}.$$

Уточню, что только такое поле E_x $2n$-мерных касательных подпространств называют контактной структурой, которое получается указанным образом при помощи некоторой контактной формы. Сказанное равносильно тому, что контактная форма $f\lambda$, где f —скалярная функция, определяет ту же самую контактную структуру, что и λ.

как раз формой Ω.) Легко доказать, что контактный поток сохраняет задаваемый этой формой объём. Возникает вопрос, не верна ли гипотеза Зейферта для любых потоков, сохраняющих объём? Г. Куперберг (сын К. Куперберг) построил противоречащий пример к этому предположению (ссылку см. в [104]).

§3. Некоторые другие достижения

Повторяю, что в этом параграфе я часто ещё более краток, чем в предыдущих, и нередко вместо того, чтобы объяснять результаты, только называю их. Но я попрежнему указываю литературу, где можно найти изложение части важнейших результатов и ссылки на другие работы.

3.1.

Прежде всего, имеются области, которые привлекали внимание много более четверти века назад и которые по сей день остаются областями активных исследований; последние ведутся более или менее в тех же направлениях, что и раньше, хотя и обогатились значительными новыми идеями,понятиями, методами и т. д. В докладе Йоккоза [1] речь идёт как раз о двух таких направлениях, различающихся характером исследуемых движений. Одно из них посвящено квазипериодическим траекториям и траекториям, в чём-то близким к квазипериодическим (например, сюда относятся «канторторы»), а другое —гиперболическому поведению траекторий, куда опять-таки включается не только «чистая гиперболичность» в том виде, как она оформилась в 60-е гг., но и чем-то похожие на неё случаи. Как уже говорилось, я не собираюсь дублировать его доклад. Я сделаю только три небольших литературных добавления.

а. Своеобразную часть «гиперболической» теорией составляют результаты (главным образом, французских математиков, хотя почин здесь положил В. Тёрстен) о трёхмерных потоках Аносова и связанных с ними геометрических вопросах. О ситуации на 1991 г. см. в [73]. Одна из последних работ в данной области [106].

б. В 60-е гг. при исследовании такого классического геометрического объекта, как геодезические потоки на многообразиях отрицательной кривизны, роль геометрии явно уступала роли теории ДС. За последние 20 лет роль геометрии заметно возросла, особенно когда кривизна предполагается не строго отрицательной, а только неположительной.

См. обзор [107] и, как более новый пример (и источник других ссылок), статью [108][92].

в. Дополнительно к сказанному в [1] о канторторах можно отметить ещё прежние работы об аналогичных объектах для некоторых потоков [109], [110], [111], а также некоторые статьи, в которых развиваются три разных подхода, отличных от освещаемого в [1]. А. Б. Каток [**?**] отметил возможность исследование соответствующих инвариантных множеств для двумерных диффеоморфизмов с помощью давнишних идей Дж. Биркгофа. А. Фати [112] рассматривает канторторы как своего рода обобщённые решения (типа последнего варианта таковых —так называемых «вязких решений») для уравнения Гамильтона-Якоби. Наконец, Р. Мане обратил внимание на некоторые новые обстоятельства, связанные с суперлинейными лагранжианами; они касаются не только канторторов. См. [113], [114].

Другой пример успешного продолжения деятельности, начавшейся ранее —работы А. Д. Брюно и его сотрудников по локальной теории (см. [81], [115]). Начиная по крайней мере с Пуанкаре, важнейший метод локальной теории состоит в построении формального (т. е. представляющегося с помощью формальных степенных рядов) «нормализующего» преобразования, приводящего (локальный) поток возле положения равновесия или диффеоморфизм возле неподвижной точки к некоторому более простому виду —так называемой нормальной форме. В работах группы Брюно широкий круг соответствующих вопросов был изучен с наибольшей полнотой и ими было рассмотрено много приложений. Вопросы, касающиеся нормальных форм, включают: построение нормализующих преобразований (одной из заслуг А. Д. Брюно, относящейся к более раннему времени, состоит в предложенным им в многомерном слу-

---

[92] В ней для одного класса замкнутых многообразий неположительной кривизны —так называемых многообразий ранга 1 —исследуется введённое ранее разбиение единичного касательного расслоения на два инвариантных множества, на первом из которых поведение траекторий в инфинетезимальных терминах (терминах уравнений в вариациях) является, так сказать, более гиперболическим, чем на втором. Если инфинитезимальные характеристики не обманывают, то можно ожидать, что поведение траекторий на первом множестве является «более стохастическим», чем на втором. В [108] показано, что так и есть в двух (тесно связанных) отношениях: в отношении топологической энтропии и в отношении асимптотики по T числа замкнутых геодезических длины $\leq T$. Хотя внешне статья [108] выглядит столь же аналитической, как и работы 60-х гг., в ней, помимо самого понятия класса 1 и упомянутых двух множеств, используются ещё следующие объекты геометрического происхождения: функция Буземана, абсолют и некоторые меры на нём, строящиеся с помощью приёма типа рядов Пуанкаре в теории автоморфных форм.

чае геометрическом приёме, обобщающем многоугольник Ньютона[93]; обсуждение структуры нормальной формы и возможностей, связанных с некоторой неоднозначностью построения (когда она имеется); анализ сходимости построенных преобразований. Приложения относятся не только к самим обыкновенным дифференциальным уравнениям (в том числе зависящих от параметров, что существенно для теории бифуркаций), но и к некотором уравнениям в частных производных.

При хорошей разработанности данного метода можно оценивать «степень нетривиальности» той или иной задачи по тому, насколько полно её удаётся исследовать с его помощью и в какой мере нужны дополнительные соображения. Не все это понимают, с чем связан эпиграф, которым Брюно начал свою книгу: «Мой дядя... удивлялся, куда деваются неудавшиеся механики, оружейники, сапожники, слесари, инженеры...» (Марк Твен). Если Марк Твен полагал, что они идут в часовые мастера, то Брюно намекает, что их «способности» находят и иное применение...

3.2. Теория сингулярных возмущений.

Это ещё один пример успешного продолжения начатых ранее исследований. Речь идёт о системах обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\epsilon\dot{x} = f(x, y, \epsilon), \quad \dot{y} = g(x, y, \epsilon), \tag{33}$$

где ϵ —малый параметр. «Сингулярность» состоит в том, что малый параметр входит как множитель при производной, а не просто как параметр, от которого зависит правая часть системы (в (33) она тоже может зависеть от ϵ, но это менее существенно). Конечно, можно ввести новое («медленное») время $s := t/\epsilon$ и, обозначая дифференцирование по нему штрихом, переписать (33) как

$$\dot{x} = f(x, y, \epsilon), \quad \dot{y} = \epsilon g(x, y, \epsilon). \tag{34}$$

Теперь ϵ входит только в правую часть, но зато в новых терминах отрезку времени t конечной длины T соответствует отрезок медленного времени s длины T/ϵ, неограниченно удлиняющийся при $\epsilon \to 0$ (а мы, естественно, хотим изучить поведение решений (33) по крайней мере на

[93] Метод может применяться также для локального исследования систем алгебраических уравнений; как известно, многоугольник был предложен Ньютоном как раз для этого в частном случае одного уравнения с двумя неизвестными.

конечном отрезке времени, не уменьшающемся при $\epsilon \to 0$), так что всё равно получается не совсем обычная задача о возмущениях.

Так или иначе, ясно, что x меняется намного быстрее y, и поэтому свойства решений зависят, прежде всего, от свойств «системы быстрых движений»

$$\dot{x} = f(x, y, 0), \tag{35}$$

в которую y входит как постоянный параметр. При тех или иных предположениях о (35) можно попытаться описать более медленное изменение y.

Простейший случай здесь тот, когда решения (35) стремятся (при $t \to \infty$) к экспоненциально устойчивому положению равновесия $x_0(y)$, вообще говоря, зависящему от «параметра» y. Тогда естественно предположить, что в системе (33) это y изменяется со временем приблизительно как решение системы

$$\dot{y} = g(x_0(y), y, 0). \tag{36}$$

Если же решения (36) со временем стремятся к экспоненциально устойчивым положению равновесия y_0 или замкнутой траектории l_0, то и решения (33) стремятся к положению равновесия $(x_0(y_0), y_0)$ или, соответственно, к замкнутой траектории L_ϵ, близкой к кривой $L_0 := \{(x_0(y), y);\ y \in L_0\}$. Результаты такого типа (разумеется, при надлежащих уточнениях условий на систему) были получены около 50 лет назад. Помимо доказательства утверждения о пределе траекторий при $\epsilon \to 0$, можно провести более точное исследование их зависимости от ϵ, а именно, получить для них асимптотическое разложение с точностью до любой степени ϵ. Для периодической траектории L_ϵ получается асимптотический ряд по степеням ϵ, для траектории же с фиксированным начальным значением (x', y'), где $x' \neq x_0(y')$, соответствующее разложение содержит также члены с $\ln \epsilon$. Доказывается также единственность замкнутой траектории L_ϵ, близкой к L_0. Это результат несколько иного характера, чем асимптотика L_ϵ. Ведь *a priori* могли бы существовать две замкнутые траектории L'_ϵ и L''_ϵ, «расстояние» между которыми имело бы более высокий порядок малости, чем любая степень ϵ, скажем, экспоненциальный порядок $O(e^{-1/\epsilon})$ или $O(e^{-1/\sqrt{\epsilon}})$. Упомянутое асимптотическое разложение с точностью до любого ϵ^n этого попросту «не могло бы почувствовать».

Более сложная ситуация возникает, когда при некоторых («бифуркационных») значениях y сливаются два положения равновесия системы (35) —устойчивое $x_0(y)$ и неустойчивое, но при этом где-то в стороне от этого «места слияния» у (35) имеется устойчивое положение равновесия $x_1(y)$, к которому после прохождения бифуркационного значения y может «притянуться» наша траектория. Допустим, что те y, при которых происходит такое слияние, образуют гладкую гиперповерхность M в пространстве y-ов (точнее, накладываются аналитические условия на M, при которых это так) и что траектории системы (36) попадают на M, имея трансверсальное к M направление (это формулируется в виде явных условий на f и g). Если это так для траектория системы (36), к которой близка y-компонента интересующей нас траектория системы (33), то естественно предположить, что после этого последняя траектория быстро переходит к $x_1(y)$ и далее её y-компонента близка к траектории $y(t)$ системы (36), в которой $x_0(y)$ заменено на $x_1(y)$, а x-компонента близка к $x_1(y(t))$. Этот процесс может повторяться. Тогда можно ожидать, что траектория системы (33) будет состоять из дуг двух типов —одни из них аналогичны описанным выше в более простой ситуации и близки к дугам вида $\{(x_i(y_i(t)), y_i(t))\}$, где y_i суть решения систем вида (36) (с какими-то $x_i(y)$ вместо $x_0(y)$), а другие близки к каким-то дугам, каждая из которых идёт от двух сливающихся положений равновесия системы (35) к некоторому устойчивому положению равновесия. Дуги первого типа проходятся за конечное время, а второго —очень быстро. Нетрудно сообразить, что такая система дуг может «замыкаться», образуя замкнутую кривую L_0. Тогда можно ожидать, что (опять-таки при надлежащих уточнениях условий) при малых ϵ у (33) будет существовать замкнутая траектория L_ϵ, близкая к L_0. Стоит заметить, что подобные объекты известны в физике, доставляя математическое описание некоторых типов релаксационных колебаний[94].

[94]Первоначальный смысл последнего термина был связан с физической природой колебательной системы. Релаксационные системы противопоставлялись системам другого (более обычного) характера (которые одно время называли системами «томсоновского типа»), примером которых является обычный радиогенератор. В нём имеется колебательный контур, «подпитываемый» энергией; с другой стороны, энергия «уходит» из контура, главным образом ввиду излучения генератора (ради чего он и создан) и отчасти ввиду наличия сопротивления. Устойчивая периодическая траектория, описывающая генерируемые колебания, близка к одной из траекторий, описывающей свободные колебания контура, а её амплитуда определяется балансом между поступающей и уходящей энергией. В релаксационной колебательной системе колебания возникают иначе: сперва в некоторой части системы каким-то образом накапливается энергия, а потом она «разряжается» через другую часть системы (отсюда и название, происходящее от *relaxation* —отдых, разрядка). В зависимости от устройства системы, этот процесс может быть «сбалансирован» таким образом,

Исследование этих вопросов началось в 40-х гг. с того случая, когда x и y «одномерны» (Ж. Хааг, А. А. Дородницын). В 50-х гг. Л. С. Понтрягин и Е. Ф. Мищенко получили существенные результаты в многомерном случае. В этих работах были получены первые члены асимптотических разложений для различных дуг траекторий, для периодической траектории L_ϵ и её периода. Эти асимптотические разложения оказались значительно сложнее, чем в предыдущем случае (появляются дробные степени ϵ) и их едва ли можно было предвидеть заранее. Несколько позднее Н. Х. Розов выяснил структуру всего асимптотического разложения в случае «одномерных» x, y. В последнем случае единственность замкнутой траектории L_ϵ доказывается очень просто, так что в этом случае теория приобрела известную законченность, тогда как в многомерном случае оставались открытыми вопросы о единственности L_ϵ и о полной структуре асимптотического разложения. (Подробно о состоянии дел к началу рассматриваемого периода см. [116].)

