Пьер Картье

Значения ζ-функции

1. Значения ζ-функции

Лекция будет состоять из следующих частей:

1. Значения ζ-функции.
2. Полилогарифмические функции.
3. Обобщения полилогарифмических функций и множественные значения ζ-функции (MZV-числа).
4. Гипотезы о природе некоторых чисел.

Начало будет очень классическим. Я начну с вычисления суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. В 1739 г. Эйлер доказал, что сумма этого ряда равна $\frac{\pi^2}{6}$. Сначала он провел вычисления частных сумм, а затем угадал ответ. Следует отметить, что ряд сходится очень медленно. Поэтому Эйлеру для вычисления суммы этого ряда пришлось разработать специальные численные методы.

Эйлер придумал так называемое «доказательство», которое я повторю в нескольких словах. Пусть $P(x)=c_Nx^N+c_{N-1}x^{N-1}+\ldots+c_0$ — многочлен степени N, $\xi_1,\ldots,\xi_N$ — его корни. Тогда $\xi_1\ldots\xi_N=(-1)^N\frac{c_0}{c_N}$ и $\sum\limits_{i=1}^{N}\xi_1\ldots\hat{\xi_i}\ldots\xi_N=(-1)^{N-1}\frac{c_1}{c_N}$. Из этих двух равенств следует, что $\sum\limits_{i=1}^{N}\frac{1}{\xi_i}=-\frac{c_1}{c_0}$. По-другому это можно доказать, рассмотрев многочлен

Пьер Картье (Pierre Cartier), профессор IHES (Франция).

с корнями $\frac{1}{\xi_i}$. Можно также доказать формулу $\sum_{i<j} \frac{1}{\xi_i \xi_j} = \frac{c_2}{c_0}$. Поэтому, если $c_1 = 0$, то $\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\xi_i^2} = -2\frac{c_2}{c_0}$. Эйлер, разумеется, знал все эти формулы.

Предположим теперь, что есть «полином» с корнями 1, 2, 3, ... Тогда с его помощью можно вычислить $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Эйлера при этом не смущало, что этот «полином» имеет бесконечно много корней. Рассмотрим функцию $\frac{\sin \pi x}{\pi x} = s(x)$. Корни «полинома» $s(x)$ — это корни уравнения $\sin \pi x = 0$, $x \neq 0$. Положительные корни — это как раз то, что нам нужно. Но с учетом отрицательных корней мы должны получить удвоенную сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Ряд для синуса показывает, что

$$s(x) = 1 - \frac{\pi^2}{6}\, x^2 + \ldots,$$

Таким образом, $c_0 = 1$, $c_1 = 0$ и $c_2 = \frac{\pi^2}{6}$. Следовательно, $2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -2\frac{c_2}{c_0}$, а значит, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{c_2}{c_0} = \frac{\pi^2}{6}$.

Разумеется, это доказательство неудовлетворительно. Например, если применить такие же рассуждения к функции e^{x^2}, то получится абсурдный результат. Только Вейерштрасс (1860) и Адамар (1895) в этом в конце концов разобрались, рассматривая факторизацию целых функций комплексного переменного. Если наложить дополнительные условия на рост целой функции на бесконечности, то для таких функций рассуждения Эйлера приводят к правильному результату.

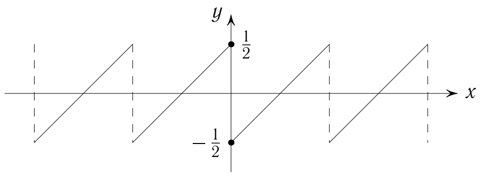

Рис. 1. Пилообразная функция

Есть также другое доказательство, которое легче выразить в терминах рядов Фурье. Ряды Фурье получили строгое обоснование лишь в XIX в., но и в XVIII в. ими пользовались достаточно успешно. Рассмотрим пилообразную функцию $\phi(x)$ (рис. 1). Она периодична и $\phi(x) =$

$\frac{1}{2}-x$ при $x\in(0,1)$. Ясно, что $\int_0^1 \phi(x)\,dx=0$. Если ввести коэффициенты Фурье $c_n=\int_0^1 \phi(x)e^{-2\pi inx}\,dx=\frac{1}{2\pi in}$, то получим

$$\phi(x)=\sum_n c_n e^{2\pi inx}=\sum_{n\neq 0}\frac{e^{2\pi inx}}{2\pi n}.$$

Теорема Парсеваля показывает, что

$$\int_0^1 |\phi(x)|^2\,dx=\sum_{n\neq 0}|c_n|^2=\frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

С другой стороны,

$$\int_0^1 |\phi(x)|^2\,dx=\int_0^1\left|\frac{1}{2}-x\right|^2 dx=\frac{1}{12}.$$

Это уже настоящее доказательство.

