Пьер Картье

Комбинаторика деревьев

Я начну с определения чисел Каталана, которые часто встречаются в комбинаторике. Числа Каталана — это числа 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, ... Эта последовательность чисел задается первым членом $c_1 = 1$ и рекуррентным соотношением $c_n = \sum_{p+q=n} c_p c_q = \sum_{p=1}^{n-1} c_p c_{n-p}$. (Здесь удобно положить $c_0 = 0$.)

Чтобы получить явную формулу для чисел Каталана, рассмотрим производящую функцию $c(t) = c_1 t + c_2 t^2 + \ldots$ Из рекуррентного соотношения следует, что $c(t) = t + c(t)^2$. Решая это квадратное уравнение и учитывая, что $c_0 = 0$, получаем $c(t) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4t})$. Следовательно, $c_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$.

Числа Каталана имеют много различных комбинаторных интерпретаций. Для меня наиболее важной будет их интерпретация, предложенная Кэли (1860). А именно: c_n — это число различных триангуляций выпуклого правильного $(n+1)$-угольника. Например, у квадрата есть ровно две триангуляции (рис. 1); это соответствует тому, что $c_3 = 2$. У шестиугольника есть 3 разных типа триангуляций (рис. 2); под каждой из этих триангуляций написано количество различных триангуляций такого типа. Поэтому количество различных триангуляций шестиугольника равно $6 + 2 + 6 = 14 = c_5$.

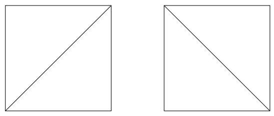

Рис. 1. Триангуляции квадрата

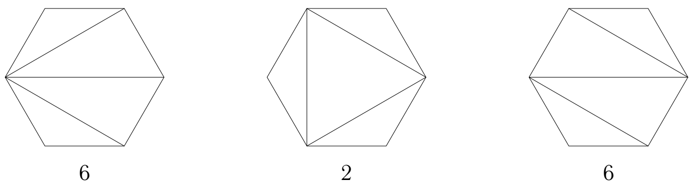

Рис. 2. Триангуляции шестиугольника

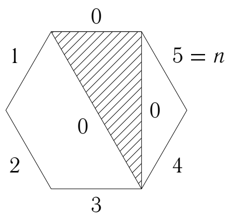

Рис. 3. Пометки сторон и диагоналей

Пусть c'_n — количество различных триангуляций $(n+1)$-угольника. Чтобы доказать равенство $c'_n = c_n$, достаточно проверить, что $c'_n = \sum\limits_{p+q=n} c'_p c'_q$. (Очевидно, что $c'_1 = 1$.) Доказательство проведем на примере шестиугольника. Пометим его стороны числами 0, 1, 2, 3, 4, 5. Выделим треугольник триангуляции, содержащий сторону с пометкой 0 (рис. 3). На диагоналях, являющихся сторонами этого треугольника, тоже поставим пометки 0. В результате (в ситуации, изображенной на рис. 3) получим (3+1)-угольник и (2+1)-угольник, которые нужно триангулировать каким-то способом. В общем случае получаем $(p+1)$-угольник и $(q+1)$-угольник, где $p+q=n$.

Упражнение. Доказать, что для триангуляции выпуклого $(n+1)$-угольника требуется ровно $n-2$ диагонали и при этом получается ровно $n-1$ треугольник.

Другая интерпретация чисел Каталана связана с планарными бинарными корневыми деревьями с n листьями. Триангуляции $(n+1)$-угольника можно сопоставить связное дерево с $n+1$ свободными (т. е. принадлежащими только одному ребру) вершинами, как это показано на рис. 4. При этом одна свободная вершина, соответствующая стороне с пометкой 0, будет выделенной. Помеченную вершину дерева будем называть *корнем*, а остальные свободные вершины будем называть *листьями*.

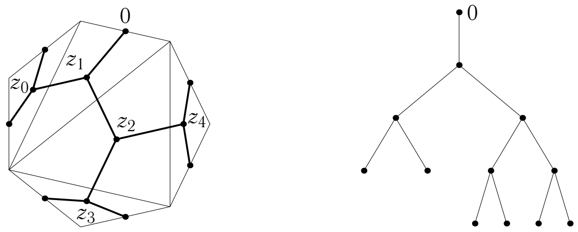

Рис. 4. Построение дерева по триангуляции

Объясним теперь, что такое дерево и что такое планарное бинарное дерево. Приведенный граф — это подмножество $E \subset \binom{V}{2}$, где $\binom{V}{2}$ — двухэлеметные подмножества в V. Элементы множества V — вершины графа, а элементы множества E — ребра графа. Приведенность графа означает, что у него нет петель (ребер с началом и концом в одной и той же вершине) и двойных ребер. Граф называют несвязным, если множество вершин V можно разбить на два (непустых) непересекающихся множества V' и V'' так, что оба конца любого ребра лежат одновременно либо в V', либо в V''. Дерево — это связный граф, не содержащий циклов. (Цикл — это последовательность ребер, образующая многоугольник.) Несвязный граф, не содержащий циклов, называют лесом.