Ответы на эти вопросы были получены около 10 лет назад. Единственность L_ϵ была независимо доказана К. Боне и группой четырёх русских математиков —Е. Ф. Мищенко, Ю. С. Колесов, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов. См. [117].

Напомню, что выше одно из условий состояло в том, что при попадании траектории системы (36) на гиперповерхность M (где сливаются устойчивое и неустойчивое положения равновесия системы (35)) вектор $g(x_0(y), y, 0)$ (задающий направление этой траектории) трансверсален к M. Возникает вопрос, как ведут себя траектории системы (33) возле той точки, где $g(x_0(y), y, 0)$ касается M? Существование таких точек —явление, в понятном смысле достаточно «типичное», за исключением того случая, когда y «одномерно», так что от этого вопроса нельзя отмахнуться как от относящегося к какой-то исключительной ситуации. Если же y одномерно (так что M —просто точка), то сам по себе данный вопрос относился бы к исключительной ситуации, но если при этом (33) зависит от некоторого параметра a, то такая ситуация может возникать при некотором $a = a_0$ и это уже является достаточно

что колебания получатся похожими на гармонические (хотя никакого колебательного контура нет); но вместо этого «разрядка» может происходить весьма быстро по сравнению с более медленным накоплением энергии, тогда колебание получается «близким к разрывному» («разрыв» соответствует разрядке). В последнем случае математическое описание системы часто даётся системой вида (33), в которой с изменением «медленной» переменной y происходит вкратце описанные выше явления (слияние двух положений равновесия, и т. д.); малый параметр ϵ «отвечает» за скорость разрядки. В математической литературе установилась традиция использовать название «релаксационные колебания» только в этом последнем случае.

«типичным». В таком случае, естественно, ставится вопрос об исследовании поведения решений (33) не только при $a = a_0$, но и при значениях a, близких к a_0. Если в правой части (33) заменить ϵ на 0, то у полученной «слегка упрощённой» системы точка M будет положением равновесия. Когда a пробегает некоторый отрезок, в системе (33) (уже не упрощённой) происходит бифуркация положения равновесия, близкого к M. Особенно интересен случай, когда это бифуркация Хопфа; интересно проследить, как с изменением a рождающийся предельный цикл, вначале маленький и почти эллиптической формы, вырастает до совсем не похожего на него «почти разрывного» предельного цикла, о котором шла речь выше.

Сперва был исследован именно этот последний вопрос, что осуществила в начале рассматриваемого периода группа французских математиков, связанных со Страсбургом (Э. Бенуа, Ф. и М. Дьене, Ж.-Л. Калло, А. Трёш, Е. Урлаше и др.); их работа была начата по предложению Ж. Риба (известного своим вкладом в теорию слоений). См. [118], [119], [120], [124]. Кому-то показалось, что «растущий» (при изменении a) предельный цикл при некоторых a похож на летящую утку; различные его части получили соответствующие названия, от «клюва» до «хвоста». Вскоре все исследуемые в этих задачах (в том числе и при отсутствии параметра a, но при «не-одномерном» y) траектории стали называть «траекториями-утками» (даже если они незамкнутые, не говоря уже об отсутствии сходства с утками —летящими, плавающими, ходящими или жареными), а вся эта деятельность получила название «охота на уток». Своеобразной особенностью французских работ было систематическое использование нестандартного анализа, что отражено в [118] и [119]. Французские авторы, как и авторы [119], явно считают язык нестандартного анализа более удобным для проведения рассуждений в этой области (включая построение различных асимптотических разложений). Формулировки же окончательных утверждений если и не даются на стандартном языке, то обычно легко переводятся на таковый, к тому же авторы [118] и [119] местами специально поясняют, как это делается. Впрочем, статья [120] положила начало использованию при «охоте на уток» одной только стандартной математики. В рамках последней в [117] исследован ряд вопросов об «утках» при «неодномерном» y.

Очевидно, возможен и такой случай, когда при изменении y положение равновесия $x_0(y)$ системы (35) претерпевает бифуркацию иного рода —от него ответвляется устойчивый предельный цикл, а само оно остаётся, но становится неустойчивым. Казалось бы, тогда можно ожидать, что траектория системы (33) быстро переходит к предельному циклу. Но действительность оказывается более сложной. Возможно (и в некотором смысле является достаточно типичным) явление «затягивания», когда и после этой бифуркации x-компонента траектория долго остаётся возле $x_0(y)$ (а y при этом по-прежнему изменяется приблизительно согласно (36)). Исследование этого явления было начато в одном частном (но вполне «представительном») случае Л. С. Понтрягиным и М. А. Шишковой в 1973 г. Достаточно законченные результаты в общем случае были получены спустя немногим более 10 лет А. И. Нейштадтом. Ссылки см. в [49]; дополнительно см. [122], [123], [124]. В [125] обсуждается сходное явление, связанное с потерей устойчивости циклом.

Далее, траектории (35) могут при всех рассматриваемых y стремиться не к положению равновесия, а к устойчивой замкнутой траектории $C(y)$. В этом случае естественно ожидать, что x-компонента решения (33) с начальным значением (x', y') быстро приближается к $C(y')$ и в дальнейшем всегда остаётся вблизи $C(y)$, где y —это y-компонента рассматриваемой траектории, а эволюция y приближённо описывается с помощью осреднения уравнения $\dot{y} = g(x, y, 0)$ вдоль $C(y)$. Опять-таки можно рассмотреть тот случай, когда осреднённая система имеет экспоненциально устойчивые положение равновесия или замкнутую траекторию. По существу, основная работа здесь была выполнена Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым (а в частных случаях —также и рядом других авторов) задолго до начала рассматриваемого периода, но постановка задачи у них была несколько иной; в духе излагаемого здесь подхода задача была исследована Л. С. Понтрягиным и Л. В. Родыгиным в 1960 г. (см. [116]).

В предыдущем случае в системе (35) устанавливается одночастотный колебательный режим. Вполне возможна и ситуация, когда в ней с самого начала (без переходного процесса) имеют место многочастотные колебания. Если они не зависят от y, вопрос сводится к поведению решений уравнения $\dot{y} = g(t, y, \phi)$ с «многочастотной» зависимостью g от t. Существенные результаты о задачах такого типа были получены (тоже до начала интересующего нас периода) Н. Н. Боголюбовым и его сотрудниками (прежде всего, Ю. А. Митропольским). Иной характер имеет ситуация, когда многочастотные колебания в (35) зависят от y. Казалось бы, в этом случае нельзя рассчитывать на сколько-либо общие результаты, потому что в достаточно реалистических задачах при сколь угодно малом изменении начальных значениях (x', y') характер соответствующей траектории (35) может существенно измениться. Скажем, то она плотна на торе большой размерности, то является замкнутой траекторией. По чему же осреднять уравнения для y?

В 1960 г. я указал, что можно получить вполне удовлетворительный ответ в достаточно общем случае[95], если интересоваться поведением не всех траекторий, а только их «большинства». «Исключительные» траектории, для которых метод осреднения в его естественной (или «наивной»?) формулировке «не работает», отвечают множеству начальных значений, мера которого при $\epsilon \to 0$ стремится к нулю. Точнее, при фиксированных $\delta > 0$ и $T > 0$ к нулю стремится мера $\mu_{\delta,T}(\epsilon)$ множества тех (x', y'), ошибка метода осреднения на отрезке $[0, T]$ превосходит δ. Можно сказать, что речь идёт о сходимости решений (при $\epsilon \to 0$) по мере начальных значений. Одновременно родственные, но (по крайней мере формально) менее общие результаты получил Т. Касуга.

Я не дал оценки $\mu_{\delta,T}(\epsilon)$, а только доказал, что эта величина стремится к 0 при $\epsilon \to 0$. Это связано со значительной общностью теоремы, при которой рассчитывать на такую оценку (во всяком случае, на сколько-либо удовлетворительную оценку) не приходится. Спустя примерно 15 лет, т. е. уже в начале рассматриваемого периода, выяснилось, что при разумном снижении общности такую оценку можно получить. Речь идёт о тех случаях, когда в (35) происходят «настоящие» многочастотные колебания (решения являются квазипериодическими). Наиболее существенный шаг здесь сделал А. И. Нейштадт, рассмотревший важный случай, когда базисные частоты этих колебаний невырожденным образом зависят от y. Он показал, что $\mu_{\delta,T}(\epsilon)$, самое большее, пропорциональна $\sqrt{\epsilon}/\delta$, причём в классе степенных оценок этот результат является окончательным —имеются примеры, где $\mu_{\delta,T}(\epsilon)$ отличается от $\sqrt{\epsilon}/\delta$ только на не очень существенный логарифмический множитель. Позднее с помощью тех же методов результаты такого рода были распространены (с определённым изменением формулировок) на некоторые системы с вырожденной зависимостью частот от y; наибольших успехов здесь добился В. И. Бахтин [126]. Ссылки на более ранние работы см. в [121].

[95] Собственно, речь идёт даже не о многочастотных колебаниях в системе (35), а о наличии у неё при каждом y «хорошей» инвариантной меры, «хорошей» системы первых интегралом $I_1(x, y), \dots, I_k(x, y)$ и эргодичности системы на почти каждой поверхности $I_j = \mathrm{const}$.

3.3. Экспоненциально малые эффекты в теории возмущений.

Собственно, уже многие результаты из 3.2 выходят за рамки «степенно́й» теории возмущений, потому что даже для аналитических систем соответствующие ряды по степеням малого параметра обычно расходятся, и потому любое утверждение о существовании и единственности замкнутой траектории (или, тем более, квазипериодического решения) связаны с каким-то выходом за рамки этой теории. Но это — утверждения качественного характера. За последние 25 лет был получен ряд количественных результатов, относящихся к экспоненциально малым эффектам. Результаты о потере устойчивости в 3.2 отчасти имеют такой характер. Вот ещё несколько направлений, где были получены такие результаты:

а) задачи о разделении движений;
б) задачи о расщеплении сепаратрисс;
в) задачи о сохранении адиабатических инвариантов;
г) теория Нехорошева;
д) задачи о диффузии Арнольда.

Некоторую информацию и литературные ссылки можно найти в [121], [49] и [127]. Дополнительные ссылки (упоминаются только работы последнего 25-летия, но в них можно найти упоминания о сравнительно немногочисленных более ранних работах, не указанных в цитированных выше книгах):

а) [122], [125], [128];
б) [129], [130], [131], [132];
г) [133], [134], [135];
д) [134].

3.4. Формула для энтропии.

Ещё до начала рассматриваемого периода возникла гипотеза, что для любых компактного гладкого многообразия M и гладкого отображения $f\colon M \to M$ топологическая энтропия $h_{\mathrm{top}}(f)$ не меньше спектрального радиуса индуцированного отображения f_* в «полной» группе гомологий $H_*(M,\mathbb{R}) := \bigoplus H_i(M,\mathbb{R})$ с вещественными коэффициентами. О ситуации в начале этого периода см. [136]. Теперь гипотеза доказано Йомдиным [137], [138], [139].

3.5. Интегрируемые и неинтегрируемые системы.

Задача об интегрировании дифференциальных уравнений (т. е. о нахождении их решений) так же стара, как стара сама теория дифференциальных уравнений. Когда-то (до Коши) теория дифференциальных уравнений (которую в то время не выделяли формально в отдельный раздел анализа) в основном состояла в нахождении приёмов интегрирования, годных для тех или иных уравнений или классов таковых. (Впрочем, почти одновременно в небесной механике стали разрабатываться методы теории возмущений. Но это в то время, по-видимому, воспринималось именно как часть небесной механики, а не теории дифференциальных уравнений.) Иногда находятся не решения, а первые интегралы. (Авторы, говорящие «решение» вместо «интеграл», часто сокращают «первый интеграл» просто до «интеграла».)

Здесь уместно пояснить происхождение терминологии. Она связана с тем, что процесс решения дифференциального уравнения можно рассматривать как некое обобщение обычного процесса интегрирования ($\int f(x)dx$ есть решение простейшего дифференциального уравнения $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$). Поэтому функции, являющиеся решениями дифференциального уравнения (или наборы функций, являющихся решениями системы дифференциальных уравнений), назвали его (её) интегралами. Теперь их чаще называют просто решениями (как, в частности, и делается в настоящей брошюре), хотя при этом одним и тем же словом называется и функция, удовлетворяющая уравнению, и процесс отыскания такой функции. (Однако Бурбаки сохранили старинную терминологию.) В отличие от интегралов, первый интеграл —это функция, постоянная вдоль решения. Название связано с тем, что часто первый этап процесса нахождения решений («интегралов») состоит в нахождении первого интеграла или, в случае системы, «полной» системы первых интегралов —такой их системы $F_1, \dots, F_k$, что любое решение полностью получается как решение системы уравнений

$$F_1 = c_1 = \text{const}, \quad \dots , \quad F_k = c_k = \text{const} \tag{37}$$

при каких-то $c_1, \dots, c_k$. Если такие F_i найдены, то решение системы дифференциальных уравнений сводится к решению «конечной» системы (37), что считалось более простым делом и во всяком случае не относится к предмету теории дифференциальных уравнений. В действительности, если первые интегралы получились сколько-либо сложными, то этот второй этап решения отнюдь не прост. В практически решённых задачах, кроме совсем простых, при этом обычно приходилось привлекать эллиптические и родственные им более сложные функции. И можно представить себе, что при ещё более сложных первых интегралах решать (37) можно только с помощью компьютера и это, вообще говоря, ничуть не проще (а часто и сложнее), чем численное интегрирование исходной системы дифференциальных уравнений. Но даже когда это так, знание первых интегралов может позволить получить такие качественные заключения о поведении решений, которые никак не видны из системы дифференциальных уравнений самой по себе.