В учебниках есть и другие доказательства. Например, можно воспользоваться формулой вычетов Коши. А именно, рассмотрим мероморфную функцию $\frac{1}{x^2(e^{2\pi ix}-1)}$. В точке $x=0$ эта функция имеет полюс порядка 3, а в точках $x=n\neq 0$ эта точка имеет полюсы порядка 1. Применив к этой функции формулу вычетов Коши, получим тот же самый результат.

Эйлер сделал большее: он вычислил суммы $1+2+3+\dots$ и $1^2+2^2+3^2+\dots$ Я не буду повторять этих вычислений. Они относятся к тому, что я называю «математической магией». Эти вычисления выполняются без особого обоснования и получаются некие результаты. После этого требуется много лет, чтобы их обосновать. В наше время такая же ситуация с фейнмановскими интегралами по траекториям. Их вычисляют, но никакого обоснования этих вычислений нет. Вычисления Фейнмана похожи на вычисления Эйлера. Они не имеют пока никакого обоснования, но когда-нибудь получат его.

Теперь я введу классическую дзета-функцию Римана $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$. Здесь предполагается, что $s\in\mathbb{C}$ и $\operatorname{Re}s>1$; в таком случае ряд абсолютно сходится. Мы уже вычислили, что $\zeta(2)=\pi^2/6$. Оба метода вычислений (с помощью многочленов и с помощью рядов Фурье) позволяют вычислить $\zeta(4)$ и дают один и тот же результат: $\zeta(4)=\pi^4/90$.

Здесь обоснование вычислений с рядами Фурье даже проще, потому что в этом случае ряд Фурье сходится абсолютно. Аналогично можно доказать, что если k — натуральное число, то $\zeta(2k) = \pi^{2k} r$, где r — рациональное число. Но метод вычислений с рядами Фурье ничего не дает в случае $\zeta(3)$, $\zeta(5)$, … Единственное, что сейчас известно об этих числах, так это то, что $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$ (даже не известно, трансцендентно ли число $\zeta(3)$). Иррациональность числа $\zeta(3)$ была доказана Апери (R. Apéry) в 1978 г. Затем Don Zagier и H. Cohen упростили и прояснили доказательство Апери, и в августе 1978 г. Cohen представил доказательство Апери на Международном математическом конгрессе в Хельсинки.

1.1. Интегральное представление для функции $\zeta(s)$.

Рассмотрим гамма-функцию $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\, dx$; здесь $\operatorname{Re} s > 0$. Сделав замену $x = n\xi$, получим

$$n^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-n\xi} \xi^{s-1}\, d\xi, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Если мы рассмотрим сумму $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, то в правой части получим выражение, содержащее геометрическую прогрессию, которую можно просуммировать. В итоге получаем формулу

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx. \tag{1}$$

Известен метод Адамара, хорошо разработанный в книге И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова «Обобщенные функции». Этот метод заключается в следующем. Рассмотрим интеграл вида $\Phi(s) = \int_0^\infty F(x) x^{s-1}\, dx$, где функция F класса C^∞, причем она разлагается в ряд Тэйлора даже в нуле и быстро убывает при $x \to \infty$ вместе со всеми производными.

Пример 1. $F(x) = e^{-x}$.

Функция $\Phi = \Phi_F$ продолжается на $\mathbb{C}$ как мероморфная функция с простыми полюсами в точках $0, -1, -2, \ldots$ Это легко доказать, интегрируя по частям. Действительно, при интегрировании по частям мы получаем функциональное уравнение, связывающее $\Phi_F(s)$, $\Phi_{F'}(s)$ и $\Phi_F(s-1)$; это функциональное уравнение является обобщением функционального уравнения для $\Gamma(s)$. Таким образом, функция $\Phi(s)/\Gamma(s)$

не имеет полюсов. Функция именно такого вида встречается в формуле (1). К сожалению, в интересующем нас случае функция $F(x)=\dfrac{1}{e^x-1}$ имеет особенность в нуле, поэтому к ней нельзя применить эти рассуждения. Нужно изменить функцию, например, положить $F(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$ и воспользоваться разложением $x^{s-1}=x\cdot x^{s-2}$. В результате получим интегральное представление

$$\Gamma(s)\zeta(s)=\int_0^\infty \frac{x}{e^x-1}\,x^{s-2}\,dx.$$

Мы сдвинули полюса на единицу: полюса функции $\Gamma(s)\zeta(s)$ находятся в точках $1, 0, -1, -2, \ldots$ Полюса функции $\Gamma(s)$ находятся в точках $0, -1, -2, \ldots$ Поэтому функция $\zeta(s)$ имеет единственный полюс в точке 1.

