В. И. Арнольд

Лекция 21 мая 1997 года

Таинственные математические троицы

Я постараюсь рассказать о некоторых удивляющих меня явлениях в математике. В большинстве случаев они не формализованы. Их даже нельзя сформулировать в виде гипотез. Гипотеза отличается тем, что ее можно опровергнуть: она либо верна, либо неверна.

Речь пойдет об определенных наблюдениях, которые приводят к очень большому числу теорем и гипотез, которые уже можно проверять или опровергать. Но интерес, который они представляют, состоит в общей точке зрения.

Объясню эту общую точку зрения на простом примере —на примере линейной алгебры.

Теория линейных операторов описывается в современной математике как теория алгебр Ли серии A_n, т. е. $\mathfrak{sl}(n+1)$, и формулируется в терминах систем корней. Система корней сопоставляется любой группе Коксетера, т. е. конечной группе, порожденной отражениями (во всяком случае, кристаллографической). Если взять какое-нибудь утверждение линейной алгебры, относящееся к этому частному случаю этой группы A_n, и изгнать всё содержание из формулировки, так чтобы там больше не шло речи ни о собственных числах, ни о собственных векторах, а оставались бы только одни корни, то результат можно будет сформулировать и для других серий: B_n, C_n, D_n и даже исключительных E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 (а иногда даже и для всех систем Коксетера, включая и некристаллографические группы симметрий многоугольников, икосаэдра и гиперикосаэдра, живущего в четырехмерном пространстве).

С этой точки зрения геометрии других серий (B, C, ...) —не геометрии векторных пространств с дополнительными структурами (евклидовой, сипмлектической и т. д.), каковыми они, конечно, формально являются, не дочери A-геометрии, а равноправные ее сестры.

Приведенная классификация простых алгебр Ли, принадлежащая Киллингу (и приписываемая поэтому Картану), имеет аналог в бесконечномерном случае, в анализе. Алгебраическая задача, решенная Киллингом, Картаном, Коксетером, имеет бесконечномерный аналог в теории алгебр Ли групп диффеоморфизмов. Если имеется многообразие M, то естественно возникает группа $\mathrm{Diff}(M)$ всех диффеоморфизмов многообразия M. Эта группа (точнее, компонента связности единицы в этой группе) в алгебраическом смысле простая, т.е. у нее нет нормальных делителей. Имеются также другие аналогичные «простые» теории, похожие на геометрию многообразий, но от нее отличающиеся. Они тоже были расклассифицированы в свое время Картаном. Наложив небольшое число достаточно естественных ограничений, он обнаружил, что имеются 6 серий таких групп:

$\mathrm{Diff}(M)$,

$\mathrm{SDiff}(M)$ —группа диффеоморфизмов, сохраняющих заданную форму объема,

$\mathrm{SpDiff}(M, \omega^2)$ —группа симплектоморфизмов,

Затем имеются комплексные многообразия и группы голоморфных диффеоморфизмов.

Есть также очень важная контактная группа, группа контактоморфизмов.

Потом имеются конформные версии некоторых из них. Я не буду описывать их подробно.

Идея, о которой я говорил, заключается в том, что здесь также имеется нечто, аналогичное переходу от теорем линейной алгебры, т. е. системы корней A_n, к остальным системам корней. Иными словами, для всей математики, для всей геометрии многообразий, имеются такие операции высшего уровня (например, симплектизация), которые каждому определению и каждой теореме в теории многообразий сопоставляют их аналоги в теории многообразий с элементом объема или симплектических многообразий. Но это лишь грубо говоря, эта операция —не настоящий функтор.

Например, элемент алгебры Ли группы диффеоморфизмов есть векторное поле. Симплектизация векторного поля —это гамильтоново поле, задающее уравнение Гамильтона

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

В других ситуациях все сложнее. Трудно понять, во что превращается то или иное понятие линейной алгебры при переходе к другим геометриям. Ведь даже в случае группы симплектоморфизмов берется не вся

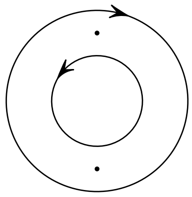

Рис. 1.

алгебра Ли этой группы, а только те векторные поля, которые задаются однозначной функцией Гамильтона. Это —коммутатор алгебры Ли, а не сама алгебра Ли группы симплектоморфизмов. И все же, когда удается найти правильные аналоги каких-либо понятий одной геометрии в другой, награда бывает весьма значительной.

Разберем два примера.

1. Симплектизация. Так называемые гипотезы Арнольда (1965) о неподвижных точках симплектоморфизмов были сформулированы при попытке симплектизировать теорему Пуанкаре – Эйлера о том, что сумма индексов особых точек векторного поля на многообразии равна эйлеровой характеристике. Они оценивают через неравенства Морса (т. е. через число критических точек функции на многообразии) число замкнутых траекторий для гамильтоновых векторных полей.

Начнем с того, что сформулируем следующее более простое утверждение. Оно было высказано Пуанкаре в виде гипотезы и доказано Биркгофом.

Теорема 1. *Пусть диффеоморфизм кругового кольца на себя сохраняет площади, причем при его действии точки каждой из ограничивающих его окружностей перемещаются в одном и том же направлении, а точки различных окружностей движутся в противоположных направлениях* (рис. 1). *Тогда диффеоморфизм имеет хотя бы две неподвижные точки.*

Это утверждение вытекает из чуть более общей теоремы о неподвижных точках диффеоморфизмов тора.

Теорема 2. *Пусть диффеоморфизм F тора $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ задается формулой $x \mapsto x+f(x)$ в стандартной системе координат. Пусть F сохраняет площади и «сохраняет центр тяжести», т. е. среднее значение функции f (рассматриваемой как функция на торе со стандартной метрикой) равно нулю. Тогда F имеет не менее четырех неподвижных точек.*

Это связано с тем, что сумма чисел Бетти тора равна 4.

Первое доказательство этой теоремы получено Я. Элиашбергом. Но это доказательство никто не проверил. Заведомо правильное доказательство было опубликовано в 1983 г. Конли и Цендером, и это доказательство положило начало развитию целой большой теории —симплектической топологии (в работах Шаперона, Лауденбаха, Сикорава, Чеканова, Громова, Флоера, Хофера, Гивенталя и многих других). В последние месяцы появились сообщения, что и первоначальные гипотезы (о том, что число неподвижных точек точного симплектоморфизма не меньше минимального числа критических точек функции на многообразии, хотя бы для симплектоморфизмов и функций общего положения) наконец доказаны (несколькими независимыми группами в разных странах).

2. Другой пример: переход от $\mathbb{R}$ к $\mathbb{C}$. На этом примере, возможно, проще объяснить, в чем состоит дело. Речь пойдет о переходе от вещественного случая к комплексному. Имеется вещественная геометрия и имеется комплексная геометрия. Каким образом от вещественной геометрии перейти к комплексной геометрии? Например, в вещественной геометрии есть понятие многообразия с краем, на котором основаны такие понятия, как гомологии и гомотопии. И вообще вся топология существенным образом использует понятие края.