Естественно, что на раннем этапе развития теории было проинтегрировано большое число относительно простых задач; часто это была просто удача. В любом справочнике содержатся многочисленные примеры такого рода, являющихся, так сказать, «разрозненными» в том смысле, что каждый из них был проинтегрирован сам по себе, без связи с остальными. Многие из проинтегрированных задач относятся к аналитической механике, которая долгое время была основным «потребителем» теории дифференциальных уравнений, да и вообще анализа.

Имеется некоторое различие между тем, как обычно понимается интегрируемость в «общей» теории обыкновенных дифференциальных уравнений и в аналитической механике (где приходится иметь дело с уравнениями Эйлера-Лагранжа или Гамильтона). В первой, говоря об интегрируемости, обычно подразумевают, что интересующая нас функция f (решение или первый интеграл; в случае системы обыкновенных дифференциальных уравнений речь может идти о нескольких первых интегралах, образующих полную систему таковых) получается путём определённых операций, исходя из простейших функций — многочленов. Эти операции суть: алгебраические операции; дифференцирование; (неопределённое) интегрирование; потенцирование (переход от g к e^g). Для такой f, очевидно, получается явное выражение, вообще говоря, содержащее интегралы («квадратуры»), которые не обязательно «берутся», в связи с чем говорят, что f выражается в квадратурах или что дифференциальное уравнение (система) интегрируется в квадратурах. В списке операций не упоминается о ряде «элементарных функций» —логарифме, прямых и обратных тригонометрических функциях. Однако легко видеть, что их использование при построении f можно заменить использованием указанных выше операций. Например, $\ln g = \int \frac{g'}{g} dx$. Иногда к списку добавляют ещё одну операцию —решение алгебраического уравнения, коэффициентами которого являются ранее построенные функции. Тогда явного выражения для f, вообще говоря, не получается. В этом случае говорят о представлении с помощью обобщённых квадратур.

В аналитической механике обычно говорят об интегрируемости при наличии полной системы первых интегралов, являющихся либо сравнительно простыми функциями координат в фазовом пространстве — алгебраическими, либо любыми аналитическими функциями этих координат. Не выделяется отдельно случай, когда первый интеграл выражается в квадратурах. В классических и новых проинтегрированных задачах первые интегралы часто являются алгебраическими (а то и рациональными) функциями удачно введённых координат. Отрицательные результаты —что такая-то система не имеет первых интегралов или не имеет полной системы первых интегралов —обычно намного легче доказываются для алгебраических интегралов, чем для аналитических. В то же время алгебраичность или неалгебраичность функции на фазовом пространстве зависит от используемых координат, поэтому отрицательные результаты об алгебраических первых интегралах связаны с координатами, и заранее нельзя сказать, не может ли случиться, что при использовании каких-то других фазовых переменных система станет интегрируемой.

Имеется ещё один вариант понятия интегрируемости, который восходит к С. В. Ковалевской. Общеизвестно, что она нашла новый случай, когда уравнения движения тяжёлого твёрдого тела допускают четвёртый интеграл[96] и в конечном счёте —полную систему первых интегралов. Менее известно, что в основном она решала задачу: в каких случаях все решения, рассматриваемые в комплексной области, являются мероморфными функциями времени[97]? (Тот факт, что в найденном ею новом случае (как и в ранее известных) имеется четвёртый интеграл, получился как побочный результат.) В связи с этим позднее стали говорить об «интегрируемости по Ковалевской».

Общих методов интегрирования, которые были бы столь же универсальными, как правила дифференцирования, не существует. Всё же ряд важных задач аналитической механики (математически формулирующихся в виде уравнений Эйлера-Лагранжа или Гамильтона) был в своё время решён на основании всего двух (частично перекрывающихся) спо-

[96]Если педантично соблюдать различие между «интегралами» и «первыми интегралами», то надо говорить о «четвёртом первом интеграле», как бы странно не звучало словосочетание «четвёртый первый».

[97]Ковалевская указала, что её результаты относятся и к более общему вопросу: когда все решения являются однозначными функциями комплексного времени? Справедливость этого утверждения подтвердил А. М. Ляпунов.

собов. Во-первых, при наличии непрерывных групп симметрий у этих задач имеются соответствующие первые интегралы (теорема Э. Нётер). Во-вторых, можно перейти к некоторому уравнению в частных производных (уравнение Гамильтона-Якоби) и попытаться подобрать координаты, в которых переменные разделяются. Нет никаких гарантий, что в том или ином конкретном случае удастся применить какой-нибудь из этих способов, но, действуя в обратном направлении и стараясь найти такие задачи, в которых эти способы применимы, удалось найти ряд интегрируемых задач аналитической механики. Заметим, что для задач этого типа решение (когда его удаётся найти) обычно особенно чётко разбивается на два указанные выше этапа —нахождение достаточно полной системы первых интегралов и получение с их помощью явных выражений для зависимости координат и импульсов от времени. На первом этапе большую роль играет теорема Ж. Лиувилля[98], согласно которой для «механической» ДС с n степенями свободы достаточно найти такие n функционально независимых первых интегралов $F_1, \dots, F_n$, для которых все скобки Пуассона $\{F_i, F_j\} = 0$ (в таком случае говорят, что эти интегралы находятся в инволюции). Уже на этом этапе можно сделать далеко идущие качественные заключения о поведении траекторий, что давно делалось в конкретных примерах и что в общем случае отметил В. И. Арнольд (в связи с чем соответствующую теорему часто называют теоремой Лиувилля-Арнольда). При разделении переменных, в принципе, можно было бы избежать первого этапа, по крайней мере, первые интегралы могли бы и не выступать явно. Однако практически они появляются и особо отмечаются.

Незадолго до начала рассматриваемого периода П. Лэкс предложил новый, третий способ интегрирования (в смысле нахождения системы первых интегралов) —«метод (L, A)-пары». Может быть лучше будет сказать, что это третий способ нахождения интегрируемых задач. Он не связан специфически с аналитической динамикой, но практически большинство его применений относится к гамильтоновым системам и доставляет системы, интегрируемые по Лиувиллю. Метод применим к

[98]Как я понимаю, в основном для данного круга задач случае автономной (т. е. не содержащей явно времени) системы уравнений механики эта теорема в случае n степеней свободы была впервые опубликована малоизвестным математиком Э. Буром (Bour), а Лиувилль указал её обобщение на неавтономный случай, которое не играет заметной роли. (Правда, Лиувилль ссылался на более ранний свой устный доклад. Кроме того, раньше он указал частный случай этой теоремы для $n = 2$, но последний по существу до Лиувилля был известен К. Якоби и С. Пуассону.) Здесь подтверждаются слова, что имущему добавится, а у неимущего отнимется. При выполнении условий теоремы Лиувилля говорят, что система «интегрируема по Лиувиллю».

уравнениям в частных производных; на самом деле он был предложен именно в связи с одним из таких уравнений (уравнением Кортевега-де Вриса), причём этому предшествовали исследования этого уравнения с иных позиций. (Вначале оно исследовалось численными методами и это исследование было связано с более ранними работами, где речь шла о других уравнениях и других вопросах; это поучительная и драматическая история, но она увела бы нас слишком в сторону. Начатые в связи с этим аналитические исследования со временем привели к открытию другого метода интегрирования этого уравнения, связанного с обратной задачей теории рассеяния. Лэкс, по-видимому, хотел с другой точки зрения осмыслить полученные результаты). Но Лэкс сразу понял, что его метод имеет более широкую область применимости.

Вероятно, сейчас большинство применений метода (L, A)-пары и его модификаций, в том числе и большинство наиболее интересных применений, относится к уравнениям в частных производных. Однако метод дал довольно много и для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Непосредственно метод (L, A)-пары отвечает указанному выше первому этапу (нахождение первых интегралов). Но очень быстро П. Лэкс и С. П. Новиков добавили весьма существенные соображения, относящиеся уже ко второму этапу.

Если попытаться получить явные выражения для координат и импульсов как функций времени на основании того, что непосредственно содержится в доказательстве теоремы Лиувилля, то оказывается, что применительно к ряду классических задач механики поначалу кажется, что приходится обращаться к сравнительно сложным аналитическим функциям, однако, привлекая различные конкретные соображения, оказывается возможным выразить ответ в терминах сравнительно более простых функций. Но это обычно выглядит результатом каких-то случайных совпадений. Хотелось бы иметь какие-то общие формулировки, более непосредственно указывающие на те функции, обращение к которым действительно необходимо. Едва ли это можно сделать сколько-либо удовлетворительным и «естественным» образом в тех терминах, в которых формулируется теорема Лиувилля (если бы это было возможно, такие формулировки нашли бы примерно век назад). Но это оказалось возможным с помощью некоторой модификации метода (L, A)-пары —речь идёт о так называемых (L, A)-парах со спектральным параметром. Вообще говоря, они не всегда существуют, а если и существуют, найти их труднее, чем просто какие-нибудь (L, A)-пары. Зато если уж они имеются, они дают намного больше.

Как и «обычный» метод (L, A)-пары, метод спектральной (L, A)-

пары интенсивно применялся не только к обыкновенным дифференциальным уравнениям, но и к уравнениям в частных производных. Эта сторона дела приводит к глубокому изучению алгебро-геометрических аспектов интегрируемых систем —настолько глубокому, что с ним связано открытие новых фактов даже в самой алгебраической геометрии. Правда, последнее было связано более с уравнениями в частных производных, да и вообще в ряде публикаций по алгебро-геометрическим аспектам интегрируемых систем (из числа наиболее значительных) более значительное внимание уделяется уравнениям в частных производных[99]. Но теперь появилась книга, в которой можно найти изложение, с самого начала ориентированное на гамильтоновы системы [140].

Наряду с открытием новых интегрируемых систем и исследованием их свойств за последние 25 лет был получен ряд результатов в «противоположном» направлении —доказано, что ряд конкретных систем не интегрируем[100]. Первые результаты такого рода были получены около 1900 г., но большинство результатов того времени носило довольно ограниченный характер. Обычно доказывалось, что система механического происхождения не имеет полной системы алгебраических первых интегралов. Очевидно, алгебраичность первого интеграла зависит от используемых координат. Конечно, когда говорят, что в той или иной механической задаче нет алгебраических первых интегралов, кроме уже известных в механике, то подразумевают использование тех координат, которые естественным образом появляются при самой формулировке этой задачи. И тем не менее такой результат оставляет впечатление незавершённости, ибо не исключает такой возможности, что «дополнительные» (к уже известным) первые интегралы всё-таки существуют, но в «естественных» координатах они выражаются трансцендентными функциями.

Для того, чтобы доказать «настоящую» неинтегрируемость, нужны не столько алгебраические, сколько геометрические соображения. Хотя они появились уже у Пуанкаре, систематическая трактовка этих вопросов началась с работ В. М. Алексеева, появившихся немногим менее чем за 10 лет до начала рассматриваемого периода. Затем значительный вклад внесли В. В. Козлов и С. Л. Зиглин, см. обзор Козлова [141] и [121]. В более новой книге [142] имеются и более новые результаты о

[99]Если бы я писал обзор по последним, то о тематике настоящего пункта надо было бы сказать в параграфе «Новые или «обновлённые» направления». Но применительно к теории ДС я, как видно, отнёс её в § 3.

[100]Здесь и далее под неинтегрируемостью имеется в виду отсутствие интегрируемости по Лиувиллю.

неинтегрируемости (наряду с рядом «положительных» сведений об интегрировании ряда конкретных систем[101]). Специально геодезическим потокам посвящены важные работы И. А. Тайманова и Г. Патернайна. См. [143].

В ряде случаев речь идёт о несуществовании аналитических первых интегралов. Насколько существенна аналитичность? В одних случаях существенна, в других —нет. Крайний пример последнего: у систем Аносова с «хорошей» инвариантной мерой даже и измеримых первых интегралов нет (ввиду эргодичности). Но это, как сказано, крайний пример. Для систем с двумя степенями свободы имеются довольно хорошие результаты, гарантирующие (при определённых предположениях) отсутствие «дополнительного» первого интеграла с мало-мальски приличной гладкостью. При этом основную роль, как и предвидел Пуанкаре, играют гомоклинические траектории (и связанные с ними гиперболические множества), а прочие условия, накладываемые в теоремах о неинтегрируемости, являются как бы дополнительными. Когда же число степеней свободы больше двух, то ситуация существенно усложняется: если не говорить об аналитических первых интегралах, то достаточно удобных дополнительных условий пока не известно.

Л. Батлер построил ряд (родственных друг другу) примеров аналитических римановых метрик с интегрируемыми геодезическими потоками, для которых «дополнительные» (к интегралу энергии) первые интегралы —класса C^∞, но не аналитические, и при этом разбиение фазового пространства на области, заполненные инвариантными торами (фигурирующими в теореме Лиувилля-Арнольда) не обладает теми геометрическими свойствами, которые следовали бы из аналитичности первых интегралов и которые используются для вывода ограничений на геометрию фазового пространства интегрируемых систем. Соответственно, и сами эти ограничения не выполняются. Используя идею Батлера, А. В. Болсинов и И. А. Тайманов построили «усовершенствованные» примеры, в которых топологическая энтропия интегрируемого аналитического геодезического потока положительна. Более того, ограничение этого потока на некоторое «исключительное» инвариантное подмногообразие является потоком Аносова (даром что по своим свойствам потоки Аносова и интегрируемые потоки —это как бы две крайние противоположности).