Общий результат такой: $\left(\dfrac{\Phi}{\Gamma}\right)(-k)=F^{(k)}(0)$. По-другому это можно выразить формулой $\left.\dfrac{x^{s-1}}{\Gamma(s)}\right|_{s=-k}=\delta^{(k)}(x)$, где $\delta^{(k)}$ — производная порядка k функции Дирака. Эта точка зрения хорошо объяснена в упомянутой книге Гельфанда и Шилова. Применим это равенство к функции $\zeta(s)$. В результате получим

$$-k\zeta(1-k)=\frac{d^k}{dx^k}\left.\left(\frac{x}{e^x-1}\right)\right|_{x=0}; \tag{2}$$

здесь мы учитываем сделанный ранее сдвиг на единицу.

Введем числа Бернулли B_k, которые определяются тождеством

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{k=0}^{\infty} B_k\,\frac{x^k}{k!}.$$

Из формулы (2) получаем

$$\zeta(1-k)=-B_k/k, \quad k=1,2,3,\ldots$$

Например, $\zeta(0)=-B_1=1/2$, $\zeta(-1)=-B_2/2=-1/12$ и $\zeta(-2)=0$. С формальной точки зрения $\zeta(-1)=1+2+3+\ldots$ и $\zeta(-2)=1^2+2^2+3^2+\ldots$ Это как раз те суммы, которые мы хотели вычислить.

Теперь еще немного матемагии. Формально положим $B_k=B^k=B\times\ldots\times B$ и рассмотрим e^{Bx}. Из равенства $\dfrac{x}{e^x-1}=e^{Bx}$ следует, что $x=(e^x-1)e^{Bx}=e^{(B+1)x}-e^{Bx}$. Поэтому при $n\neq 1$ выполняется равенство $(B+1)^n=B^n$. Например,

$$0=(B+1)^2-B^2=2B^1+B^0=2B_1+B_0.$$

Мы знаем, что $B_0 = 1$, поэтому $B_1 = -1/2$. Аналогично получаем равенство $3B_2 + 3B_1 + B_0 = 0$ и вычисляем B_2 и т. д.

Формально эту конструкцию можно описать так. Рассмотрим кольцо многочленов над полем $\mathbb{C}$ от одной переменной B. Определим линейное отображение $ev\colon \mathbb{C}[B] \to \mathbb{C}$ следующим образом: $ev(B^k) = B_k$; отображение ev задано на базисных элементах и продолжается по линейности. Отображение ev переводит формальный ряд от двух переменных B и x в формальный ряд от одной переменной x. После этого можно повторить приведенные выше вычисления, применяя в нужных местах отображение ev. Это объясняется в учебнике Бурбаки по элементарному анализу; в нем есть глава о числах Бернулли.

Можно также доказать, что верна формула

$$\zeta(2k) = (-1)^{k+1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2 \cdot (2k)!} B_{2k}.$$

Отметим, что $B_3 = 0$, $B_5 = 0$, ... Попытка вычислить значения дзета-функции в нечетных точках тем же самым методом приводит к равенству $0=0$, которое ничего не дает. Объяснение, почему так происходит, будет дано в конце второй части.

2. Полилогарифмические функции

Полилогарифмические функции задаются следующими равенствами:

$$\mathrm{Li}_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k}.$$

Это определение связано с тем, что $\mathrm{Li}_k(1) = \zeta(k)$. Мы надеемся получить информацию о дзета-функции, пользуясь полилогарифмическими функциями.

В комплексной области ряд для $\mathrm{Li}_k(z)$ сходится при $|z| < 1$. Первая задача — построить аналитическое продолжение. Сначала все очень просто:

$$\mathrm{Li}_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{z-1}.$$

Это — рациональная функция с полюсом $z = 1$.

Мой учитель Анри Картан запрещал мне делать разрезы на комплексной плоскости, потому что такой подход неинвариантен. Он требовал всегда рассматривать только римановы поверхности. Если вы заглянете в его книгу по комплексному анализу (очень хорошую), то найдете там определение аналитического продолжения с помощью пучков или еще чего угодно, но только не с помощью разрезов. Тем не менее, я не вижу в разрезах плоскости никакого противоречия и поэтому сделаю разрез.

Рассмотрим открытое односвязное множество $U=\mathbb{C}\setminus[1,+\infty[$. Если функция Φ голоморфна на односвязном множестве, то на этом множестве у нее есть первообразная Ψ. Эта функция удовлетворяет нормировочному условию $\Psi(0)=0$ и $\dfrac{d\Psi}{dz}=\Phi$. Функция Ψ тоже голоморфна в области U.

Легко проверить, что $z\dfrac{d}{dz}\mathrm{Li}_k(z)=\mathrm{Li}_{k-1}(z)$. Функция Li_0 голоморфна в области U и $\mathrm{Li}_0(0)=0$, поэтому функция Li_1 тоже голоморфна в области U. Рассуждая дальше, получаем то же самое для Li_2, Li_3, ... Все эти функции аналитически продолжаются на U.