Можно поставить вопрос: во что превращается понятие края при комплексификации?

Если мы предполагаем, что всю математику можно комплексифицировать, то, в частности, можно комплексифицировать и различные понятия математики. Давайте составим таблицу, во что превращаются разные понятия математики при комплексификации.

Комплексификацией вещественных чисел являются, очевидно, комплексные числа. Здесь дело обстоит очень просто.

В вещественном случае имеется теория Морса. У функции есть критические точки и критические значения. Теория Морса описывает, как меняется множество уровня при переходе через критическое значение. Что же получится при попытке комплексифицировать теорию Морса?

Комплексификацией вещественных функций являются голоморфные (комплексно-аналитические функции). Их множества уровня имеют комплексную коразмерность 1, т. е. вещественную коразмерность 2. В частности, они не разделяют объемлющее многообразие; дополнение к множеству уровня вовсе не будет несвязным.

В вещественном случае множество критических значений функции разделяет вещественную прямую. Поэтому при прохождении через критическое значение топология множества уровня, вообще говоря, меняется. Для комплексно-аналитических функций это не так. Их множества критических значений не разделяют плоскости комплексной переменной. Поэтому в комплексном случае множества уровня функции, отвечающие разным некритическим значениям, топологически устроены одинаково. Но при обходе вокруг критического значения возникает монодромия. Она является отображением множества уровня в себя (определенным с точностью до изотопии).

В вещественном случае дополнение к критическому значению состоит из двух компонент, т. е. его гомотопическая группа π_0 есть $\mathbb{Z}_2$. В комплексном случае дополнение к критическому значению связно и имеет фундаментальную группу $\mathbb{Z}$. Поэтому комплексификацией π_0 естественно считать π_1 и комплексификацией группы $\mathbb{Z}_2$ будем считать группу $\mathbb{Z}$.

Оказывается, эта точка зрения вполне последовательно проходит и дальше. Комплексификацией перестроек Морса (связанных с элементами группы π_0 множества некритических значений вещественной функции) является монодромия (представление группы π_1 множества некритических значений комплексной функции).

Описание монодромии дается теорией Пикара – Лефшеца, которая является теорией ветвления интегралов. В этом смысле можно считать, что комплексификацией теории Морса является теория Пикара – Лефшеца. Комплексификацией перестройки Морса (приклеивания ручки к множеству уровня) будем считать монодромию в окрестности невырожденной критической точки голоморфной функции. Эта операция —так называемое преобразование Зейферта, т. е. перекручивание цикла на множестве уровня. Она заключается в скручивании цилиндра, при котором одно основание цилиндра остается неподвижным, а другое основание совершает полный оборот. В обоих случаях, вещественном и комплексном, простейшая операция соответствует особой точке, задаваемой суммой квадратов.

Можно идти и дальше. В вещественной теории есть классы Штифеля – Уитни со значениями в $\mathbb{Z}_2$. Им при комплексификации отвечают классы Черна со значениями в $\mathbb{Z}$. Все согласовано: комплексификацией $\mathbb{Z}_2$ действительно является $\mathbb{Z}$.

Комплексификацией проективной прямой $\mathbb{RP}^1 = S^1$ является комплексная проективная прямая $\mathbb{CP}^1 = S^2$ (сфера Римана). Таким образом, сфера Римана является комплексификацией окружности. На этой сфере есть окружность —экватор. Имеется теория рядов Фурье, которые определены на этой окружности, и теория рядов Лорана, у которых имеются два полюса в полюсах сферы.

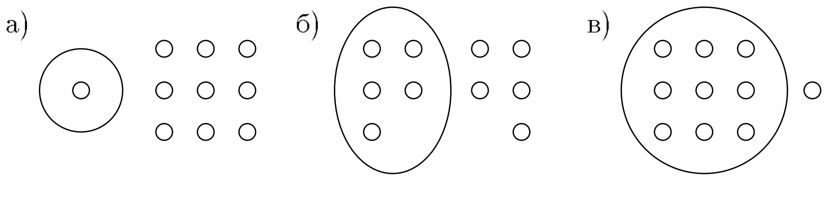

Рис. 2.

Выясним, что является комплексификацией края вещественного многообразия. Сначала следует алгебраизировать понятие края. Многообразие с краем задается неравенством вида $f(x) \geq 0$. Правильной комплексификацией этого неравенства является уравнение $f(x) = y^2$. Это уравнение определяет гиперповерхность в (x, y)-пространстве, стандартная проекция которой на x-пространство задает двулистное разветвленное накрытие с ветвлением вдоль края. Таким образом, комплексификацией многообразия с краем является двулистное накрытие с ветвлением над комплексным краем.

Эта точка зрения оказалась весьма плодотворной. Трюк с накрытием я придумал в 1970 г., когда занимался 16-й проблемой Гильберта о расположении овалов алгебраической кривой заданной степени n. Многочлен степени n от двух переменных задает на (вещественной проективной) плоскости некоторый набор кривых. Проблема Гильберта состоит в том, чтобы выяснить, какие расположения возможны при данном n. В случае, когда $n = 1$ или $n = 2$, эту задачу решили древние греки. Случаи $n = 3$, 4 были исследованы Декартом, Ньютоном. Случай $n = 5$ тоже был исследован, а случай $n = 6$ не поддавался до второй половины этого века, и он уже прямо входил в проблему Гильберта. Эта часть проблемы была решена Д. А. Гудковым.

Для степени 8 вопрос о том, как могут располагаться эти овалы, открыт, даже для кривых общего положения.

Для $n = 6$ ответ на этот вопрос был получен Гудковым. А именно, максимально возможное число овалов равно 11. При этом они могут располагаться на проективной плоскости следующими тремя способами:

10 овалов имеют попарно непересекающиеся внутренности, а одиннадцатый содержит либо один, либо пять, либо девять из них внутри себя (рис. 2, *а–в*). (На проективной плоскости дополнение к кругу есть лист Мёбиуса. Поэтому понятие «внутри» корректно определено).

Гудков заметил, что для всех расположений, которые удалось построить, количества овалов удовлетворяют некоторому сравнению по модулю 8. Например, числа 1, 5, 9 идут через 4, а эйлеровы характеристики множеств положительности многочленов, задающих кривые, — через 8. Во всех других примерах тоже выполняются аналогичные сравнения. Это наводит на мысль, что здесь где-то рядом имеются четырехмерные многообразия, потому что, как хорошо известно, в топологии четырехмерных многообразий сравнения по модулю 8 и по модулю 16 играют решающую роль.

Надо искать, какое с вещественной алгебраической кривой связано четырехмерное многообразие. После нескольких месяцев попыток построить подходящее четырехмерное многообразие по алгебраической кривой я в конце концов сообразил, что нужно взять именно двулистное накрытие дополнения алгебраической кривой. Применяя к этому четырехмерному многообразию мощные методы четырехмерной топологии удалось доказать, что вещественные алгебраические кривые, которые не удовлетворяют сравнениям Гудкова, не существуют (Арнольд, 1971; Рохлин, 1972). Возникшая таким образом новая область математики — вещественная алгебраическая геометрия —далеко развита позже Виро, Харламовым, Никулиным, Шустиным, Хованским и многими другими.