[101]Метод (L, A)-пары фигурирует в [142] под названием «представление Гейзенберга». Спектральные (L, A)-пары там не рассматриваются.

3.6. Теория Конли.

Недавно я написал предисловие к намечаемому русскому изданию книги по этой теории [144], которым позволю себе воспользоваться здесь. Примерно до 1970 г. сколько-либо далеко идущее использование топологических методов производилось только для систем нескольких специальных типов (например, имеющих вариационную природу). Когда же речь шла о системах, так сказать, общего характера, то применения топологии были довольно примитивными (что, конечно, не означает, будто они были не важными). В основном они так или иначе были связаны с вращением векторного поля на границе области и индексом Пуанкаре-Кронекера[102] нулей последнего. По существу, при этом речь идёт о чисто топологических (и притом довольно простых) понятиях и утверждениях —ничего специфически связанного с динамическими системами в них нет[103]. Имелся ещё принцип Важевского, (с которым тесно связаны идеи Конли). Но этот принцип долго занимал особое, изолированное положение.

Новые понятия, введённые Конли, уже существенным образом связаны с динамическими системами (что, впрочем, относится и к принципу Важевского), причём заранее не делается никаких предположений о специфике системы[104]. Конли подчёркивает другую сторону дела — своего рода «грубость» (в том же смысле, что и в выражении «грубо, но надёжно») соответствующих объектов. В его теории даётся далеко идущее обобщение классического понятия индекса Морса. Сам М. Морс отправлялся от вариационных задач и говорил об индексе невырожденной критической точки функции, но давно известно, что на его индекс можно посмотреть с иных позиций —с точки зрения теории динамических систем. Именно, критическая точка функции является положением равновесия соответствующего градиентного потока и её индекс Морса

[102]Как известно, в математике имеется целый ряд объектов различной природы, носящих название «индекс» (не считая тех индексов, которые являются значками при основных буквах), поэтому во избежание путаницы приходится к слову «индекс» добавлять различные уточняющие слова, нередко напоминающие об авторах соответствующего понятия. Когда же из контекста ясно, о чём идёт речь, говорят просто «индекс».

[103]Хотя работа, нужная для того, чтобы «подвести» исследуемый вопрос под соответствующие топологические утверждения, может быть весьма нетривиальной и существенно связанной с теми или иными особенностями рассматриваемой динамической системы.

[104]Другое дело, что применение теории Конли к заданной системе может оказаться бессодержательным или практически невозможным. С такой возможностью приходится считаться при любой попытке использования любой общей теории.

естественно интерпретируется в терминах свойств потока возле этого положения равновесия. В теории Конли речь идёт не только о положениях равновесия, но о широком классе так называемых изолированных (или локально-максимальных) компактных инвариантных (т. е. состоящих из траекторий) подмножеств фазового пространства потока, не обязательно градиентного. Для этих множеств вводятся некоторые топологические характеристики, попрежнему называемые индексами; точнее говоря, эти индексы характеризуют не только и не столько само это множество в смысле его «внутреннего» строения, сколько некоторые особенности поведения траекторий возле этого множества. Новые индексы являются более общими и сложными объектами, нежели прежние индексы Морса, но они по существу сводятся к последним в том случае, с которым имел дело Морс, чем и объясняется использование прежнего названия.

Уже при самом возникновении новой теории начали появляться работы, посвящённые её приложениям к математическим вопросам небесной механики (задача трёх тел и смежные вопросы) и к задачам, связанным с бегущими волнами; позднее появились и другие применения в теории уравнений с частными производными. Неожиданным было использование «индексных» соображений в работах Ч. Конли и Э. Цендера, упомянутых в п. 1.1 и, как говорилось, сыгравших заметную роль в формировании симплектической геометрии как отдельной дисциплины высокого таксономического ранга. Правда, теперь, по-видимому, роль «индексных» соображений в этой дисциплине значительно уменьшилась.

Название «теория Конли» обусловлена ролью Ч. Конли в возникновении и развитии этой теории, Сам он отмечал, что при её возникновении значительную роль сыграл также Р. Истон. Позднее над ней и её приложениями работал целый ряд авторов.

Краткое изложение исходных понятий теории Конли имеется в [101]. Этой теории посвящены лекции Конли [144] и Мишайкова [145].

3.7. Особенности в задаче n тел

(движение материальных точек (частиц), притягивающихся по закону Ньютона). Математическое описание такой системы даётся некоторой гамильтоновой системой в $6n$-мерном фазовом пространстве с переменными p_i, q_i, $i = 1, \ldots, 3n$. Здесь $q_{3i-2}, q_{3i-1}, q_{3i}$ суть обычные координаты i-й частицы в обычном (физическом) пространстве $\mathbb{R}^3$, а $p_{3i-2}, p_{3i-1}, p_{3i}$ —проекции её импульса на координатные оси в $\mathbb{R}^3$. Даже не выписывая системы, легко понять, что она имеет особенности в тех точках, где при каких-нибудь $i \neq j$ координаты i-й частицы совпадают с координатами j-й. Обозначим через Σ множество соответствующих точек в конфигурационном пространстве (пространстве переменных q_i); тогда особые точки системы суть точки множества $\Sigma \times \mathbb{R}^{3n}$. Если начальные значения $(p(0), q(0))$ взяты вне этого множества, то локально существует соответствующее решение $(p(t), q(t))$. Оно не обязательно продолжается на всю положительную полуось t. Если максимальный интервал существования решения конечен, скажем, является интервалом $[0, T)$, $T < \infty$ (мы рассматриваем только положительные t, хотя на самом деле это несущественно), то говорят, что при $t = T$ у решения имеется особенность. (Вектор-функция $(p(t), q(t))$ и впрямь имеет особенность при $t = T$.) Легко доказать, что $q(t)$ при $t \to T$ неограниченно приближается к Σ. Если существует предел $\lim\limits_{t \to T} q(t)$ (неизбежно принадлежащий Σ), то говорят, что в системе при $t = T$ происходит столкновение. (Этимология здесь очевидна: в пределе при $t \to T$ две или более частиц оказываются в одной и той же точке физического пространства $\mathbb{R}^3$). До недавнего времени оставался открытым вопрос, бывают ли особенности, отличные от столкновений? Известно, что при $n \leq 3$ таких особенностей нет. Для $n = 2$ это просто, а для $n = 3$ было доказано около 100 лет назад.

Если столкновение двойное, то, как обнаружил ещё Л. Эйлер, можно разумным (и вполне наглядным) образом определить дальнейшее движение системы (в течение некоторого времени)[105]. Эйлеровское доопределение движения после двойного столкновения увеличивает максимальный интервал существования решения, но (за исключением случая $n = 2$) всё-таки не обязательно делает его бесконечным. Так, при $n = 3$ всё может кончиться тройным столкновением (до которого могут происходить двойные столкновения. но в течение конечного времени их может произойти только конечное число)[106].

Перед самым началом последнего 25-летия Дж. Мезер и Р. Мак-Гехи [146] обнаружили, что уже при $n = 4$ возможны особенности иного ти-

[105] За это Эйлера критиковал Вольтер, говоривший —и, конечно, правильно говоривший, —что эйлеровское описание движения после столкновения физически нереально. Однако реально движение частиц, которые пролетают очень близко друг к другу, но всё-таки не сталкиваются. Эйлеровское движение после столкновения описывает предел такого движения, если рассматривать частицы, пролетающие всё ближе и ближе друг к другу. Впрочем, сам Эйлер мотивировал своё доопределение движения при $t > T$ иначе —на основании его аналитических свойств.

[106] Помимо этой качественной стороны дела, имеется ещё и аналитическая —о характере функций, описывающих особенности того или иного типа столкновений. Поэтому в целом ситуацию с особенностями и при $n = 3$ нельзя резюмировать несколькими фразами. Сводку сведений, имевшихся примерно 15 лет назад, см. в [121].

па. В их примере за конечное время T происходит бесконечное число двойных столкновений. Все четыре точки движутся по одной прямой, причём в итоге при $t \to T$ три точки уходят в бесконечность —одно в одну сторону, а два других, неограниченно сближаясь между собой (что и даёт энергию для всего процесса) —в другую; четвёртое же тело осциллирует между этими двумя, попеременно сталкиваясь то с одним, то с другим. Возник вопрос, существуют ли такие особенности, которые не являются столкновениями и которыми завершается некоторый интервал $[0, T)$, на котором не происходит столкновений? Здесь уже нельзя обойтись одномерным случаем, что усложняет задачу. В 1992 г. Дж. Ксиа [147] показал, что при $n \geq 5$ подобное явление возможно[107]. Вопрос остаётся открытым только при $n = 4$.[108]

3.8. Устойчивая эргодичность.

C^2-гладкие системы Аносова с «хорошей» инвариантной мерой эргодичны и остаются таковыми при малых (уже при только C^1-малых) возмущениях, не нарушающих ни C^2-гладкости системы, ни наличия у неё «хорошей» инвариантной меры. Это свойство —система остаётся эргодической при малых (в смысле некоторого C^r) возмущениях, не нарушающих «хорошей» инвариантной меры, —можно назвать «устойчивой эргодичностью». Спрашивается, не существует ли других устойчиво эргодических систем?

Положительный ответ на этот вопрос является заслугой Ч. Пью и М. Шуба (к которым присоединились и другие авторы). Вначале речь шла об отдельных примерах, потом —уже о некоторых (хотя и довольно специальных) классах устойчиво эргодических систем. Разумеется, представляет интерес исследование их прочих эргодических свойств (и того, насколько они изменяются при возмущениях). По крайней мере в некоторых случаях, как и для систем Аносова, имеет место не только устойчивая эргодичность, но и (аналогично определяемое) «устойчивое K-свойство» и даже «устойчивая бернуллиевость». Несомненно, в гладкой эргодической теории открылась новая глава.

Во время написания настоящей брошюры многие работы в этой области имелись только в виде препринтов. Известные мне публика-

---

[107] Ксиа указывает, что Дж. Джервер иным способом установил возможность особенностей, не сводящихся к столкновениям, в задаче n тел с некоторыми большими n.

[108] Напрашивается мысль посмотреть движения, близкие к движениям в примере Мезера-Мак-Гехи, но уже не «умещающиеся» на прямой, а происходящие на плоскости или в $\mathbb{R}^3$. Однако до сего времени это не привело к успеху.

ции: [148], [149], [150]. Близкому вопросу посвящены статьи [151], [152]. В них рассматриваются ДС специального типа —некоторые косые произведения —и речь идёт о сохранении эргодичности и более сильных свойств при малых возмущениях в класса таких систем.

3.9. «Абстрактная» (чисто-метрическая) эргодическая теория.

Мои интересы связаны преимущественно с гладкими динамическими системами, что в самом общем плане неизбежно обуславливает моё отношение к данной тематике. В предыдущий период главным достижением в чисто-метрической эргодической теории было развитие «энтропийной» теории и затем примыкающей к ней теории Орнстейна; влияние этих достижений на «гладкую» теорию трудно переоценить. Достижения последних 25 лет, насколько я могу судить, такого влияния не имели.

О строении систем с инвариантной мерой. Ниже под ДС мы будем понимать динамическую систему с дискретным временем $\{\phi^n\}$ в «хорошем» пространстве X с нормированной инвариантной мерой μ (определённой на σ-алгебре $\mathfrak{B}$ подмножеств X). Г. Фюрстенберг и Р. Циммер [154], [155], [156], [157] разработали теорию, в которой ДС представляется в виде «обратного предела» последовательности (возможно, трансфинитной) ДС, которая начинается с тривиальной ДС в пространстве, сводящемся к одной точке, и в которой каждая следующая ДС является так называемым «примитивным расширением» предыдущей (а ДС, занумерованная трансфинитным числом α, являющимся пределом возрастающей последовательности трансфинитов, —обратный предел последовательности ДС с номерами $\beta < \alpha$). Здесь фигурируют три новых понятия: «обратный (он же проективный) предел», «расширение» и «примитивное расширение». Ни одного из них я точно определять не буду, но всё же попытаюсь хотя бы отчасти объяснить их суть, пренебрегая некоторыми деталями и пользуясь аналогиями.