Чтобы идти дальше, нужно исследовать предельное поведение этих функций при подходе к разрезу с разных сторон: сверху и снизу. Я рассмотрю только случай

$$\mathrm{Li}_1(z)=z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\ldots=\ln\frac{1}{1-z}.$$

Значения логарифма сверху и снизу отличаются на одно и то же постоянное значение. Если γ_1 — монодромия при обходе вокруг 1, то $\gamma_1(\mathrm{Li}_1(z))=2\pi i$. Монодромия — это разность между двумя ветвями. Разность между двумя ветвями снова аналитически продолжается на всю плоскость. Эта монодромия подробно изучалась многими алгебраическими геометрами: Блохом, Делинем, Дринфельдом и другими.

Снова обращаясь к математии, зададим вопрос Эйлеру: как вычислить сумму ряда $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} z^n$? Эйлер дает следующий ответ: эта сумма равна 0. Он рассуждает так. Рассмотрим сумму $z+z^2+\ldots+z^n+\ldots=\dfrac{z}{1-z}=\mathrm{Li}_0(z)$. Она сходится при $|z|<1$. Рассмотрим теперь сумму обратных величин: $z^{-1}+z^{-2}+\ldots+z^{-n}+\ldots=\dfrac{-1}{1-z}=\mathrm{Li}_0\left(\dfrac{1}{z}\right)$. Она сходится при $|z|>1$. Но вспомните, что мы сделали аналитическое продолжение. Обе функции $\dfrac{z}{1-z}$ и $\dfrac{-1}{1-z}$ рациональные; они определены всюду, кроме полюса в точке 1. Чтобы вычислить требуемую сумму, к этим двум функциям нужно прибавить 1:

$$1+\mathrm{Li}_0(z)+\mathrm{Li}_0\left(\frac{1}{z}\right)=1+\frac{z-1}{1-z}=0.$$

Эти рассуждения можно пошагово обобщить и получить следующий результат. Функция $\mathrm{Li}_k(z)$ голоморфна вне $[1,+\infty[$, а функция

$\mathrm{Li}_k\left(\frac{1}{z}\right)$ голоморфна вне $[0, 1]$. Поэтому функция $\mathrm{Li}_k(z) + (-1)^k \mathrm{Li}_k\left(\frac{1}{z}\right)$ голоморфна вне $[1, +\infty[\cup [0, 1] = [0, \infty[$.

Обычно логарифм определяют для разреза $]-\infty, 0]$, но его можно определить и для разреза $[0, \infty[$. Мы будем предполагать, что функция $\ln z$ определена именно с помощью разреза $[0, \infty[$, причем выберем ветвь этого логарифма так, что если подходить к этому разрезу сверху, то получим обычный вещественный логарифм.

При таком определении логарифма получаем следующую формулу:

$$\mathrm{Li}_k(z) + (-1)^k \mathrm{Li}_k\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{(2\pi i)^k}{k!} B_k\left(\frac{\ln z}{2\pi i}\right). \tag{1}$$

Здесь $B_k(t)$ — многочлен Бернулли. Неформально он определяется тождеством $B_k(t) = (B + t)^k$. Чтобы получить формальное определение, нужно воспользоваться отображением ev: сначала рассмотрим полином от переменных B и t, а затем каждый моном B^k заменим на B_k.

Многочлены Бернулли можно также задать следующими свойствами, которые их полностью характеризуют:

- $\frac{d}{dt} B_k(t) = k B_{k-1}(t)$;
- $B_k(t+1) - B_k(t) = k t^{k-1}$;
- $B_0(t) = 1$;
- $B_k(0) = B_k$.

Простое упражнение по алгебре — доказать, что этими свойствами однозначно задается некоторая последовательность многочленов.

Можно написать соответствующую производящую функцию:

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k(t) \frac{x^k}{k!} = \frac{x e^{xt}}{e^x - 1}.$$

В частности, при $t = 0$ получаем $B_k(0) = B_k$.

Если в формуле (1) положить $z = 1 + i\epsilon$, $\epsilon > 0$, и устремить ϵ к нулю, то получим

$$\zeta(k) + (-1)^k \zeta(k) = \frac{(2\pi i)^k}{k!} B_k.$$

Для нечетных k эта формула не дает никакой информации: получаем тождество $0 = 0$. А для четных k получаем ту самую формулу, о которой шла речь ранее.

3. Обобщения полилогарифмических функций

Мы видели, что $\mathrm{Li}_1(z) = \ln \dfrac{1}{1-z}$. В связи с этим Li_2 называют *дилогарифмом*, Li_3 называют *трилогарифмом* и т. д.