Для $n = 8$ доказанные ограничения оставляют примерно 90 вариантов возможного расположения двадцати двух овалов. А построено примерно 80 расположений.

Эта же самая конструкция срабатывает и в теории особенностей. Сначала были построены особенности для схем Коксетера с простыми связями, т.е. для серий A, D, E. Остаются еще B, C, F, G, у которых встречаются углы между векторами, отличные от прямых и от 120°. Эти случаи при помощи особенностей не описывались, пока я не сообразил, что нужно использовать ту же самую конструкцию двулистного разветвленного накрытия. Она позволяет построить особенности каустик и волновых фронтов, которые соответствуют остальным группам Вейля (исключая лишь G_2).

Правильность комплексификации подтверждают только полученные результаты. Сама по себе она не имеет никакого априорного определения. Положение здесь похоже на то, что было в прошлом веке, когда обнаружили, что теория интегральных уравнений параллельна теории линейных операторов. А еще раньше такая же ситуация была с проективной двойственностью. До тех пор, пока не был прояснен смысл проективной двойственности, она оставалась загадочной. Точно так же, до тех пор пока не был построен функциональный анализ, оставалось загадочным сходство теорем об интегральных уравнениях и аналогичных теорем линейной алгебры —вплоть до теорем Фредгольма.

Мы и сейчас имеем похожую ситуацию, когда физики используют операцию суммирования по непрерывному индексу, а математики не желают понимать, что это значит.

Да и раньше математики тысячелетиями использовали вещественные числа, про которые ничего строго не было известно, кроме древнегреческого открытия, что не все они существуют: никакое рациональное число, возведенное в квадрат, не может равняться двойке. А так как в греческой математике числа были только рациональные, то, с одной стороны, вещественными числами пользовались, а с другой стороны, не знали, что это такое, потому что не было строгого определения.

Вот примерно такое же положение в том, о чем я собираюсь рассказывать, —в явлении троичности.

Явление троичности

Явление троичности заключается в том, что ко всем рассмотренным выше парам добавляется еще третий член. В математике объекты очень часто встречаются тройками. И во многих случаях эти тройки образуют коммутативные диаграммы.

Простейшая тройка получается при добавлении к вещественным и комплексным числам кватернионов $\mathbb{H}$. Но есть и другие тройки.

Пример 1. *Простые алгебры Ли E_6, E_7, E_8. Им отвечают диаграммы Дынкина, изображенные на рис. 3,* а–в, *соответственно. Каждая*

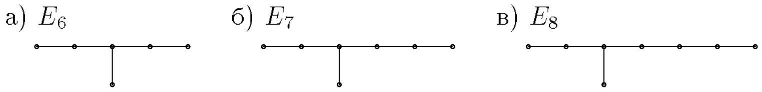

Рис. 3.

вершина графа соответствует вектору. Если вершины соединены ребром, то угол между соответствующими векторами равен $120°$, а если не соединены, то угол равен $90°$. Группа, порожденная отражениями относительно ортогональных дополнений к этим базисным векторам в евклидовом пространстве и есть группа Вейля.

Пример 2. *В канцелярских магазинах продают угольники трех типов: равносторонний треугольник, прямоугольный треугольник с углом 45 градусов и прямоугольный треугольник с углом 30 градусов. Оказывается, эти треугольники соответствуют диаграммам E_6, E_7, E_8, и образуют вместе с ними коммутативную диаграмму 3×2.*

В этой мистической теории троичностей уже имеется много нетривиальных теорем и подобных коммутативных диаграмм. О том, чтобы на этой лекции всё доказывать, не может быть и речи. Я сначала выпишу примеры, а затем объясню связи между ними.

Пример 3. *Тетраэдр, октаэдр и икосаэдр. Группы их симметрий суть, соответственно, группы Вейля A_3, B_3 и H_3. Их диаграммы Дынкина (ранее введенные Виттом и Коксетером) изображены на рис. 4.*

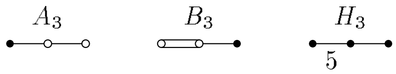

Рис. 4.

Числа ребер соответствующих многогранников равны, соответственно, 6, 12 и 30. Эти числа имеют вид $2 \cdot 3$, $3 \cdot 4$, $5 \cdot 6$. *Если из первых чисел в этих произведениях вычесть по единице, то, как и следовало ожидать, получим 1, 2 и 4 —вещественные размерности* $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ *и* $\mathbb{H}$.

Опишем группу симметрий тетраэдра. Она порождается отражениями относительно его плоскостей симметрии, число которых равно числу ребер, т. е. 6. Эти плоскости делят пространство на 24 части, называемые камерами Вейля. Опишем эти камеры. Все плоскости проходят через центр. Поэтому их можно изображать проективными прямыми в $\mathbb{RP}^2$. *Эти прямые делят проективную плоскость на 12 частей (см. рис. 5). Возьмем одну из этих частей. Она соот-*

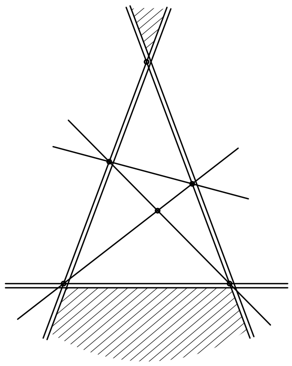

Рис. 5.

ветствует трехгранному углу, который на проективной плоскости *изображается в виде треугольника (на рис. 5 треугольник заштрихован). Продолжим стороны этого треугольника (на рис. 5 —двойные линии). В модели в трехмерном пространстве этим трем прямым соответствуют 3 плоскости, проходящие через начало координат. Они делят пространство на 8 частей. На проективной плоскости им соответствуют 4 части, т. е. 4 больших треугольника, составленных из 12 маленьких треугольников. В больших треугольниках содержится, соответственно, 1, 3, 3 и 5 маленьких треугольников (на рис. 5 как настоящий выглядит только один из больших треугольников, который состоит из пяти маленьких). Поэтому получаем такую формулу:*

$$24 = 2(1 + 3 + 3 + 5).$$

Число камер —24 —есть, конечно, порядок группы симметрий тетраэдра. Аналогично порядок группы симметрии октаэдра равен

$$48 = 2(1 + 5 + 7 + 11),$$

а для икосаэдра находим

$$120 = 2(1 + 11 + 19 + 29).$$

Заметим, что если слагаемые в этих трех формулах увеличить на 1, то мы получим системы весов (степеней базисных инвариантов) для A_4, B_4 *и* H_4, *соответственно. Кстати, эти веса —в точности числа вершин, граней и ребер тетраэдра, октаэдра и икосаэдра (двойка —это, возможно, число трехмерных граней?)*

По многогранникам, отвечающим перечисленным группам Вейля, выписываются многочлены:

$$\begin{array}{lll} E_6 = x^3 + y^4 + z^2, & E_7 = x^3 + xy^3 + z^2, & E_8 = x^3 + y^5 + z^2 \\ \widetilde{E}_6 = x^3 + y^3 + z^3, & \widetilde{E}_7 = x^4 + y^4 + z^2, & \widetilde{E}_8 = x^3 + y^6 + z^2 \end{array}$$

Соответствующие особенности называются эллиптическими и параболическими (последние связаны с так называемыми аффинными системами корней). Переход от многогранника к многочлену будет вкратце описан ниже.