Сперва надо сказать о расширениях пространств с мерой. Это в какой-то степени аналог «расслоения» в топологии. Пространство с мерой $(X, \mathfrak{B}, \lambda)$ является расширением пространства с мерой $(Y, \mathfrak{C}, \mu)$ (а последнее в духе топологии можно было бы назвать «базой», но чаще говорят, что $(Y, \mathfrak{C}, \mu)$ является «фактором» $(X, \mathfrak{B}, \lambda)$), если нам задана фиксированная биекция (отображение «на») $\pi\colon X \to Y$ («проекция на базу (на фактор)»), которое измеримо (если $A \in \mathfrak{C}$, то $\pi^{-1}A \in \mathfrak{B}$) и сохраняет меру (в том же предположении $\lambda(\pi^{-1}A) = \mu(A)$). По аналогии с топологией, множества $\pi^{-1}(y)$, $y \in Y$, называют слоями. Примером может служить проекция прямого произведения $Y \times Z$ пространств с мерой $(Y, \mathfrak{C}, \mu)$ и $(Z, \mathfrak{D}, \nu)$ с соответствующей σ-алгеброй измеримых множеств и мерой $\lambda := \mu \times \nu$ на один из «сомножителей» Y или Z, скажем, на Z. В этом примере слой $\pi^{-1}(z) = Y \times \{z\}$ и на нём имеется естественная мера λ_z —это просто мера μ в Y, «перенесённая» в слой $\big(\lambda_z(A \times \{z\}) := \mu(A)\big)$. По теореме Фубини, для измеримого $A \subset Y \times Z$

$$\lambda(A) = \int_Z \lambda_z(A \cap \pi^{-1}(z))\, d\nu(z). \tag{38}$$

Если меру интерпретировать как вероятность, то в духе теории вероятностей $\lambda_z(A \cap \pi^{-1}(z))$ можно интерпретировать как условную вероятность «события» A при условии z. (Заметим, что, вообще говоря, множество этих «условий» (т. е. точек $z \in Z$) несчётно, поэтому в данном случае понятие условной вероятности является довольно деликатным.) Вместо этого в «чистой» теории меры можно говорить об «условной мере». Оказывается, что в «хороших» пространствах с мерой в слоях расширения $\pi\colon X \to Y$ тоже возникает система «условных мер» —в каждом слое $\pi^{-1}(y)$ своя мера λ_y, причём аналогично (38)

$$\lambda(A) = \int_Y \lambda_y(A \cap \pi^{-1}(y))\, d\mu(y).$$

Я опускаю здесь и далее необходимые уточнения о пренебрежении множествами меры нуль и об измеримости различных объектов. С подобной небрежностью для функции f на X можно говорить об L_2-нормах её ограничений на различные слои, т. е. о

$$\|f\|_y := \int_{\pi^{-1}(y)} |f(x)|^2\, d\lambda_y(x).$$

Ниже встречается ещё аналог «послойного произведения» двух расслоений (которое наиболее известно для векторных расслоений, в каковом случае оно называется «суммой Уитни»). Пусть $(X, \mathfrak{B}, \lambda)$ и $(Y, \mathfrak{C}, \nu)$ —расширения $(Z, \mathfrak{D}, \nu)$ с проекциями π и ρ. Их послойное произведение

$$X \times_Z Y := \{(x, y);\ x \in X,\ y \in Y,\ \pi(x) = \rho(y)\}.$$

Подразумевается, что оно снабжается мерой $\lambda \times_Z \mu$, где

$$\lambda \times_Z \mu(A) := \int_Z \lambda_z(A \cap \pi^{-1} z) \mu_z(A \cap \rho^{-1}(z))\, d\nu(z).$$

Измеримые подмножества пространства $X \times_Z Y$ определяются таким образом, чтобы для них последнее определение имело смысл; я не буду пояснять этого подробнее. Заметим, что $X \times_Z Y$ естественным образом является некоторым расширением Z.

ДС $\{\psi^n\}$ в фазовом пространстве $(X, \mathfrak{B}, \lambda)$ называется расширением ДС $\{\phi^n\}$ в $(Y, \mathfrak{C}, \mu)$, если первое пространство представлено как расширение второго с проекцией π и последняя коммутирует с соответствующими преобразованиями: $\phi \circ \pi = \pi \circ \psi$. Если ДС $\{\chi^n\}$ в X и $\{\psi^n\}$ в Y являются расширениями ДС $\{\phi^n\}$ в Z, то их послойное произведение $\{(\chi \times_Z \psi)^n\}$ —это ДС в $X \times_Z Y$, для которой

$$(\chi \times_Z \psi)(x, y) := (\chi(x), \psi(y)).$$

Она сохраняет послойное произведение соответствующих мер и является некоторым расширением ДС $\{\phi^n\}$ в Z.

Вводятся некоторые классы расширений ДС. Нам нужны два класса: «слабо перемешивающие» и «компактные». В том случае, когда база сводится к одной точке, соответствующие ДС суть слабо перемешивающие ДС и ДС, метрически изоморфные групповым сдвигам компактных коммутативных групп. (ДС последнего типа можно охарактеризовать ещё так: орбиты соответствующего унитарного оператора U_ϕ в гильбертовом пространстве $L_2(X, \lambda)$ (здесь $(U_\phi f)(x) := f(\phi x)$) условно компактны. Отсюда и название. Если мы применяем общее определение компактного расширения к данному частному случаю, непосредственно получается именно это последнее свойство.) Известно, что слабое перемешивание эквивалентно непрерывности спектра ДС (т. е. оператора U_ϕ, рассматриваемого на ортогональном дополнении к константам); кроме того, если ДС эргодична, то компактность эквивалентна дискретности спектра. Таким образом, если ДС эргодична, то введённые два класса отвечают выделению ДС с непрерывным и, соответственно, дискретным спектром, однако сейчас это делается не в спектральных терминах.

В общем случае, когда база нетривиальна, в определении слабо перемешивающего расширения ДС $\{\phi^n\}$ в Y говорится, что это есть такое расширение $\{\psi^n\}$ в X, «послойный квадрат» которого $\{(\psi \times_Y \psi)^n\}$ не имеет иных инвариантных множеств, кроме полных прообразов инвариантных множеств ДС $\{\phi^n\}$ (рассматриваемой как фактор ДС $\{(\psi \times_Y \psi)^n\}$). Когда Y сводится к одной точке, получаем известное определение непрерывности спектра: декартов квадрат $\psi \times \psi$, действующий в $X \times X$, эргодичен. А вот одно из определений компактного расширения. В $L_2(X, \mathfrak{B}, \lambda)$ плотны такие функции f, что ограничения функций

$U_{\phi^n} f$ со всевозможными n на слои π^{-1} составляют условно компактные подмножества

$$\{U_{\phi^n} f | \pi^{-1}(y);\ n \text{ любые}\} \subset L_2(\pi^{-1}(y), \lambda_y), \tag{39}$$

и даже более того: ϵ-сети для таких множеств с различными y можно выбрать, в известном смысле, согласованным образом —при любом $\epsilon > 0$ существуют такие $g_1, \dots, g_k \in L_2(X, \mathfrak{B}, \lambda)$, что их ограничения на слои являются ϵ-сетями для множеств (39). Как видно, оба определения —слабо перемешивающего и компактного расширений —являются как бы «послойными» модификациями определений слабого перемешивания и условной компактности орбит $\{U_{\phi^n} f\}$.

Примитивное расширение —это расширение, являющееся либо слабо перемешивающим, либо компактным. Наконец, предел обратного спектра понимается практически так же, как это принято в алгебре и топологии, с единственным различием, что теперь мы имеем дело с другими структурами (пространства с мерой, в которых действуют преобразования), и надо позаботиться о соответствующей структуре в предельном пространстве.

Сказанное (и определения, и основная структурная теорема) обобщается на ДС с неклассическим временем, пробегающим коммутативную группу G конечного ранга. Наиболее существенное изменение касается определения примитивных расширений. В этом случае расширение называется примитивным, если G можно представить как прямое произведение $G_1 \times G_2$ таким образом, что расширение оказывается компактным, если его рассматривать как расширение ДС со временем из G_1, и слабо перемешивающим, если его рассматривать как расширение со временем из G_2. Стало быть, мы не можем сделать так, чтобы каждый шаг нашей последовательности расширений был одного из двух простейших типов, но можем обеспечить, чтобы на каждом шаге эти два типа сочетались только некоторым простым способом.

Применяя идеи из эргодической теории или топологической динамики —иногда структурную теорему [154], [155], иногда заметно более простые соображения [153], [155], —к ДС Бернулли, удалось получить сравнительно простые и единообразные доказательства ряда теорем теории чисел, включая как известную теорему Ван дер Вардена (здесь структурной теоремы ещё не требуется), так и теорему Е. Семереди, дающую далеко идущее развитие теоремы Ван дер Вардена и высказанную в виде гипотезы П. Эрдешем и П. Тураном. (Формулировки этих двух теорем приводятся ниже.) Многие из этих теорем были известны ранее, но, например, n-параметрический аналог теоремы Семереди оказался новым; его доказательство в духе первоначальных рассуждений Семереди (если таковое возможно) было бы, по-видимому, весьма громоздким.

Я поясню характер таких применений теории ДС на примере теоремы Ван дер Вардена, утверждающей, что если $\mathbb{Z}_+$ (нам сейчас чуть удобнее начинать с нуля) разбито на m непересекающихся подмножеств A_i, то для любого $l \in \mathbb{N}$ существует такое i, что в A_i содержится «отрезок» арифметической прогрессии длины l. Довольно легко доказать следующее утверждение: если $\phi\colon X \to X$ —непрерывное отображение метрического компакта в себя, то для любого $l \in \mathbb{N}$ найдутся такие последовательность $n_k \to \infty$ и точка $x \in X$, что $\phi^{in_k}x \to x$ при всех $i = 1, \ldots, l$. Возьмём в $\{1, \ldots, r\}^{\mathbb{Z}_+}$ точку $\xi = \{\xi_n\}$, для которой ξ_n равно номеру того из множеств A_i, которому принадлежит n, и применим данное утверждение к ограничению топологического сдвига Бернулли σ на замыкание X траектории $\{\sigma^n \xi\}$. Для соответствующей точки $x = \{x_n\}$ и достаточно больших k нулевая координата каждой из точек $\sigma^{in_k}x$ с $i = 1, \ldots, l$ совпадает с нулевой координатой точки x, т. е.

$$x_0 = x_{n_k} = x_{2n_k} = x_{3n_k} = \ldots = x_{ln_k}.$$

А раз x лежит в замыкании множества $\{\sigma^n \xi\}$, то при некотором j первые ln_k координат точки $\sigma^j \xi$ совпадают с первыми ln_k координатами точки x. Значит,

$$\xi_j = \xi_{j+n_k} = \xi_{j+2n_k} = \xi_{j+3n_k} = \ldots = \xi_{j+ln_k},$$

а это означает, что числа $j, j+n_k, j+2n_k, j+3n_k, \ldots, j+ln_k$ (как раз и образующие отрезок арифметической прогрессии длины l) лежат в одном и том же A_i.

Теорема Семереди утверждает, что если подмножество $A \subset \mathbb{Z}_+$ имеет «положительную верхнюю плотность», т. е. если при некоторых $a_n, b_n \in \mathbb{Z}_+$ с $b_n - a_n \to \infty$

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\text{число элементов } A \cap [a_n, b_n]}{b_n - a_n} > 0,$$

то в A содержатся сколь угодно длинные отрезки геометрических прогрессий. Возникает мысль, что её можно доказать с помощью некоего метрического (в смысле меры) аналога того топологического утверждения, из которого так легко получается теорема Ван дер Вардена.

Эта догадка верна, но доказательство соответствующего метрического утверждения[109] намного сложнее, чем топологического. Приходится использовать структурную теорему, «продвигаясь» шаг за шагом по соответствующей «последовательности» расширений (а так как она, вообще говоря, трансфинитная, то сказанное надо понимать cum grano salis).

Кратности спектров. Один из вариантов спектральной теоремы для унитарного оператора U в сепарабельном гильбертовом пространстве H состоит в том, что для U имеется некоторая модель — некоторый довольно конкретно описываемый оператор V в столь же конкретном гильбертовом пространстве K. V «служит моделью» для U в том смысле, что он сопряжён с U посредством некоторого унитарного изоморфизма $W\colon H \to K$. В этой «модели» K строится из конечного или бесконечного числа взаимно ортогональных «блоков» — пространств $L^2(\mathbb{S}^1, \nu)$, где $\mathbb{S}^1 := \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| = 1\}$, ν —мера на $\mathbb{S}^1$. Меры ν для различных «блоков» либо ортогональны, либо совпадают; имеется n_1 «блоков», отвечающих мере ν_1, $n_2 > n_1$ «блоков», отвечающих мере ν_2, и т. д.; возможно наличие бесконечного числа блоков, отвечающих мере ν_∞. Наконец, оператор V таков, что «блоки» инвариантны относительно него, и если g принадлежит одному из блоков, скажем, $g \in L^2(\mathbb{S}^1, \nu)$, то $(Vg)(\lambda) = \lambda g(\lambda)$. Набор $\{n_1, n_2, \dots\}$ (который может быть конечным или бесконечным; он может кончаться символом ∞ или не содержать такового) называется набором спектральных кратностей для U. Он однозначно определён этим оператором и одинаков для всех операторов, унитарно сопряжённых с U (тогда как каждая мера ν_i определена с точностью до перехода к эквивалентной мере).

Как только автоморфизму ϕ пространства Лебега был сопоставлен унитарный оператор U_ϕ (что сделал Б. Купмен в конце 20-х гг.), встал вопрос, какие операторы могут при этом получиться, по крайней мере в основном для «абстрактной» эргодической теории случае эргодического ϕ. Частью этого вопроса является вопрос, какими могут быть соответствующие наборы спектральных кратностей. Вопрос о соответствующих мерах (точнее, классах эквивалентных мер) в этой части не ставится, но ниже я буду различать между случаями дискретного, непрерывного и смешанного спектра.