Мы хотим обобщить этот класс функций. При этом мы хотим включить в новый класс функций и обычный логарифм, а он определяется на комплексной плоскости с разрезом от $-\infty$ до 0. Именно таким стандартным определением логарифма мы теперь будем пользоваться, а не тем, которое мы использовали на с. 65.

Все функции, которые мы определим, будут голоморфны в комплексной плоскости с двумя разрезами — от 1 до $+\infty$ и от $-\infty$ до 0. Проще всего эти функции можно определить с помощью дифференциального уравнения. Напомню, что для полилогарифма мы доказали формулу

$$\partial_z \mathrm{Li}_k(z) = \frac{1}{z}\,\mathrm{Li}_{k-1}(z),$$

где ∂_z обозначает дифференцирование по z. Функция, которая будет определена, параметризуется индексами $k_1, \ldots, k_p$; она обозначается $\mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_p}(z)$.

Прежде чем перейти к разложению функции $\mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_p}(z)$ в ряд, я напишу для нее дифференциальное уравнение. Введем две некоммутирующие переменные X_0 и X_1. Рассмотрим последовательность $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_t)$, где $\epsilon_i \in \{0, 1\}$. Каждой такой последовательности можно сопоставить произведение $X_\epsilon = X_{\epsilon_1} \ldots X_{\epsilon_t}$. Например, $X_{010} = X_0 X_1 X_0$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\partial_z \Lambda(z) = \left(\frac{X_0}{z} + \frac{X_1}{1-z}\right)\Lambda(z).$$

Например, если X_0 и X_1 — квадратные матрицы порядка p, то это уравнение представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта система голоморфна, но имеет особенности в точках 0 и 1. Решения этой системы нужно рассматривать в односвязной области, не содержащей точек 0 и 1. Например, можно взять комплексную плоскость с двумя разрезами, упомянутыми выше. В соответствии с общей теорией голоморфных дифференциальных уравнений в такой области система имеет голоморфное решение. Отметим, что уравнение Гаусса для гипергеометрической функции можно записать в таком виде при $p = 2$; матрицы X_0 и X_1 при этом являются некоторыми конкретными матрицами порядка 2. Решение уравнения есть вектор-функция — набор из двух функций, одна из которых и будет гипергеометрической функцией.

Вернемся к общим некоммутирующим переменным X_0 и X_1. Будем искать решения вида

$$\begin{aligned}\Lambda(z) &= \sum_{\epsilon} \Lambda_{\epsilon}(z) X_{\epsilon} = \\ &= \Lambda_{\varnothing}(z) + \Lambda_0(z) X_0 + \Lambda_1(z) X_1 + \\ &\quad + \Lambda_{00}(z) X_0^2 + \Lambda_{01}(z) X_0 X_1 + \Lambda_{10}(z) X_1 X_0 + \Lambda_{11}(z) X_1^2 + \ldots\end{aligned}$$

Если X_0 и X_1 — матрицы, то можно доказать, что этот бесконечный ряд сходится. Но сейчас меня не интересует вопрос сходимости; я рассматриваю формальный ряд. Решая дифференциальное уравнение для формальных рядов, получаем рекуррентные соотношения

$$\partial_z \Lambda_{0\epsilon}(z) = \frac{1}{z} \Lambda_{\epsilon}(z), \quad \partial_z \Lambda_{1\epsilon}(z) = \frac{1}{1-z} \Lambda_{\epsilon}(z).$$

Для простоты положим $\Lambda_{\varnothing}(z) = 1$. Тогда

$$\begin{aligned}&\partial_z \Lambda_0(z) = \frac{1}{z}, \quad \partial_z \Lambda_{00}(z) = \frac{1}{z} \Lambda_0(z) \\ &\partial_z \Lambda_1(z) = \frac{1}{1-z}, \quad \partial_z \Lambda_{10}(z) = \frac{1}{1-z} \Lambda_0(z), \ldots\end{aligned}$$

Следовательно, $\Lambda_0(z) = \ln z + C_0$; это выражение определено на комплексной плоскости с двумя разрезами. Далее,

$$\Lambda_{00}(z) = \frac{1}{2} \ln^2 z + C_0 \ln z + C_1.$$

Нормализацию решений зададим следующим образом: $\Lambda_{0\ldots0}(z) = \dfrac{1}{p!} \ln^p z$.

Я воспользуюсь хорошо известным фактом, что интеграл $\displaystyle\int_0 x^{\lambda} \ln^p x \, dx$ сходится при $\lambda \geqslant 0$ (такая запись означает, что интеграл сходится в нуле). Единственная сингулярность в нуле происходит от логарифма.

Из другого уравнения получаем соотношение

$$\Lambda_1(z) = \ln \frac{1}{1-z}.$$

Здесь могла бы появиться константа, но я нормализую это следующим образом: при $z = 0$ функция обращается в нуль.