Продолжим список троиц.

Характеристические классы:

классы Штифеля – Уитни, классы Черна, классы Понтрягина.

Дальше идет такая строчка-троица:

$$S^1 \to S^1 = \mathbb{RP}^1, \quad S^3 \to S^2 = \mathbb{CP}^1, \quad S^7 \to S^4 = \mathbb{H}P^1.$$

Первое отображение есть двулистное накрытие края листа Мебиуса над его базой S^1. Второе —расслоение Хопфа со слоем S^1. Из этого, кстати сказать, видно, что комплексификация —деликатная операция. Дело в том, что комплексификация S^1 в одном случае —S^3, а в другом —S^2. Это объясняется тем, что в накрытии листа Мебиуса две окружности совершенно различны. Одна окружность —$\mathbb{RP}^1$, а другая —$SO(2)$. При комплексификации $\mathbb{RP}^1$ превращается в $\mathbb{CP}^1$, а $SO(2)$ превращается в $SU(2) \cong S^3$.

Третье отображение —расслоение Хопфа со слоем S^3.

Я выпишу еще несколько троиц. За следующие две строчки я еще более или менее отвечаю, а смысл идущих за ними строчек пока еще не вполне ясен.

S^0-расслоение, S^1-расслоение, $SU(2)$-расслоение?

В первом случае речь идет просто о двулистном накрытии, во втором —о расслоении на комплексные прямые, в третьем —видимо, о расслоении на кватернионные прямые (снабженные, быть может, некоторой «гиперсвязностью», комплексифицирующей комплексную связность второго случая).

Им соответствуют:

монодромия плоской связности, кривизна связности (2-форма), 4-форма (гиперкривизна?)

Скрученность объектов, обозначенных знаком вопроса, должны измерять какие-то 4-формы, приводящие к характеристическим классам Понтрягина. Они должны измерять какую-то гиперкэлерову несогласованность комплексных структур.

Еще одна троица:

многочлены, тригонометрические многочлены, модулярные многочлены.

Многочлены —это такие голоморфные отображения сферы в сферу, у которых число прообразов бесконечности равно 1. Тригонометрические многочлены —это лорановские многочлены из $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$, у которых число прообразов одной из точек равно 2. Модулярные многочлены —это рациональные функции, у которых прообраз одной из точек состоит из трех точек: 0, 1, ∞.

Последнюю троицу предложил Гивенталь:

гомологии, K-теория, эллиптические гомологии.

Как было сказано ранее, многограннику, отвечающему группе Вейля, соответствует многочлен от трех переменных. Опишем это соответствие на примере икосаэдра, группа симметрий которого состоит из 120 элементов. Симметрии, сохраняющие ориентацию, образуют в $SO(3) \cong \mathbb{RP}^3$ подгруппу порядка 60. Рассмотрим двулистное накрытие группы $SO(3)$ группой $\mathrm{Spin}(3) = SU(2) \cong S^3$. Каждому элементу группы $SO(3)$ отвечают две точки из S^3. Рассматриваемой подгруппе из 60 точек в $SO(3)$ отвечают 120 точек на S^3. Эти точки и образуют бинарную группу икосаэдра.

Бинарная группа икосаэдра содержится в $SU(2)$, поэтому она действует на $\mathbb{C}^2$. Обозначим через X пространство орбит этого действия. Пространство орбит X —двумерная комплексная поверхность с особенностями, вложенная в $\mathbb{C}^3$. Она описывается уравнением $x^3 + y^5 + z^2 = 0$. Это доказывается с помощью теории инвариантов. А именно, мы ищем базисные инварианты. Ими будут бинарные формы с нулями в вершинах, серединах ребер и центрах граней икосаэдра соответственно. Степени этих бинарных форм равны 12, 20 и 30. Затем ищем соотношение между ними —так называемую сизигию. Эту сизигию нашел в прошлом веке Шварц. При надлежащей нормировке базисных инвариантов x, y и z она принимает вид $x^3 + y^5 + z^2 = 0$.

Поясним теперь, как по формулам (многочленам) можно построить E_6, E_7 и E_8. Вместо того чтобы приравнивать многочлены нулю, приравняем их некоторому $\varepsilon \neq 0$, т. е. рассмотрим поверхность $x^3 + y^5 + z^2 = \varepsilon \neq 0$ —так называемый слой Милнора. Для слоя Милнора можно рассмотреть гомологии средней размерности. Слой Милнора —двумерное комплексное многообразие; его вещественная размерность равна 4, поэтому средняя размерность равна 2. В двумерных гомологиях слоя Милнора действует группа монодромии, которая описывается путями в базе версальной деформации. Когда мы обходим вокруг дискриминанта соответствующего семейства многочленов, у которого такая особая точка при самом плохом значении параметра, то возникает теория Пикара–Лефшеца, которая описывает отображения слоя Милнора на себя. Оказывается, форма пересечения слоя Милнора и есть та самая евклидова структура, в которой базисные циклы задаются диаграммой Дынкина, и соответствующая простейшему обходу вокруг дискриминанта монодромия (преобразование Зейферта) как раз является отражением в соответствующем зеркале. Поэтому группы E_6, E_7 и E_8 —это группы монодромии, которые соответствуют особенностям, задаваемым указанными многочленами.

Наконец, объясним, как из многогранников получаются $\widetilde{E}_6$, $\widetilde{E}_7$ и $\widetilde{E}_8$. Для этого нужно взять простейшее стандартное представление соответствующей группы симметрий многогранника в двумерном пространстве и рассмотреть тензорное произведение какого-нибудь представления на стандартное. Это тензорное произведение разлагается на неприводимые слагаемые, которые входят с какими-то коэффициентами. Матрица этих коэффициентов —это «матрица Картана», описывающая соответствующую аффинную систему корней.