[109] Оно гласит: если ϕ —эндоморфизм пространства Лебега, то для любого $l > 0$ и любого измеримого A с $\mu(A) > 0$ имеется такое $i > 0$, что

$$\mu(A \cap \phi^i A \cap \ldots \cap \phi^{li} A) > 0.$$

В случае дискретного спектра ответ почти очевиден: только $\{1\}$. Давно известны примеры непрерывного (даже лебеговского[110]) спектра, для которых набор кратностей есть $\{\infty\}$. После войны постепенно набралось довольно много примеров с другими наборами спектральных кратностей, прежде всего, с набором $\{1\}$ («однократный (или простой) спектр»), а примерно в последние 10 лет был достигнут весьма значительный прогресс. Легко показать, что для смешанного спектра набор кратностей должен начинаться с 1 (это связано с его дискретной компонентой); оказывается, любой такой набор реализуется для некоторого ϕ. Это доказано различными методами в работе Я. Квятковски и М. Леманчика, цитируемой в [158], и в работе О. Н. Агеева [159]. В случае непрерывного спектра вопрос пока не выяснен до конца, но доказано, что может реализоваться любой набор, начинающийся с 1 [160]. Для наборов, начинающихся с $n_1 > 1$, пока не всё ясно; из различных примеров особого упоминания заслуживает следующий. Когда появились примеры с $\{1\}$, В. А. Рохлин поставил вопрос, имеются ли примеры ϕ с «двукратным» непрерывным спектром (с набором кратностей $\{2\}$); недавно Агеев и В. В. Рыжиков получили положительный ответ. По этой тематике имеется новый обзор [158].

Аппроксимации периодическими преобразованиями и джойнинги. Самые известные идеи и понятия эргодической теории —спектральные и энтропийные. С простейшими прообразами первых мы встречаемся в квазипериодических колебаниях, вторых —в случае последовательности независимых случайных испытаний. Сами по себе эти прообразы не относятся специфически к эргодической теории и были известны задолго до её возникновения. В результате далеко идущего развития соответствующих идей последние получили более широкие применения, причём не только в «абстрактной» (чисто-метрической), но и в «прикладной» эргодической теории, что и не удивительно, если вспомнить, откуда в конечном счёте возникли эти идеи. (В какой-то степени неожиданным для постороннего наблюдателя могло бы показаться использование идей вероятностного происхождения при исследовании ДС с гиперболическим поведением траекторий, но ведь и это можно считать реализацией пророческих замечаний Дж. К. Максвелла и А. Пуанкаре о том, что неустойчивость порождает стохастичность.)

Примерно за последние тридцать лет в эргодической теории сформировалось некое новое направление, новая система понятий и идей, происхождение которых является уже внутренним. Быть может, по

[110] Напомню о проблеме Банаха из п. 1.3, *a*.

этой причине данное направление пока что почти не имеет применений к гладким ДС; основной массив соответствующих примеров —это примеры комбинаторного характера (скажем, в пространствах последовательностей). Кажется, единственный известный пример гладкой ДС, подпадающей под данное направление —это орициклический поток. (Имеются также искусственные гладкие примеры.) Но ведь известно, что чаще всего новая идей находит широкие применения вне области своего зарождения через полвека, а пока прошла всего половина этого срока.

Я сформулирую только два понятия из этого направления (на самом деле их намного больше).

Пусть ϕ —автоморфизм пространства Лебега (X, μ), и пусть измеримое подмножество $A \subset X$ таково, что множества

$$A,\ \phi A,\ \ldots,\ \phi^h A \tag{40}$$

попарно не пересекаются. Тогда говорят, что они образуют башню Рохлина (для ϕ) высоты h. Если $\mu(X \setminus \bigcup\limits_{i=0}^{h} \phi^i A) < \epsilon$, то я позволю себе говорить об ϵ-башне Рохлина. Чтобы пояснить смысл этого понятия, на минуту искусственно замкнём «цепочку» отображений

$$A \xrightarrow{\phi} \phi A \xrightarrow{\phi} \ldots \xrightarrow{\phi} \phi^h A,$$

отобразив точку вида $\phi^h x,\ x \in A$ в x. Получится периодическое преобразование ψ пространства $\bigcup\limits_{i=0}^{h} \phi^i A$, совпадающее с ϕ по крайней мере на множестве $\bigcup\limits_{i=0}^{h-1} \phi^i A$, мера которого $> 1 - (\epsilon + 1/n)$. Если h велико, а ϵ мало, то ψ как бы аппроксимирует ϕ с большой точностью.

Оказывается, практически для любого ϕ, за некоторыми тривиальными исключениями, существуют ϵ-башни Рохлина высоты h со сколь угодно большими h и малыми ϵ. В. А. Рохлин использовал этот факт, доказывая, что множество слабо перемешивающих ϕ «массивно» в пространстве всех ϕ с равномерной (и тем более со слабой) топологией. В конце 60-х гг. А. Б. Каток, В. И. Оселедец и А. М. Стёпин использовали аппроксимационные соображения для изучения некоторых индивидуальных ϕ или построения ϕ с определёнными свойствами. Их формулировки несколько отличались от непосредственного использования башен Рохлина и включали условие количественного характера о скорости аппроксимации периодическими преобразованиями (см. статью

«Аппроксимация периодическими преобразованиями» в «Математической энциклопедии» или [?]. Если бы никаких условий не накладывалось, то ϕ могло бы быть практически любым, а тогда нельзя было бы сказать ничего специального о его свойствах.) Затем Д. Орнстейн предложил модификацию той же идеи, в которой последнее требование заменено одним условием качественного характера. Условие Орнстейна таково: для любого $\epsilon > 0$ и любого измеримого A существует такая ϵ-башня Рохлина (40), что множество A можно с точностью до ϵ аппроксимировать объединением A' некоторых из множеств (40), а именно, мера симметрической разности $\mu(A\Delta A') < \epsilon$. При выполнении этого условия говорят, что ϕ (и ДС $\{\phi^n\}$) имеет ранг 1.

Автоморфизмы ϕ ранга 1 имеют ряд общих свойств. Так, все они являются LB-автоморфизмами[111] и имеют простой спектр; автоморфизм ψ, коммутирующий с ϕ, является слабым пределом некоторой последовательности ϕ^{n_i}, откуда легко вывести, что централизаторϕ либо сводится к $\{\phi^n\}$ (оказывается, это заведомо так, если ϕ перемешивает), либо несчётен (в последнем случае имеется классификация таких ϕ). В то же время во многих отношениях свойства ДС ранга 1 весьма разнообразны (что отчасти уже отразилось в предыдущей фразе). Например, эргодический автоморфизм с дискретным спектром —ранга 1, но обратное не обязательно. Автоморфизм ϕ ранга 1 может иметь квадратный корень[112] (даже континуум попарно неизоморфных корней), а может и не иметь такового, причём при этом может случиться, что ϕ^2 имеет корни всех степеней. Два автоморфизма ранга 1 могут быть слабо изоморфны (т. е. каждый из них изоморфен фактору другого), не будучи изоморфными. Многие неожиданные примеры такого рода (некоторые из них противоречат предположениям, которые ранее могли казаться естественными) представляют интерес просто как примеры автоморфизмов пространства Лебега, независимо от того, что при этом построение примера доставляет нам автоморфизм ранга 1. Надо сказать, что обычно при построениях непосредственно используется не приведённое выше определение ДС ранга 1, а эквивалентные ему другие, более конструктивные определения. Они являются более длинными, но в них явно фигурируют параметры конструкций, доставляющих всевоз-

[111] LB —сокращение от loosely Bernoulli. Первоначально такие автоморфизмы назывались также «стандартными», но теперь это название оставлено. О них см. параграф об эквивалентности ДС в смысле Какутани в [161].

[112] Т. е. существует такой автоморфизм ψ, что $\psi^2 = \phi$. Аналогично понимаются и корни других степеней.

можные ϕ ранга 1. Успех построения различных примеров связан с тем, что удаётся проконтролировать влияние этих параметров на свойства строящегося ϕ.

Раз имеются автоморфизмы ранга 1, то должны быть и автоморфизмы других рангов. Идея состоит в том, что такие ϕ хорошо аппроксимируются в терминах нескольких башен Рохлина.

Подробно о ДС конечного ранга см. в [162]. Отмечу только три факта. Для $k \in \mathbb{N}$

$$\text{ранг}\,\phi^k = k \cdot \text{ранг}\,\phi.$$

Элементы набора спектральных кратностей не превосходят ранга, но даже простота спектра не гарантирует конечности ранга. Для автоморфизмов конечного ранга доказана упоминавшаяся в п. 1.3 гипотеза Рохлина, что перемешивание влечёт за собой перемешивание всех степеней.

Второе понятие, на котором я остановлюсь —это так называемые джойнинги, которые восходят к Г. Фюрстенбергу и Д. Орнстейну, а систематическое использование которых началось по инициативе Д. Рудольфа.

Джойнинг автоморфизма ϕ пространства с мерой (X, μ) —это такая инвариантная нормированная эргодическая меры ν в декартовой степени

$$\phi^{\times n} \colon X^n \to X^n, \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\phi x_1, \ldots, \phi x_n),$$

которая проектируется в μ при естественном проектировании X^n на любой из сомножителей X. (Следует заметить, что здесь, строго говоря, приходится отходить от ортодоксальной концепции, согласно которой в чисто метрической теории всё происходит в пространстве Лебега. Ведь в теории пространств Лебега X^n рассматривается только с мерой

$$\mu^{\times n} = \underbrace{\mu \times \ldots \times \mu}_{n \text{ раз}},$$

которая является одним из джойнингов, но прочие джойнинги слабо перемешивающего ϕ сосредоточены на множествах $\mu^{\times n}$-меры нуль, которыми с ортодоксальной точки зрения надо пренебрегать. Приходится временно реализовывать пространство (X, μ) не как пространство Лебега, а как пространство иного типа, обычно как «стандартное пространство» Макки, а потом проверять, что результат (информация о джойнингах) не зависит от выбора конкретной реализации.)

«Джойнинговые» различия между ДС состоят в том, что у одних ДС джойнингов «мало», а у других «много». ДС $\{\phi^n\}$ всегда имеет джойнинги, являющиеся прямыми произведениями мер вида

$$A_1 \times \ldots \times A_k \mapsto \mu(\psi_1 A_1 \cap \ldots \cap \psi_k A_k),$$

где ψ_i —коммутирующие с ϕ автоморфизмы. Если других джойнингов нет (и в этом смысле их «мало»), то автоморфизм ϕ называется простым. Как доказала М. Ратнер, для орициклического потока $\{\phi_t\}$ на замкнутой поверхности постоянной отрицательной кривизны (и в некоторых других случаях) все ϕ_t с $t \neq 0$ являются простыми. «Особенно мало» джойнингов, если ϕ прост и его централизатор сводится к $\{\phi^n\}$; в этом случае говорят, что ϕ имеет минимальные самоприсоединения.

Само по себе понятие джойнинга не имеет отношения к аппроксимации периодическими преобразованиями. Однако в настоящее время найти джойнинги или хотя бы получить о них сколько-либо существенную информацию удаётся обычно в тех случаях, когда ϕ допускает быструю (в том или ином смысле) аппроксимацию. Работа Ратнер в этом отношении является исключением, равно как и полученное Б. Остом с помощью джойнингов доказательство гипотезы Рохлина для ϕ с сингулярным спектром.

Джойнингам посвящён обзор [163], который дополняет статья [164].

Литература

[1] J.-Chr. Yoccoz. *Recent developments in dynamics.* Proc. Intern. Congr. Math., Zürich, Switzerland, 1994. Basel: Birkhäuser, 246-265 (1995)

[2] А.Б.Каток, Б.Хасселблат. *Введение в современную теорию динамических систем.* М.: Факториал (1999)

[3] В.И.Арнольд, А.Б.Гивенталь. *Симплектическая геометрия.* В кн.: Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления, **4**. Динамические системы —4. М.: ВИНИТИ, 5-139 (1985)

[4] M.Gromov. *Pseudo-holomorphic curves on symplectic manifolds.* Invent. Math., **82**, 307-347 (1985)

[5] H.Hofer, E.Zehnder. *Symplectic invariants and Hamiltonian Dynamics.* Birkhäuser (1994)

[6] M.Audin, J.Lafontaine (ed.). *Holomorphic curves in symplectic geometry.* Basel: Birkhauser (1994),

[7] M.Bialy, L.Polterovich. *Hamiltonian diffeomorphisms and Lagrangian distributions.* Geometric and Functional Analysis, **2**, №2, 173-210 (1992)

[8] M.Bialy, L.Polterovich. *Invariant tori and symplectic topology.* In: Sinai's Moscow seminar on dynamical systems. Amer. Math. Soc. Transl.(2), **171**, Providence, RI: Amer. Math. Soc., 23-33 (1996)

[9] D.McDuff and D.Salamon. Introduction to Symplectic Topology. Oxford Mathematical Monographs. New York: Clarendon Press (1995)

[10] В.И.Арнольд. *Топологические проблемы теории распространения волн.* Успехи мат. наук, **51**, №1, 3-50 (1996)

[11] W.Ballmann. *Der Satz von Lyusternik und Schnirelmann.* Bonn. Math. Schr., **102** (1978)

[12] И.А.Тайманов. *Замкнутые экстремали на двумерных многообразиях.* Успехи мат. наук, **47**, №2, 143-185 (1992)

[13] V.Bangert. *On the existence of closed geodesics on two-spheres.* Internat. J. of math., **4**, №1, 1-10 (1993)

[14] J.Franks. *Geodesics on S^2 and periodic points of annulus diffeomorphisms.* Invent. math., **108**, 403-418 (1993)

[15] J.Franks. *Rotation Vectors and Fixed Points of Area Preserving Surface Diffeomorphisms.* Trans. Amer. Math. Soc., **348**, 2637–2662 (1996)

[16] Sh.Matsumoto. *Arnold Conjecture for surface homeomorphisms.* Препринт.