Если мы хотим полностью записать асимптотическое условие, нормализующее функцию Λ, то это можно сделать так. Запишем

$$\Lambda(z) = \tilde{\Lambda}(z) \exp(X_0 \ln z), \tag{1}$$

где

$$\exp(X_0 \ln z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \ln^p z \underbrace{X_0 \dots X_0}_{p}.$$

Здесь $\tilde{\Lambda}$ голоморфно в окрестности точки 0 и $\tilde{\Lambda}(0) = 1$. Этим определяется асимптотическое условие на функцию Λ.

Запишем исходное дифференциальное уравнение в виде

$$d\Lambda = \left(X_0 \frac{dz}{z} + X_1 \frac{dz}{1-z}\right) \Lambda$$

В окрестности нуля член $X_1 \dfrac{dz}{1-z}$ регулярен. Если же пренебречь этим регулярным членом, то решением уравнения будет как раз написанная выше экспонента. Формула (1) — это частный случай фуксовой формы решения дифференциального уравнения с особыми точками.

Разумеется, если мы заменим X_0 и X_1 матрицами, то нужно будет придать смысл всему тому, что было написано; в частности, нужно будет придать смысл экспонентам. Например, если $X_0 = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, то соответствующая функция равна $\operatorname{diag}(z^{\lambda_1}, \dots, z^{\lambda_n})$. Именно это возникает в обычной фуксовой теории. Одна из трудностей классической теории Фукса состоит в том, что она не работает в случае, когда одна из разностей $\lambda_i - \lambda_j$ является целым числом. Но у нас этой трудности не возникает, потому что мы рассматриваем формальные ряды.

Оказывается, что наши условия однозначно определяют функцию $\tilde{\Lambda}$: решение дифференциального уравнения с такими начальными условиями единственно.

Ситуация для $z = 0$ и для $z = 1$ симметрична. Действительно, отображение $z \mapsto 1 - z$ меняет местами два разреза и ситуация при этом получается та же самая. (Однако асимптотическое разложение функции $\Lambda(z)$ в точке $z = 1$ будет, конечно, другим.)

Запишем снова решение в виде бесконечного ряда

$$\Lambda(z) = \sum_{\epsilon} \Lambda_\epsilon(z) X_\epsilon,$$

где ϵ — конечная последовательность нулей и единиц. Мне придется слегка изменить обозначения. Прежде всего я буду предполагать, что $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_p)$, где $\epsilon_p = 1$. В таком случае легко убедиться, что Λ_ϵ не имеет особенностей в нуле: для тех членов, в правой части которых отсутствует X_0, после перемножения отрицательные степени z уничтожаются. Это и есть полилогарифмические функции, которые мы хотели определить.

Введем следующие обозначения: $Y_1=X_1$, $Y_2=X_0X_1$, $Y_3=X_0X_0X_1,\dots$ Тогда произведение $X_{\epsilon_1}\dots X_{\epsilon_{p-1}}X_1$ можно представить в виде $Y_{k_1}\dots Y_{k_t}$, где $k_1\geqslant 1,\ \dots,\ k_t\geqslant 1$. Например,

$$X_1X_0X_0X_1X_0X_1=Y_1Y_3Y_2.$$

Полилогарифмическая функция определяется следующим образом:

$$\mathrm{Li}_{k_1\dots k_t}(z)=\Lambda_\epsilon(z).$$

Для остальных ϵ (с $\epsilon_p=0$) функции Λ_ϵ представляются в виде конечных сумм

$$\sum \mathrm{Li}_{\underline{k}}(z)\ln^? z,$$

где $\underline{k}=(k_1,\dots,k_t)$, а $\ln^? z$ обозначает некоторую степень логарифма.

Для функции $\mathrm{Li}_{\underline{k}}$ разложение в степенной ряд имеет следующий вид:

$$\mathrm{Li}_{\underline{k}}(z)=\sum_{n_1>\dots>n_t}\frac{z^{n_1}}{n_1^{k_1}\dots n_t^{k_t}}.$$

Радиус сходимости этого ряда равен 1.

Положим $\mathrm{Li}_{\underline{k}}(1)=\zeta(\underline{k})$. Например, $\zeta(3,2)=\sum\limits_{m>n}\dfrac{1}{m^3n^2}$. Так определенные числа $\zeta(\underline{k})$ будем называть *множественными значениями дзета-функции* (сокращенно MZV — multiple zeta values). Легко доказать, что рассматриваемый ряд сходится при $k_1\geqslant 2$. Но, например, при $\underline{k}=(1,1)$ получаем ряд $\sum\limits_{m>n}\dfrac{1}{mn}$, который расходится. Действительно, сумма $\sum\limits_{n=1}^{m-1}\dfrac{1}{n}$ приблизительно равна $\ln m$, а ряд $\sum\dfrac{\ln m}{m}$ расходится. Те же самые рассуждения показывают, что ряд $\sum\limits_{m>n}\dfrac{1}{m^2n}$ сходится, поскольку ряд $\sum\dfrac{\ln m}{m^2}$ сходится.