Вот итоговая таблица троиц:

$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$
E_6	E_7	E_8
A_3	B_3	H_3
D_4	F_4	H_4
$x^3+y^4+z^2$	$x^3+xy^3+z^2$	$x^3+y^5+z^2$
$x^3+y^3+z^3$	$x^4+y^4+z^2$	$x^3+y^6+z^2$
$60°, 60°, 60°$	$45°, 45°, 90°$	$30°, 60°, 90°$
тетраэдр	октаэдр	икосаэдр
$6=2\cdot 3$	$12=3\cdot 4$	$30=5\cdot 6$
квадратичные формы	эрмитовы формы	гиперэрмитовы формы
классы Штифеля – Уитни	классы Черна	классы Понтрягина
$S^1\to S^1=\mathbb{RP}^1$	$S^3\to S^2=\mathbb{CP}^1$	$S^7\to S^4=\mathbb{H}P^1$
двулистные накрытия	S^1-расслоения	$SU(2)$-расслоения
монодромия плоской связности	кривизна связности (2-форма)	4-формы (гиперкривизна?)
многочлены	тригонометрические многочлены	модулярные многочлены
гомологии	K-теория	эллиптические гомологии

Принцип топологической экономии в алгебраической геометрии

Эта часть лекции не связана с первой частью, так что ее можно понимать независимо от предыдущего. Начнем с примера.

Пример 1. *Рассмотрим в $\mathbb{CP}^n$ два алгебраических многообразия X и Y дополнительных размерностей. В общем положении они пересекаются по конечному множеству точек. Пусть $[X]$ и $[Y]$ —классы гомологий, реализуемые многообразиями X и Y, $[X]\circ[Y]$ —индекс пересечения этих классов (являющийся целым числом). Он равен числу «положительных» точек пересечения X с Y минус число «отрицательных» пересечений. Таким образом, общее число точек пересечения $\#(X\cap Y)$*

не меньше индекса пересечения $[X]\circ[Y]$ *(и имеет ту же четность).* Теорема Безу *утверждает, что* $\#(X\cap Y)$ *равно числу* $[X]\circ[Y]$*, никакого неравенства нет! Здесь дело в том, что у комплексных многообразий ориентация такова, что каждое пересечение дает вклад* $+1$*, а не* -1*, в суммарный индекс пересечения. Отрицательные пересечения «неэкономны», они увеличивают число точек пересечения* X *с* Y *по сравнению с «топологически необходимым» их количеством. Кстати, отсюда же следует, что многочлен степени* n *имеет ровно* n *корней, а не больше.*

Этот известный и следующие (более новые) примеры приводят к «принципу экономии», с помощью которого, в свою очередь, можно получать дальнейшие гипотезы. Эти гипотезы можно проверять в частных случаях и иногда можно доказать —тогда они становятся теоремами. Но в большинстве случаев они надолго остаются гипотезами, т.е. утверждениями, которые можно опровергать.

Пример 2. *Следующее утверждение долго являлось гипотезой. Рассмотрим в* $\mathbb{CP}^2$ *риманову поверхность* X *рода* g*, заданную неприводимым многочленом степени* n*. Ее класс гомологий* $[X]\subset H_2(\mathbb{CP}^2,\mathbb{Z})$ *есть* n *раз взятая образующая* $[\mathbb{CP}^1]$ *группы* $H_2(\mathbb{CP}^2,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$*; это число* n *равно степени многочлена. Известно, что род* g *поверхности* X *можно найти по формуле Римана (некоторые, впрочем, говорят, что Риман не знал, что такое род). А именно,*

$$g=\frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Возникает вопрос, нельзя ли класс гомологий $[X]$ *реализовать другой гладкой поверхностью, пусть не комплексной, а вещественной, но меньшего рода? Другими словами, реализует ли комплексное алгебраическое многообразие минимальный род для данного класса гомологий* $[X]$*?* Гипотеза Тома *утверждает, что комплексная поверхность с* $g=(n-1)(n-2)/2$ *ручками —это действительно самая экономная реализация класса* $n\cdot[\mathbb{CP}^1]\subset H_2(\mathbb{CP}^2,\mathbb{Z})$*. Любая гладкая вещественная поверхность, реализующая этот класс, имеет столько же ручек или больше. Доказательство было получено лишь недавно Кронхаймером (Kronheimer) и Мровкой (Mrowka) при помощи «тяжелой артиллерии», а именно, теории Дональдсона, Громова, Виттена и т. д., восходящей к идеям квантовой теории поля.*

Пример 3. *Гипотеза Милнора. Эта гипотеза также доказана недавно теми же авторами. Если задан произвольный узел, то всегда мож-*

но за несколько развязываний превратить его в незаузленную окружность. Развязывание —это замена прохода на переход (прохождения сверху ни прохождение снизу) на подходящей диаграмме (т. е. проекции на плоскость) данного узла. Выполняется развязывание при помощи меча; тем же методом Александр Македонский развязывал гордиев узел. Гордиево число узла —это минимальное число развязываний, необходимое для превращения заданного узла в тривиальный.

Узлы связаны с особенностями следующим образом. Рассмотрим алгебраическую кривую K^2 с особенностью в начале координат и маленькую сферу $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ с центром в нуле. Пересечение $N^1 = K^2 \cap S^3$ является узлом (или зацеплением) в S^3. Например, полукубическая особенность $x^2 = y^3$ кривой в $\mathbb{C}^2$ соответствует трилистниковому узлу.[1] *Милнор занимался вопросом, как получить гордиево число узла N из алгебраических свойств многочлена, задающего кривую K. Он предложил следующий способ развязывания: задаем кривую K параметрически, в данном случае*

$$x = t^3, \quad y = t^2.$$

В общем случае подобное задание $x = t^n$, $y = f(t)$, где $f(t)$ —голоморфная функция, дается теорией рядов Пюизо (которая была открыта Ньютоном). Приведем функции $x(t)$ и $y(t)$ в общее положение, добавив и слагаемые более низких степеней, например

$$x = t^3 - \varepsilon t, \quad y = t^2.$$

Получится кривая K' без особых точек (во всяком случае, вблизи начала координат), исключая некоторое число δ точек самопересечения. Это число δ (число Милнора) можно выразить через некоторые алгебраические инварианты кривой K. Оно является «кандидатом» на гордиево число. Дело в том, что существует способ выполнять развязывания, «соответствующие» двойным точкам: сколько двойных точек, столько и развязываний. Гипотеза Милнора состоит в том, что этот «алгебраический» способ развязывания узла особенности — наиболее экономный; за меньшее, чем δ, число развязываний узел нельзя превратить в тривиальный. Это еще одно проявление принципа экономии.

В полученном недавно доказательстве этой гипотезы применена та же «тяжелая артиллерия» (происходящая, по существу, из квантовой физики), что и при доказательстве гипотезы Тома.

[1] Доказательство этого факта имеется, например, в § 1 книги Милнора «Особые точки комплексных гиперповерхностей».

Пример 4 (Теорема Мёбиуса). *Возможно, к рассмотрению листа Мёбиуса Мёбиус пришел, занимаясь следующей задачей. Рассмотрим проективную прямую $\mathbb{RP}^1$ на проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$. Это бесконечно вырожденная кривая: кривизна в каждой точке равна нулю. При малом возмущении возникнет кривая общего положения с конечным числом точек перегиба. Каково их наименьшее число?*

Попробуем не угадывать ответ путем экспериментов, а воспользуемся принципом экономии. В соответствии с этим принципом, следует рассмотреть наиболее простую алгебраическую модель интересующего нас явления, в данном случае —возникновения точек перегиба при возмущении прямой. Вероятно, эта модель будет наиболее экономной, т. е.будет, в данном случае, содержать наименьшее возможное число точек перегиба.