[17] N.Hingston. *On the growth of the number of closed geodesics on the two-sphere.* Internat. Math. Research Notices, **9**, 253 - 262 (1993)

[18] А.В.Болсинов, А.Т.Фоменко. *Введение в топологию интегрируемых гамильтоновых систем.* М.: Наука (1997)

[19] Х.О.Пейтген, П.Х.Рихтер. *Красота фракталов.* М.: Мир (1993)

[20] М.Ю.Любич. *Динамика рациональных преобразований: топологическая картина.* Успехи мат. наук, **41**, №4, 35-95 (1986)

[21] А.Э.Ерёменко, М.Ю.Любич. *Динамика аналитических преобразований.* Алгебра и анализ, **1**, №3, 1-70 (1989)

[22] L.Carleson, T.W.Gamelin. *Complex dynamics.* N.-Y.: Springer (1993)

[23] M.Lyubich. *Dynamics of quadratic polynomials, I – II.* Acta Math., **178**, №2, 185-297 (1997)

[24] М.Фейгенбаум. *Универсальность в поведении нелинейных систем.* Успехи физ. наук, **141**, №2, 343-374 (1983)

[25] W.de Melo, S.van Strien. *One-dimensional dynamics.* Berlin etc.: Springer (1993)

[26] Ф.Гринлиф. *Инвариантные средние на топологических группах.* М.: Мир (1979)

[27] А.А.Темпельман. *Эргодические теоремы на группах.* Вильнюс: Мокслас (1986)

[28] U.Krengel. *Ergodic theorems.* de Gruyter studies in Math., **6**. Berlin, N.Y.: de Gruyter (1985)

[29] Р.И.Григорчук. *Индивидуальная эргодическая теорема для действий свободных групп.* В кн.: XII школа по теории операторов в функциональных пространствах. Тезисы докладов. Тамбов, 14 – 20 сентября 1987 г. Часть I. Тамбов: Тамбовский госпединститут, 57 (1987)

[30] A.Nevo, E.M. Stein. *A generalization of Birkhoff's pointwise ergodic theorem.* Acta Math., **173**, №1, 135-154 (1994)

[31] A.Nevo, E.M. Stein. *Analog of Wiener's ergodic theorems for semi-simple Lie groups I.* Ann. Math., **145**, №3, 565-595 (1997)

[32] G.M.Margulis, A.Nevo, E.M. Stein. *Analog of Wiener's ergodic theorems for semi-simple Lie groups II.* Preprint.

[33] В.И.Арнольд, А.Л.Крылов. *Равномерное распределение точек на сфере и некоторые эргодические свойства решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.* Докл. АН СССР, **148**, №1, 9-12 (1963)

[34] Д.А.Каждан. *Равномерное распределение на плоскости.* Тр. Моск. матем. о-ва, **14**, 299-305 (1965)

[35] О.Н.Агеев. *Динамические системы с чётнократной лебеговской компонентой в спектре.* Матем. сб., **136**, №3(7), 307-319 (1988)

[36] Д.В.Аносов. *О вкладе Н.Н.Боголюбова в теорию динамических систем.* Успехи мат. наук, **49**, №5, 5-20 (1994)

[37] D.Ornstein, B.Weiss. *Ergodic theory of amenable group actions I. The Rohlin lemma.* Bull. Amer. Math. Soc., **2**, №1, 161-164 (1980)

[38] D.Ornstein, B.Weiss. *Entropy and isomorphism theorems for actions of amenable groups.* J. d'Analyse Math., **48**, 1-141 (1987)

[39] А.М.Стёпин, А.Т.Таги-заде. *Вариационная характеризация топологического давления аменабельных групп преобразований.* Доклады АН СССР, **254**, №3, 545-549 (1980)

[40] Я.Г.Синай. *Гиббсовские меры в эргодической теории.* Успехи мат. наук, **27**, №4, 21-64 (1972)

[41] Р.Боуэн. Методы символической динамики. М.: Мир (1979)

[42] А.М.Вершик, И.П.Корнфельд. *Периодические аппроксимации и их приложения. Эргодические теоремы, спектральная и энтропийная теория для действий общих групп.* В кн.: Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления, **2**. Динамические системы —2. М.: ВИНИТИ, 70–89 (1985)

[43] В.И.Арнольд. *Теория катастроф.* М.: Наука (1990)

[44] В.И.Арнольд. *Теория катастроф.* В кн.: Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления, **5**. Динамические системы —5. М.: ВИНИТИ, 219-277 (1986)

[45] А.В.Чернавский. *Применения теории катастроф в психологии.* Сб. «Число и мысль», М.: Знание, №2 (1979)

[46] Т.Постон, И.Стюарт. *Теория катастроф.* М.: Мир (1980)

[47] В.И.Арнольд. *Лекции о бифуркациях и версальных семействах.* Успехи мат. наук, **27**, №5, 119-184 (1972)

[48] В.И.Арнольд. *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Наука (1978)

[49] В.И.Арнольд, В.С.Афраймович, Ю.С.Ильяшенко, Л.П.Шильников. *Теория бифуркаций.* В кн.: Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления, **5**. Динамические системы —5. М.: ВИНИТИ, 5-219 (1986)

[50] С.И.Трифонов. *Цикличность элементарных полициклов типичных гладких векторных полей.* В кн.: Дифференциальные уравнения с вещественным и комплексным временем, под ред. Ю.С.Ильяшенко. Труды МИАН, **213**, М.: Наука, 152-212 (1997)

[51] Н.К.Гаврилов, Л.П.Шильников. *О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой I, II.* Матем. сб., **88**, №4, 475-492 (1972); **90**, №1, 139-156 (1972)

[52] С.В.Гонченко. *Об устойчивых периодических движениях систем, близких к системе с негрубой гомоклинической кривой.* Мат. заметки, **33**, №5, 745-755 (1983)

[53] С.В.Гонченко, Д.В.Тураев, Л.П.Шильников. *Динамические явления в многомерных системах с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре.* Докл. РАН, **330**, №2, 144-147 (1993)

[54] S.V.Gonchenko, L.P.Shilnikov, D.V.Turaev. *Dynamical phenomena in systems with structurally unstable Poincare homoclinic orbits.* Chaos, **6**, №1, 15-31 (1996)

[55] Ж.-К. Йоккоз. *Квадратичные многочлены и аттрактор Эно.* В кн.: Труды семинара Н.Бурбаки за 1991 г., под ред. В.А.Васильева и М.И.Монастырского. М.: Мир, 1991, 121-140 (1998)

[56] Sh.Newhouse. *Non-density of axiom $A(a)$ on S^2.* Proc. A.M.S. symp. pure math., **14**, 191-202 (1970)

[57] Sh.Newhouse. *Diffeomorphisms with infinitely many sinks.* Topology, **13**, №1, 9-18 (1974)

[58] Sh.Newhouse. *The abundance of wild hyperbolic sets and nonsmooth stable sets for diffeomorphisms.* Publ. Math. IHES, **50**, 101-151 (1979)

[59] C.Robinson. *Bifurcations to infinitely many sinks.* Comm. math. phys., **90**, №3, 433-459 (1983)

[60] J.Palis, M.Viana. *High dimension diffeomorphisms displaying infinitely many periodic attractors.* Ann. Math., **140**, №1, 207-250 (1994)

[61] С.В.Гонченко, Д.В.Тураев, Л.П.Шильников. *О существовании областей Ньюхауса вблизи систем с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре (многомерный случай).* Докл. РАН, **329**, №4, 404-407 (1993)

[62] N.Romero. *Persistence of homoclinic tangencies in higher dimensions.* Ergod. theory and dyn. systems, **15**, 735-757 (1995)

[63] J.Palis, F.Takens. *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations.* Cambridge etc.: Cambridge Univ. Press (1993)

[64] Л.П.Шильников, Д.В.Тураев. *О катастрофах голубого неба.* Докл. РАН, **342**, №5, 596-599 (1995)

[65] Д.В.Тураев, Л.П.Шильников. *Пример дикого странного аттрактора.* Матем. сб., **189**, char242 2, 137-160 (1998)

[66] S.V.Gonchenko, L.P.Shilnikov, D.V.Turaev. *On models with non-rough Poincare homoclinic curves.* Physica D, **62**, char242 1-4, 1-14

[67] С.В.Гонченко, Д.В.Тураев, Л.П.Шильников. *Об областях Ньюхауса двумерных диффеоморфизмов, близких к диффеоморфизму с негрубым гомоклиническим контуром.* В кн.: Динамические системы и смежные вопросы. Труды МИАН, **216**, 76-125 (1997)

[68] С.В.Гонченко, Л.П.Шильников. *О двумерных аналитических сохраняющих площадь диффеоморфизмах со счётным множеством эллиптических устойчивых периодических точек.* Регулярная и хаотическая динамика, **2**, char242 3/4, 106-122.

[69] Л.П.Шильников, В.С.Афраймович, В.В.Быков. *О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца.* Тр. Моск. мат. о-ва, **44**, 150-212 (1982)

[70] Р.В.Плыкин, Е.А.Сатаев, С.В.Шлячков. *Странные аттракторы.* В кн.: Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления, **66**. Динамические системы —9. М.: ВИНИТИ, 100-148 (1991)

[71] Д.В.Аносов. *Грубые системы.* В кн.: Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы, под ред. Е.Ф.Мищенко. Тр. мат. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР, **169**, 59-93 (1985)

[72] Ch.C.Pugh, R.C.Robinson. *The C^1 closing lemma, including hamiltonians.* Ergod. theory and dyn. systems, **3**, 261-313 (1983)

[73] Д.В.Аносов, В.В.Солодов. *Гиперболические множества.* В кн.: Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления, **66**. Динамические системы —9. М.: ВИНИТИ, 12-99 (1991)

[74] M.M.Peixoto. *Acceptance speech for the TWAS 1986 award in mathematics.* The future of science in China and the third world. Proc. of the second general conf. organized by the Third World Ac. Sci. (edit. A.M.Faruqui, M.H.A.Hassan). Singapore: World Scientific, 600-614 (1989)

[75] R.Mañé. *On the creation of homoclinic points.* Publ. math. Inst. hautes étud. sci., **66**, 139-159 (1988)

[76] R.Mañé. *A proof of the C^1 stability conjecture.* Publ. math. Inst. hautes étud. sci., **66**, 161-210 (1988)

[77] J.Palis. *On the C^1 Ω-stability conjecture.* Publ. math. Inst. hautes étud. sci., **66**, 211-215 (1988)

[78] Sh.Hayashi. *Connecting invariant manifolds and the solution of the C^1-stability and Ω-stability conjectures for flows.* Ann. Math., **145**, №1, 81-137 (1997)

[79] C.C.Pugh. *Against the C^2-closing lemma.* J. of diff. equations, **17**, №2, 435-443 (1975)

[80] O.S.Kozlovski. *Structural stability in one-dimensional dynamics.* Preprint, Univ. of Amsterdam, 1997.