Это означает следующее. Полилогарифмическая функция регулярна в нуле. Но при подходе к точке $z=1$ для регулярности нужны какие-то дополнительные предположения. Например, при $k_1\geqslant 2$ ряд абсолютно сходится на единичной окружности. Таким образом, в точке $z=1$ функция имеет предел, но она не продолжается до голоморфной функции в окрестности этой точки.

Можно также рассматривать полилогарифмические функции от многих переменных:

$$\mathrm{Li}_{\underline{k}}(z_1,\dots,z_s)=\sum_{n_1>\dots>n_t}\frac{z_1^{n_1}\dots z_s^{n_s}}{n_1^{k_1}\dots n_t^{k_t}},\qquad s\leqslant t.$$

Множественные значения дзета-функции мы определили, положив $z=1$. Гончаров и некоторые физики обнаружили, что очень интересные числа получаются также, если в качестве z взять корень из единицы, т.е. рассмотреть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\alpha^n}{n^k}$, где $\alpha^p=1$. Сумму такого ряда можно также записать в виде $\sum\limits_{j=0}^{p-1}\alpha^j\sum\limits_{n\equiv j\pmod p}\dfrac{1}{n^k}$.

4. Гипотезы о природе некоторых чисел

Мы будем рассматривать числа $\zeta(k_1,\ldots,k_t)$, где $k_1\geqslant 2$, $t\geqslant 1$, $k_2\geqslant 1,\ldots,k_t\geqslant 1$. Все эти числа вещественны. Среди них есть известные нам числа $\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}$ и $\zeta(4)=\zeta(2)^2\times\dfrac{2}{5}$. Числа $\zeta(2k)$ нас интересовать не будут. А вот числа $\zeta(3)$, $\zeta(5)$, $\ldots$ для нас весьма интересны.

Назовем число $p=p(\underline{k})=k_1+\ldots+k_t$ *весом* числа $\zeta(k_1,\ldots,k_t)$, а число t назовем *глубиной*. Обозначим через $\mathscr{Z}_p$ (в честь Zagier'а) множество всех линейных комбинаций с рациональными коэффициентами всех MZV веса p. Условно полагаем $\mathscr{Z}_0=\mathbb{Q}$ и $\mathscr{Z}_1=(0)$, поскольку в $\mathscr{Z}_1$ могло бы войти только число $\zeta(1)=\sum\dfrac{1}{n}=+\infty$. (Цагир предложил заменить $\zeta(1)$ суммой ряда $\sum\dfrac{1}{n}$ «по Эйлеру», т.е. постоянной Эйлера

$$C=\lim_{n\to\infty}\Bigl(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\Bigr)=Res_{s=1}\zeta(s),$$

но не очевидно, что это правильное решение.) Мы уже выясняли, что $\mathscr{Z}_2=\mathbb{Q}\,\pi^2$. Можно также доказать, что $\mathscr{Z}_3=\mathbb{Q}\,\zeta(3)$, поскольку $\zeta(3)=\zeta(2,1)$ (см. ниже).

О множествах $\mathscr{Z}_p$ есть несколько гипотез, которые не вполне независимы друг от друга.

1. Сумма множеств $\mathscr{Z}_0$, $\mathscr{Z}_1$, $\ldots$, $\mathscr{Z}_p$ прямая, т.е. если $z_0+z_1+\ldots+z_p=0$, где $z_j\in\mathscr{Z}_j$ при $j=0,1,\ldots,p$, то $z_j=0$ при всех j.

В связи с этой гипотезой проверено, что если $p(\underline{k}_j)=j$, $0\leqslant j\leqslant 17$ и $|m_j|\leqslant 10^{10}$, $m_j\in\mathbb{Z}$, то $|\sum_j m_j\zeta(\underline{k}_j)|\geqslant 10^{-50}$.

2) Пусть $d_p=[\mathscr{Z}_p:\mathbb{Q}]$ (размерность $\mathscr{Z}_p$ над $\mathbb{Q}$). Тогда, как предположил Цагир,

$$\sum_{p=0}^{\infty}d_pt^p=\frac{1}{1-t^2-t^3}.$$

Более детальные гипотезы основаны на следующем наблюдении. Рассмотрим, например, произведение $\zeta(2)\,\zeta(3)=\sum\dfrac{1}{n^2}\sum\dfrac{1}{m^3}$. Здесь m

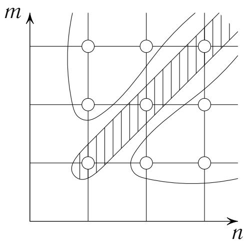

Рис. 2.