Итак, надо продеформировать прямую в классе алгебраических кривых как можно более низкой степени и подсчитать количество возникших точек перегиба. Тогда по принципу топологической экономии меньшее число точек перегиба получить не удастся. Обойтись кривыми 1-й степени нельзя, так как это прямые. Кривые второй степени нам также не подходят, так как имеют совсем другую топологию: прямая $\mathbb{RP}^1$ не стягиваема в $\mathbb{RP}^2$, а окружность стягиваема (как и другие квадрики).

Кривых третьей степени уже достаточно. Например, можно прямую в аффинных координатах x, y задать уравнением $y = 0$, а ее возмущение —уравнением $y \cdot f(x, y) = \varepsilon$, где ε —малое число, а $f(x, y)$ —многочлен второй степени, не имеющий вещественных корней. Кривые третьей степени можно исследовать, и получается, что наиболее экономной является кривая $y(1 + x^2) = 1$, или $y = 1/(1 + x^2)$. У нее три точки перегиба: две с абсциссами $\pm 1/\sqrt{3}$, а третья —на бесконечности. Действительно, кривая, не имеющая перегиба на бесконечности, расположена в окрестности бесконечно удаленной точки по одну сторону от касательной в этой точке, а в аффинной карте —с двух сторон от асимптоты, как гипербола. Наша же кривая при уходе на бесконечность подходит к асимптоте $y = 0$ оба раза сверху, т. е. в бесконечно удаленной точке происходит пересечение кривой и ее касательной; это возможно только в точке перегиба.

Стоит заметить, что понятие точки перегиба чисто проективное. Оно не требует никакой метрики, а основано только на кратности пересечения кривой с ее касательной в данной точке. Действительно, кратность пересечения двух кривых сохраняется при произвольном диффеоморфизме, а при проективных преобразованиях прямые *переходят снова в прямые.*

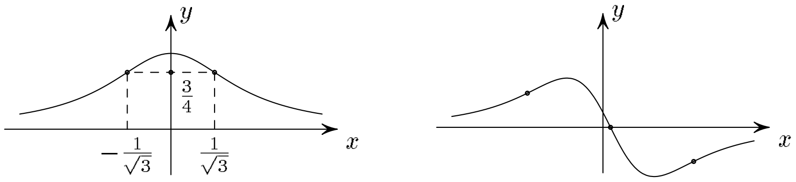

Рис. 6.

На рисунке слева две конечных точки перегиба и одна —на бесконечности; на рисунке справа все три точки перегиба конечные. Во всяком случае, их общее число нечетно, что следует из неориентируемости листа Мёбиуса (окрестность $\mathbb{RP}^1$ в $\mathbb{RP}^2$ —это как раз лист Мёбиуса).

Теорема Мёбиуса утверждает, что число точек перегиба нечетно и не меньше трех, т.е. не может быть равно *1.*

В связи с этим сформулирую еще одну теорему и одну гипотезу. Если прямую деформировать сильно, то число точек перегиба все равно не меньше трех, пока она остается вложенной. *Продолжая деформацию далее, можно получить иммерсированную (уже не вложенную) кривую (см. рисунок), у которой только одна точка перегиба. Гипотеза утверждает, что* для получения (регулярной гомотопией) кривой с одной точкой перегиба из вложенной кривой с тремя точками перегиба необходимо пройти через изменение лежандрова типа узла, т.е. через момент, когда кривая касается сама себя и ориентации двух ветвей в точке касания совпадают.

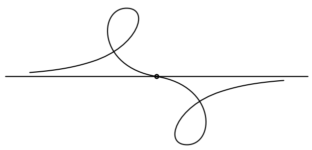

Рис. 7.

В этот момент произойдет самопересечение соответствующего нашей кривой лежандрова узла в пространстве контактных элементов плоскости. Итак, эта гипотеза (аналогичная гипотезе Чеканова о квазифункциях, обобщающей гипотезы о неподвижных точках и о лагранжевых пересечениях, с которых я начинал эту лекцию) утверждает, что число точек перегиба не может стать равным 1 до изменения *лежандрова типа соответствующего узла.*

На сегодняшний день доказано (Д. Панов), что нельзя уничтожить пару точек перегиба из трех (т. е. оставить только одну) не меняя лежандров узел, если не создать как минимум девять точек перегиба на некоторой кривой в процессе гомотопии.

Пример 5. *Для малых деформаций прямой теорема Мёбиуса является частным случаем теоремы Штурма, дающей оценку числа нулей тригонометрического ряда Фурье. Пусть f —2π-периодическая функция, разложение которой в ряд Фурье начинается с гармоник n-го порядка:*

$$f(x) = \sum_{k \geq n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Каково может быть наименьшее число нулей f на одном периоде? В соответствии с общим принципом, следует взять самый простой случай, т. е.ряд, состоящий только из одной гармоники: $f(x) = \cos kx$ (или $f(x) = \sin kx$, что ничего не изменит). У этой функции имеется $2k$ нулей. Теорема Штурма (доказанная Гурвицем) утверждает, что число нулей ряда Фурье не меньше, чем у его первой ненулевой гармоники.

Не доказано аналогичное утверждение для интеграла Фурье: пусть

$$F(x) = \int f(k) e^{-ikx}\, dk,$$

где $f(-k) = \bar{f}(k)$, так что F —вещественная функция. Предположим, что $f(k) = 0$ при $|k| \leq \omega$. Гипотеза Гриневича состоит в том, что среднее число нулей $F(x)$ на длинном отрезке не меньше, чем у «первой гармоники» $\sin \omega x$, т. е. не меньше π/ω. *Это весьма правдоподобное утверждение, иллюстрирующее общий принцип экономии, пока не доказано.*

Объясню, почему теорема Мёбиуса является (при малых деформациях) следствием теоремы Штурма. Рассмотрим проективную плоскость с вложенной в нее продеформированной прямой. На сфере (двулистно накрывающей $\mathbb{RP}^2$) получим экватор, деформация которого описывается нечетной функцией $f(\varphi)$: $f(\varphi + \pi) = -f(\varphi)$, где φ —долгота, а $f(\varphi)$ —возмущение широты в точке φ. Вычисления показывают, что точки перегиба возмущенного экватора соответствуют значениям φ, при которых

$$f''(\varphi) + f(\varphi) = 0. \qquad (*)$$

На самом деле это верно только в первом приближении; но вопрос о числе точек перегиба все равно сводится к вопросу о числе корней уравнения вида (∗), только с другой функцией вместо f: $\tilde{f}''(\varphi) + \tilde{f}(\varphi) = 0$. Из нечетности f выводится, что функция $\tilde{f}$ также нечетна, т. е. ее разложение в ряд Фурье содержит только гармоники с нечетными номерами: первую, третью, пятую и т. д.Тогда ряд Фурье функции $L\tilde{f} = \tilde{f}'' + \tilde{f}$ начинается не раньше, чем с третьей гармоники, поскольку $(\sin\varphi)'' + \sin\varphi = 0$ и $(\cos\varphi)'' + \cos\varphi = 0$: дифференциальный оператор

$$L = \frac{d^2}{d\varphi^2} + 1$$

уничтожает $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$. Следовательно, число корней уравнения $L\tilde{f} = 0$ на отрезке $[0, 2\pi]$ не меньше шести, а число точек перегиба возмущенной прямой на $\mathbb{RP}^2$ вдвое меньше и, таким образом, не меньше трех.