[81] В.И.Арнольд, Ю.С.Ильяшенко. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* В кн.: Итоги науки и техники. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления, **1**. Динамические системы —1. М.: ВИНИТИ, 7-149 (1985)

[82] А.А.Болибрух. *Проблема Римана – Гильберта на комплексной проективной прямой.* Математические заметки, **46**, №3, 118-120 (1989)

[83] D.V. Anosov, A.A. Bolibruch. *The Riemann-Hilbert problem.* Braunschweig; Wiesbaden: Vieweg (1994)

[84] *Дифференциальные уравнения с вещественным и комплексным временем.* Сб. статей под ред. Ю.С.Ильяшенко. Тр. мат. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР, **213** (1997)

[85] Ю.С.Ильяшенко. *Мемуар Дюлака «О предельных циклах» и смежные вопросы локальной теории дифференциальных уравнений.* Успехи матем. наук, **40**, №6, 41-78 (1985)

[86] Yu.S.Ilyashenko. *Finiteness theorems for limit cycles.* Providence, R.I.: Amer. Math. Soc. (1991)

[87] J.Ecalle. *Fonctions analysable et solution constructive du probleme de Dulac.* Paris: Hermann (1992)

[88] Ж.-К.Йоккоз. *Ненакопление предельных циклов.* В кн.: Труды семинара Н.Бурбаки за 1988 г., под ред. А.Н.Варченко. М.: Мир, 121-140 (1990)

[89] W.Balser. *From divergent power series to analytic functions.* Berlin etc.: Springer (1994)

[90] И.Г.Петровский, Е.М.Ландис. *О числе предельных циклов уравнения* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, *где* P *и* Q *—многочлены 2-ой степени.* Матем. сб., **37**, №2, 209-250 (1955)

[91] Е.М.Ландис, И.Г.Петровский. *О числе предельных циклов уравнения* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, *где* P *и* Q *—полиномы.* Матем. сб., **43**, №2, 149-168 (1957)

[92] И.Г.Петровский, Е.М.Ландис. *Поправки к статьям «О числе предельных циклов уравнения* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, *где* P *и* Q *—многочлены 2-ой степени» и «О числе предельных циклов уравнения* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, *где* P *и* Q *—полиномы».* Матем. сб., **48**, №2, 253-255 (1959)

[93] Е.М.Ландис, И.Г.Петровский. *Письмо в редакцию.* Матем. сб., **73**, №1, 160 (1967)

[94] В.В.Амелькин, Н.А.Лукашевич, А.П.Садовский. *Нелинейные колебания в системах второго порядка.* Минск: Изд-во БГУ (1982)

[95] A.Kotova, V. Stantso. *On few-parameter generic families of vector fields on the two-dimensional sphere.* In: Concerning Hilbert 16th problem. (Edit. Yu Ilyashenko, S.Yakovenko). AMS translations, ser.2, **165**, 155–201 (1995)

[96] M.Ratner. *Interactions between ergodic theory, Lie groups, and number theory.* Proc. Intern. Congr. Math., Zürich, Switzerland, 1994. Basel: Birkhäuser, 157-182 (1995)

[97] А.В.Сафонов, А.Н.Старков, А.М.Стёпин. *Динамические системы с транзитивной группой симметрий. Геометрические и статистические свойства.* В кн.: Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления, **66**. Динамические системы —9. М.: ВИНИТИ, 187-242 (1991)

[98] А.Н.Старков. *Новый прогресс в теории однородных потоков.* Успехи мат. наук, **52**, №4, 87-192 (1997)

[99] A.Starkov. *Fuchsian groups from the dynamical viewpoint.* J. of dynam. and control syst., **1**, №3, 427-445 (1995)

[100] G.Margulis. *Oppenheim conjecture.* In: Fields Medalists' Lectures. Rover Edge, N.Y.: World Scientific Publ., (1997)

[101] Д.В.Аносов, И.У.Бронштейн, С.Х.Арансон, В.З.Гринес. *Гладкие динамические системы.* В кн.: Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления, **1**. Динамические системы —1. М.: ВИНИТИ, 151-242 (1985)

[102] И.Тамура. *Топология слоений.* М.: Мир (1979)

[103] K.Kuperberg. *A smooth counterexample to the Seifert conjecture.* Ann. Math., **140**, №3, 723-732 (1994)

[104] G.Kuperberg, K.Kuperberg. *Generalized counterexamples to the Seifert conjecture.* Ann. Math., **144**, №2, 239-268 (1996)

[105] H.Hofer. *Pseudoholomorphic curves in symplectization with applications to the Weinstein conjecture in dimension three.* Invent. Math., **114**, №3, 515-563 (1995)

[106] S.R.Fenley. *The structure of branching in Anosov flows of 3-manifolds.* Comment. math. Helv., **73**, 259-297 (1997)

[107] П.Пансю. *Геодезический поток на римановых многообразиях отрицательной кривизны.* В кн.: Труды семинара Н.Бурбаки за 1991 г., под ред. В.А.Васильева и М.И.Монастырского. М.: Мир, 226-250 (1998)

[108] G.Knieper. *The uniqueness of the measure of maximal entropy for geodesic flows on rank 1 manifolds.* Ann. Math., **148**, 291-314 (1998)

[109] М.Л.Бялый, Л.В.Полтерович. *Геодезические потоки на двумерном торе и фазовые переходы «соизмеримость — несоизмеримость».* Функц. анализ и его прил., **20**, №4, 9-16 (1986)

[110] Л.В.Полтерович. *Геодезические на двумерном торе с двумя числами вращения.* Изв. АН СССР. Сер. мат., **52**, №4, 774-787 (1988)

[111] V.Bangert. *Mather sets for twist maps and geodesics on tori.* In: U.Kirchgraber, H.O.Walter (ed.). Dynamics Reported, **1**, Chichester-Stuttgart: John Wiley and B.G.Teubner, 1-56 (1988)

[112] A.Fathi. *Theoreme KAM faible et theorie de Mather sur les systemes lagrangiens.* C.R.Acad.Sci.Paris, Ser.I Math., **324**, №9, 1043–1046 (1997)

[113] R.Mãñé. *Lagrangian flows: the dynamics of globally minimizing orbits.* Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.), **28**, №2, 141–153 (1997)

[114] G.Contreras, R. Iturriaga,G.P.Paternain, M.Paternain. *Lagrangian graphs, minimizing measures and Mane's critical values.* Geometric and Functional Analysis, **8**, №5, 788–809 (1998)

[115] А.Д.Брюно. *Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях.* М.: Наука–Физматлит (1998)

[116] Е.Ф.Мищенко, Н.Х.Розов. *Дифференциальные уравнения с малым параметром при старшей производной и релаксационные колебания.* М.: Наука (1975)

[117] Е.Ф.Мищенко, Ю.С.Колесов, А.Ю.Колесов, Н.Х.Розов. *Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущённых системах.* М.: Физматлит (1995)

[118] П.Картье. *Сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений и нестандартный анализ.* Успехи мат. наук, **39**, №2, 57-76 (1984)

[119] А.К.Звонкин, М.А.Шубин. *Нестандартный анализ и сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений.* Успехи мат. наук, **39**, №2, 77-127 (1984)

[120] W.Eckhaus. *Relaxation oscillations including a standard chase on french ducks.* Lect. Notes in Math., **985**. Berlin etc.: Springer, 449-494 (1983)

[121] В.И.Арнольд, В.В.Козлов, А.И.Нейштадт. *Математические аспекты классической и небесной механики.* Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления, **3**. Динамические системы —3. М.: ВИНИТИ (1985)

[122] А.И.Нейштадт. *О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях, I.* Дифференц. уравнения, 1987, **23**, №12, 2060-2067 (1987)

[123] А.И.Нейштадт. *О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях, II.* Дифференц. уравнения, **24**, №2, 226-233 (1988)

[124] E.Benoit (ed.). Dynamic bifurcations. Lect. Notes in Math., **1493**. Berlin etc.: Springer (1991)

[125] A.I.Neishtadt, C.Simo., D.V.Treschev. *On stability loss delay for a periodic trajectory.* In: H.Broer et al. (eds.). Nonlinear dynamical systems and chaos. Progress in nonlinear diff. equations and their applications, **.19**. Basel: Birkhauser, 253-278 (1996)

[126] В.И.Бахтин. *Об усреднении в многочастотных системах.* Функц. анализ и его прил., **20**, №2, 1-7 (1986)

[127] Д.В.Трещёв. *Введение в теорию возмущений гамильтоновых систем.* М.: Фазис (1998)

[128] C.Simo. *Averaging under fast quasi-periodic forcing.* In: Hamiltonian mechanics, integrability and chaotic behaviour, J.Seimenis (ed.). NATO ASI Inst. Ser. B., Phys.. **331**. N.Y.: Plenum Press, 11-34 (1994)

[129] В.Ф.Лазуткин. *Аналитические интегралы полустандартного отображения и расщепление сепаратрис.* Алгебра и анализ, **1**, №2, 116-131 (1989)

[130] V.F.Lazutkin. *An analitic integral along the separatrix of the semistandard map: existence and an exponential estimate for the distance betwen the stable and unstable separatrices.* Алгебра и анализ, **4**, №4, 110-142 (1992)

[131] A.Delshams, V.Gelfreich, A.Jorba, T.M.Seara. *Exponentially small splitting of separatrices under fast quasiperiodic forcing.* Commun. Math. Phys., **189**, №1, 35-71 (1997)

[132] J.A.Ellison, M.Kummer, A.W.Saenz. *Transcendentally small transversality in the rapidly forced pendulum.* J. Dyn. Diff. Eqns, **5**, 241-277 (1993)

[133] J.Pöschel. *Nekhoroshev estimates for quasi-convex Hamiltonian systems.* Math. Z., **213**, №2, 187–216 (1993)

[134] П.Лошак. *Каноническая теория возмущений: подход, основанный на совместных приближениях.* Успехи мат. наук, **47**, №6, 59-140 (1992)

[135] P.Lochak, A.I.Neishtadt. Estimates of stability time for nearly integrable systems with a quasiconvex Hamiltonian. Chaos, **2**, №4, 495-499 (1992)

[136] А.Б.Каток. *Гипотеза об энтропии.* В кн.: Гладкие динамические системы, под ред. Д.В.Аносова. М.: Мир, 181-203 (1977)

[137] Y.Yomdin. *Volume growth and entropy.* Israel J.Math., **57**, №3, 285-300 (1987)

[138] Y.Yomdin. *C^k-reduction of semialgebraic mappings. Addendum to “ Volume growth and entropy».* Israel J.Math., **57**, №3, 301-317 (1987)

[139] М.Громов. *Энтропия, гомологии и полуалгебраическая геометрия.* В кн.: Математический анализ и геометрия, под ред. А.Н.Варченко. Избранные труды семинара Н.Бурбаки. М.: Мир, 207-223 (1990)

[140] М.Оден. *Вращающиеся волчки: курс интегрируемых систем.* Ижевск: Удмурдский университет (1999)

[141] В.В.Козлов. *Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой динамике.* Успехи мат. наук, **38**, №1, 3-67 (1983)

[142] В,В,Козлов. *Симметрия, топология и резонансы в гамильтоновой механике.* Ижевск: Изд-во УдГУ (1995)

[143] И.А.Тайманов. *Топология римановых многообразий с интегрируемыми геодезическими потоками.* В кн: Новые результаты в теории топологической классификации интегрируемых систем. Труды МИАН, **205**, М.: Наука, 150-163 (1994)

[144] Ch.Conley. *Isolated invariant sets and the Morse index.* Conf. board math. sci. Regional conf. ser. in math., **38**. Providence: Amer. Math. Soc. (1978)

[145] K.Mischaikow. *Conley index theory.* In: Dynamical systems (Montecatini Terme, 1994). Lecture Notes in Math., **1609**. Berlin etc.: Springer, 119–207 (1995)

[146] J.N.Mather, R.McGehee. *Solutions of the collinear four-body roblem problem which become unbounded in finite time.* Lect. Notes in Phys., **38**. Berlin etc.: Springer, 573-597 (1975)

[147] Zh.Xia. *The existence of noncollision singularities in newtonian systems.* Ann. Math., **135**, №3, 411-468 (1992)

[148] M.Grayson, C.Pugh, M.Shub. *Stably ergodic diffeomorphisms.* Ann. Math., **140**, №2, 295-329 (1994)

[149] C.Pugh, M.Shub. Stably ergodic dynamical systems and partial hyperbolicity. J. of complexity, **13**, 125-179

[150] C.Pugh, M.Shub. *Stable ergodicity and partial hyperbolicity.* In: F.Ledrappier et al. (ed.), Internat. conf. on dynamical systems, Montevideo 1995, a tribute to R.Mãné. Pitman research notes in math., **365**. London: Pitman publ., 182-187

[151] R.Adler, B.Kitchens, M.Shub. *Stably ergodic skew products.* Discrete and continuous dynamical systems, **2**, 349-351 (1996)

[152] W.Parry, M.Pollicott. Stability of mixing for toral extensions of hyperbolic systems. В кн.: Динамические системы и смежные вопросы. Труды МИАН, **216**, М.: Наука, 354-363 (1997)

[153] H.Furstenberg. *Poincáre recurrence and number theory.* Bull. Amer. Math. Soc., **5**, №3, 211-234 (1981)

[154] H.Furstenberg, Y.Katznelson, D.Ornstein. *The ergodic theoretical proof of Szemerédy's theorem.* Bull. Amer. Math. Soc., **7**, №3, 527-552 (1982)

[155] H.Furstenberg. *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory.* Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press (1981)

[156] R.J.Zimmer. *Extensions of ergodic group actions.* Illinois J. of math., **20**, №3, 373-409 (1976)

[157] R.J.Zimmer. *Ergodic actions with generalized discrete spectrum.* Illinois J. of math., **20**, №4, 555-588 (1976)

[158] G.R.Goodson. *A survey of recent results in the spectral theory of ergodic dynamical systems.* J. of dynam. and control syst., **5**, №2, 173-226 (1999)

[159] О.Н.Агеев. *Функция кратности спектра и геометрические представления перекладывания.* Мат. сб., **190**, №1, 3-28 (1999)

[160] О.Н.Агеев. *О функции кратности спектра динамических систем.* Мат. заметки, **65**, №4, 619-621 (1999)

[161] И.П.Корнфельд, Я.Г.Синай. *Энтропийная теория динамических систем.* В кн.: Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления, **2**. Динамические системы —2. М.: ВИНИТИ, 44-70 (1985)

[162] S.Ferenczi. *Systems of finite rank.* Colloq. Math., **73**, №1, 35-65 (1997)

[163] J.-P.Thouvenot. *Some properties and applications of joinings in ergodic theory.* Proceedings of the 1993 Alexandria Conference, Ergodic theory and its connections with harmonic analysis. Cambridge Univ. Press, 207-238 (1995)

[164] V.V.Ryzhikov. *Around simple dynamical systems. Induced joinings and multiple mixing.* J. of dynam. and control syst., **3**, №1, 111-127 (1997)