и n пробегают часть целочисленной решетки, расположенную в положительном квадранте. Разобьем это множество на три подмножества: диагональ, наддиагональные элементы и поддиагональные элементы (рис. 2).

Легко проверить, что суммирование по диагональным элементам дает $\zeta(5)$, суммирование по поддиагональным элементам дает $\zeta(2,3)$, а суммирование по наддиагональным элементам дает $\zeta(3,2)$. Поэтому

$$\zeta(2)\,\zeta(3) = \zeta(5) + \zeta(2,3) + \zeta(3,2).$$

Обобщая эти рассуждение, можно получить соотношение вида

$$\zeta(a_1,\ldots,a_s)\,\zeta(b_1,\ldots,b_t) = \sum \zeta(c_1,\ldots).$$

Здесь число $\zeta(a_1,\ldots,a_s)$ получается суммированием по наборам $n_1 > \ldots$ $\ldots > n_s$, а число $\zeta(b_1,\ldots,b_t)$ получается суммированием по наборам $m_1 > \ldots > m_t$. Эти наборы нужно перетасовать, т. е. объединить их и после этого расположить числа в порядке убывания.

Это — первое множество мультипликативных соотношений. Есть еще одно множество мультипликативных соотношений. Оно получается следующим образом. Ранее было доказано, что

$$\zeta(3) = \frac{1}{2!}\int_0^\infty \frac{x^2}{e^x-1}\,dx.$$

Сделав замену $x = \ln t$, получим

$$\zeta(3) = \int \frac{(\ln t)^2}{t-1}\,\frac{dt}{t}.$$

После некоторых преобразований можно получить следующее выражение:

$$\zeta(3) = \iiint\limits_{1>x_1>x_2>x_3>0} \frac{dx_1}{x_1}\,\frac{dx_2}{x_2}\,\frac{dx_3}{1-x_3}.$$

Напомню, что в комбинаторных обозначениях $\zeta(3)$ соответствует произведению $Y_3 = X_0X_0X_1$; при этом в интеграле знаменатели трех дробей имеют вид $x_1 - 0$, $x_2 - 0$ и $1 - x_3$. В общем случае формула выглядит следующим образом. Положим $\omega_0(x) = \dfrac{dx}{x}$ и $\omega_1(x) = \dfrac{dx}{1-x}$. Тогда

$$\zeta_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_p} = \int\limits_{1>x_1>\ldots>x_p>0}\ldots\int \omega_{\epsilon_1}(x_1)\ldots\omega_{\epsilon_p}(x_p).$$

Чтобы вычислить $\zeta(k_1,\ldots,k_t)$, нужно рассмотреть произведение $Y_{k_1}\ldots$ $\ldots Y_{k_t} = X_{\epsilon_1}\ldots X_{\epsilon_p}$ (здесь $p = k_1 + \ldots + k_t$). По определению $\zeta(k_1,\ldots,k_t) =$ $= \zeta_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_p}$.

Число $\zeta(2)$ аналогично выражается в виде двойного интеграла:

$$\zeta(2) = \iint\limits_{1>x_1>x_2>0} \frac{dx_1}{x_1}\,\frac{dx_2}{1-x_2}$$

Поэтому $\zeta(2)\,\zeta(3)$ представляется в виде пятикратного интеграла. Переменные нужно перетасовать (расположив их при этом по порядку). Те же самые рассуждения, что и раньше, дают некоторую сумму выражений. Но в этом случае есть некоторое упрощение: диагональ имеет нулевую меру, и поэтому ее можно не рассматривать.

Такие рассуждения дают второе множество мультипликативных соотношений.

Для $\zeta(2)\zeta(3)$ получаем два выражения. Одно из них имеет вид $\zeta(2)\zeta(3) = \zeta(5) + \zeta(2,3) + \zeta(3,2)$. Другое соотношение тоже можно записать явным образом, но мы не будем этого делать. В результате получаем одно линейное соотношение между MZV данного веса $p \geqslant 4$. Из интегрального представления получаем также равенство $\zeta(3) = \zeta(2,1)$

Основная гипотеза такова: все независимые линейные соотношения между MZV данного веса получаются таким способом. Возможно, из этой гипотезы чисто алгебраически можно вывести те две гипотезы, которые были сформулированы ранее. Мои ученики работают сейчас над этой редукцией, но пока это не закончено. Это не легко.

Эта гипотеза весьма сильная. Из нее, в частности, следует, что числа $\zeta(3)$, $\zeta(5)$, ... трансцендентны и алгебраически независимы над полем рациональных чисел. Например, сейчас не известно, является ли число $\zeta(3)$ трансцендентным и является ли число $\zeta(5)$ иррациональным.