Как и теорема Мёбиуса, теорема Штурма (обобщающая ее) должна иметь (и действительно имеет) обобщения на случай больших деформаций, когда и функций-то никаких нет, а рассматриваются вариации некоторых кривых в многомерных пространствах. Возникает теория выпуклых кривых в проективном пространстве, содержащая много интересных задач, (см., например, «Топологические вопросы теории распространения волн»// *Успехи мат. наук.* **51** (1987), №1. С. 3–50 и цитированную там литературу).

Пример 6. *Попытаемся найти обобщение теоремы Мёбиуса на случай поверхностей и, соответственно, теоремы Штурма на функции двух переменных. Рассмотрим проективную плоскость $\mathbb{RP}^2$, вложенную в проективное пространство $\mathbb{RP}^3$. Рассмотрим малую деформацию этого вложения. Сколько «перегибов» будет у получившейся поверхности?*

Сначала надо объяснить, что же такое «перегиб». Точки поверхности делятся на эллиптические, параболические и гиперболические, в зависимости от второй квадратичной формы. В эллиптической точке поверхность выпукла, в гиперболической две главные кривизны имеют разные знаки, а в параболической точке одна из двух главных кривизн равна нулю. Здесь можно обойтись без второй квадратичной формы, метрики и т. д.: эллиптические, гиперболические и параболические точки определяются проективно инвариантно. Достаточно рассмотреть пару из поверхности и касательной плоскости в данной точке. Расстояние от близкой точки поверхности до этой касательной плоскости дает квадратичную форму, вырожденность (невыро-

жденность) и сигнатура которой не меняются при проективных преобразованиях.

Итак, параболические точки (играющие в данном случае роль точек перегиба) образуют вполне определенные кривые на поверхностях проективного пространства. Сколько же областей эллиптичности (ограниченных параболическими кривыми) возникает при бесконечно малой деформации плоскости? Этот вопрос не решен. Однако наш метод немедленно дает гипотезу о том, что это число всегда не меньше, чем в случае самой простой алгебраической деформации. Соответствующая алгебраическая деформация была исследована Б. Сегре в 1942 году. Оказалось, что на кубической поверхности в $\mathbb{RP}^3$*, являющейся деформацией* $\mathbb{RP}^2$ *(т. е. не имеющей ручек; поверхности с ручками Сегре тоже исследовал) имеется 4 кривые параболических точек. Ф. Аикарди (F. Aicardi) из Триеста предположила, что параболических кривых всегда не меньше 4, и выполнила много компьютерных экспериментов, подтвердивших эту гипотезу. Гипотеза Аикарди состоит в том, что ситуация аналогична теореме Штурма: имея младшую гармонику с* $2k$ *нулями (кубическую деформацию с 4 линиями перегиба) и добавляя гармоники (возмущения) более высокой степени, пусть даже и с большими коэффициентами, число нулей (кривых перегиба) уменьшить нельзя.*

Эта гипотеза имеет множество частных случаев. В некоторых из них ее удалось доказать, тогда как к доказательству самой гипотезы не видно никаких подходов. Существует довольно много разных доказательств теорем Мёбиуса и Штурма, но все они имеют непонятное происхождение. Непонятно также, как обобщить эти доказательства на многомерный случай. Приведенная гипотеза —вероятно, простейшее многомерное обобщение утверждений этих теорем.

Замечание 1. На поверхности общего положения есть еще более специальные, «перегибные», точки, чем параболические. Дело в том, что в каждой гиперболической точке имеются два асимптотических направления; прямые этих направлений имеют необычно высокий (≥ 2) порядок касания с данной поверхностью. Они являются также касательными к кривым, по которым поверхность пересекается с касательной плоскостью в данной гиперболической точке. Итак, в гиперболической области имеется поле крестиков. Попутно возникает вопрос о том, какие существуют глобальные топологические ограничения на эти поля крестиков: какие из них можно реализовать поверхностями, какие — нет. Этот же вопрос можно задать и об аффинных поверхностях, и даже о поверхностях —графиках функции $z = f(x, y)$. Эта проблема весьма мало исследована. Расскажу об одном имеющемся здесь инварианте.

При подходе к параболической кривой асимптотические направления сближаются, и поле крестиков в гиперболической области переходит в поле (асимптотических) направлений на параболической кривой. В некоторых точках оно касается самой кривой. Эти точки еще более специальные: они доставляют вершины ласточкиных хвостов двойственной поверхности. Сегре установил, что на кубической поверхности имеется ровно 6 таких точек. Отсюда вторая гипотеза Аикарди: при любых (не обязательно кубических) деформациях проективной плоскости возникает не менее 6 точек касания асимптотического направления с параболической кривой.[2]

Замечание 2. Рассмотрим поверхность M, образованную асимптотическими направлениями исходной поверхности проективного пространства в пространстве всех прямых, касающихся исходной поверхности. Топологически она является дублем гиперболической области N. На ней есть поле направлений, гладкое и однозначное (с особенностями лишь в специальных точках, где асимптотическое направление касается параболической кривой), которое проектируется в поле крестиков на гиперболической области. У каждой точки внутри N в M имеется два прообраза, в которых проектирование $M \to N$ регулярно, а у точки на краю N есть один прообраз в M, являющийся точкой складки. Поверхность M имеет столько ручек, сколько областей эллиптичности содержится внутри N. На M имеется гладкая динамическая система, интегральные кривые которой (они называются асимптотическими линиями) касаются данного поля направлений; при проектировании $M \to N$ (гладкие) асимптотические линии переходят в кривые с полукубическими особыми точками на параболической кривой ∂N. О свойствах этой динамической системы известно очень мало. Известно, что она имеет (в случае кубической поверхности) 27 периодических решений (в комплексной области) —прямых на кубической поверхности, являющихся, очевидно, ее асимптотическими линиями. С этой динамической системой связано много интересных вопросов. Какими свойствами она

[2]В начале сентября 1997 г. Д. Панов сообщил, что он опроверг обе гипотезы Аикарди, построив поверхность с одной единственной параболической кривой без специальных точек. По-видимому, двойственная поверхность (фронт) довольно сложна, так что остается возможность обобщить теорему Мёбиуса, доказав, что его поверхность отделена от кубических какимлибо подходящим дискриминантом в дополнение к очевидно необходимому дискриминанту рождения ласточкиных хвостов на двойственной поверхности.

обладает? Является ли она, например, интегрируемой? Что получится при ее исследовании обычными средствами теории возмущений вблизи периодических решений? Каковы свойства отображения Пуанкаре, или отображения последования, которое переводит кривую параболических точек в себя вдоль интегральных кривых? Будет ли эта система системой общего положения, будет ли в ней наблюдаться хаос?

В заключение я покажу, каким образом из нашей задачи можно получать более простые. Надо придумать способ деформации плоскости в пространстве, при котором мы можем контролировать кривизну возникающей поверхности и следить за параболическими точками. Таких способов есть несколько; каждый из них приводит к алгоритму, дающему набор параболических кривых, а иногда и точек касания параболической кривой с асимптотическим направлением, по каким-то исходным комбинаторным данным.

Один из способов такой: возьмем триангуляцию исходной плоскости и чуть-чуть сдвинем каждую вершину с плоскости вверх или вниз. Получим многогранную поверхность, являющуюся деформацией плоскости. Ее, конечно, требуется сгладить каким-либо способом, позволяющим проследить, где будут появляться параболические точки. К теореме Мёбиуса этот способ применить нетрудно, поскольку понятно, где будут ребра перегиба у аппроксимирующей нашу кривую ломаной. Для многогранников тоже можно определить параболические кривые; можно определить их на самом многограннике, а можно на (некотором «стандартном») его сглаживании. Затем надо построить (комбинаторно!) по данному возмущению триангуляции некоторое число, которое должно оказаться не меньше, чем 4, если гипотеза Аикарди верна.

Другой способ основан на рассмотрении уравнения с частными производными и приводит (подробности я опускаю) к следующей гипотезе. Рассмотрим функции на сфере S^2 в $\mathbb{R}3$, но не все, а только нечетные, т. е. обладающие свойством $f(-x) = -f(x)$, где $-x$ —точка, диаметрально противоположная x. Именно такие функции описывают деформации проективной плоскости. Теперь рассмотрим сферические функции, т. е. функции на сфере, являющиеся собственными для сферического оператора Лапласа. Так, x, y, z —собственные функции с собственным числом -2, и других решений уравнение $\Delta f + 2f = 0$ не имеет, его пространство решений трехмерно. Итак, сферические функции степени 1 —это в точности все линейные однородные функции от x, y, z; они все нечетны. Однако оказывается, что существует другая теория сферических функций, почему-то не рассмотренная классиками. Можно рассмотреть сферические функции с особенностями, например, с полюсами кратности не выше некоторого числа. Тогда уравнение $\Delta f + 2f = 0$ имеет, помимо обычных сферических функций, еще и обобщенные решения. Точнее, в правой части уравнения при этом оказывается не нуль, а какая-то линейная комбинация δ-функций (и их производных) с носителями в тех точках, где у функции f полюса. Оказывается, почти все точки поверхности, для которой деформация определена такой функцией, будут гиперболическими, и лишь при сглаживании вокруг полюсов возникнут кривые параболических точек, ограничивающие области эллиптичности. Кроме того, в некоторых отдельных точках вторая квадратичная форма такой поверхности обращается в нуль полностью. Поверхность вблизи такой точки имеет, как правило, вид обезьяньего седла. Такой подход приводит к следующей гипотезе: *число особых точек* + *число обезьяньих седел* ≥ 8. Здесь $8 = 2 \cdot 4$, поскольку вместо $\mathbb{RP}^2$ рассматриваем сферу S^2. Мы учитываем обезьяньи седла потому, что могут быть точки, в которых функция f слишком хорошо приближается линейной функцией, т. е. точки, где второй дифференциал $d^2 f$ не просто вырожден, а обращается в нуль.

Обращение $d^2 f$ в нуль встречается обычно в изолированных точках. Простейший пример — $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$; нетрудно подсчитать, что все точки этой поверхности (кроме нуля) гиперболические; эллиптических точек нет, и лишь в точке $(0, 0)$ форма $d^2 f$ становится нулевой.

Вообще, можно рассмотреть (в фиксированной локальной карте) отображение

$$(x, y) \longmapsto \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \tag{$**$}$$

где

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}, \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Итак, с функцией $f(x, y)$ можно связать поверхность в трехмерном пространстве с координатами A, B, C, являющемся симметрическим квадратом кокасательного пространства. Мы получили, так сказать, второе гауссово отображение.

В этом пространстве имеется конус вырожденных форм, он задается уравнением $AC = B^2$. Внутри него расположены положительно и отрицательно определенные формы, снаружи — гиперболические формы. Уравнение Лапласа $A + C = 0$ (и некоторые другие уравнения тоже) означает, что вся поверхность-образ при рассматриваемом отображении лежит в гиперболической области, пополненной точкой 0 (для уравнения Лапласа — в плоскости $A+C=0$, пересекающей наш конус только в начале координат). Поэтому на поверхности-прообразе эллиптических точек нет, возможно только обнуление $d^2 f$ в некоторых точках. Если же пошевелить функцию f, то образ соответствующей поверхности тоже пошевелится и появятся параболические кривые (соответствующие пересечениям поверхности-образа с конусом). Поэтому обезьяньи седла надо учитывать наряду с полюсами: из них при малой деформации тоже возникают параболические кривые. Отсюда и получается последняя гипотеза.

Наконец, я приведу еще одну гипотезу (М. Эрма́н), которая укладывается в рамки той же теории об экстремальности алгебраических объектов. Правда, в данном случае место алгебраического объекта занимает версальная деформация. Но известно, что в теории особенностей версальные деформации «ведут себя так же, как алгебраические объекты». Почему-то Эрман сформулировал эту гипотезу о каустиках лагранжева, или градиентного отображения. Но тот же вопрос остается, вероятно, открытым, если вместо градиентного отображения взять произвольное отображение из $\mathbb{R}$n в $\mathbb{R}$n.

Итак, пусть $f\colon M^n \to M^n$ — отображение общего положения, или же $f\colon L \to \mathbb{R}n$ — проекция лагранжева подмногообразия симплектического пространства $L \subset \mathbb{R}2n$. Типичный пример: $y = \operatorname{grad} f(x)$, где $x \in \mathbb{R}n$, $f\colon \mathbb{R}n \to \mathbb{R}$. (К такому виду подходящим выбором координат приводится любое лагранжево отображение.)

Рассмотрим критические точки этого отображения, т. е. точки, где $\det(\partial y/\partial x) = 0$, и соответствующие критические значения y; в симплектическом случае множество критических значений образует каустику.

Степень отображения в точке y определим следующим образом. Рассмотрим близкое к y регулярное значение y' и посчитаем (как обычно, с учетом ориентации) число прообразов y', но не всех, а только близких к x.

Определенная таким образом степень не зависит от выбора точки y'. Предположим, что она равна нулю. Гипотеза утверждает, что *в этом случае точку y' можно выбрать так, что у нее не будет* (*в окрестности x*) *вообще ни одного прообраза.* Если же степень равна k, то гипотеза утверждает, что *найдется точка, имеющая ровно k прообразов, а не больше.*