Планарное дерево — это дерево с выбранным вложением в плоскость. С комбинаторной точки зрения это эквивалентно тому, что для каждой вершины задан порядок обхода ребер, одним из концов которых является эта вершина.

Определим теперь, что такое *бинарное корневое дерево*. Прежде всего — это дерево, каждая вершина которого является концом либо одного ребра, либо трех ребер. (Концом одного ребра являются листья и корень.) Кроме того, ребра дерева должны быть ориентированы таким образом, чтобы из каждой внутренней вершины дерева выходило ровно два ребра и входило в нее ровно одно ребро.

Обозначим множество планарных бинарных корневых деревьев с n листьями через $\mathscr{T}_n$. Можно доказать, что планарные бинарные корневые деревья с n листьями находятся во взаимно однозначном соответствии с триангуляциями $(n+1)$-угольника; при этом треугольники триангуляции соответствуют внутренним вершинам дерева, а диагонали триангуляции соответствуют внутренним ребрам дерева. Таким образом, $c_n = |\mathscr{T}_n|$.

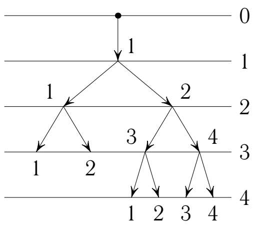

Рис. 5. Расстояние от корня

Для любых двух вершин дерева существует ровно один путь, соединяющий их. Поэтому для любой вершины можно определить расстояние от нее до корня. Расположим вершины, находящиеся на равном расстоянии от корня, на одном уровне (рис. 5). Пусть G_k — множество вершин уровня k. Сопоставив каждой вершине начало входящего в него ребра, получим последовательность отображений

$$G_0 \leftarrow G_1 \leftarrow G_2 \leftarrow G_3 \leftarrow G_4 \leftarrow \ldots$$

Чтобы закодировать эту последовательность отображений, занумеруем вершины одного уровня слева направо (для планарного дерева этот порядок определен однозначно). Введем следующее обозначение: $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$. Тогда $G_j \simeq [\gamma_j]$, где γ_j — количество элементов множества G_j. Последовательность отображений принимает вид

$$[\gamma_0] \leftarrow [\gamma_1] \leftarrow [\gamma_2] \leftarrow [\gamma_3] \leftarrow [\gamma_4] \leftarrow \ldots$$

Эти отображения неубывающие: если числа p и q отображаются в p' и q', то из неравенства $p > q$ следует неравенство $p' \geqslant q'$.

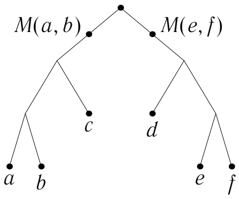

Рис. 6. Расстановка скобок с помощью дерева

1. Универсальная алгебра

Назовем произвольное отображение $\mu\colon X\times X\to X$ *магмой*; это название соответствует тому, что на бинарный закон композиции $(ab)=\mu(a,b)$ не накладываются никакие условия (магма не обладает никакой структурой).

Планарное бинарное корневое дерево с n листьями позволяет расставить скобки в последовательности из n элементов, т. е. оно позволяет задать порядок, в котором нужно выполнять бинарную операцию μ на множестве из n элементов. Например, дереву, изображенному на рис. 6, соответствует следующая расстановка скобок: $(((ab)c)(d(ef)))$. Эта расстановка скобок (т. е. последовательность выполнения операций) получается следующим образом. Возьмем пару свободных ребер с общей вершиной, например пару ребер с концами a и b. Отрежем эту пару ребер и сопоставим образовавшейся при этом новой свободной вершине элемент $\mu(a,b)$. В результате получим дерево с меньшим числом листьев. Для некоторой пары его свободных ребер с общей вершиной повторим ту же самую операцию и т. д.

Таким образом, каждое дерево $T\in\mathscr{T}_n$ задает отображение $\mu_T : X^n\to X$. Это отображение можно записать следующим образом. Пусть $l(T)$ — число листов корневого дерева T. Введем обозначение: $\bigsqcup\limits_T\{T\}\times X^{l(T)} = M(X)$. Тогда магма μ индуцирует отображение $\widetilde{\mu}\colon M(X)\to X$, которое переводит $(T,x_1,\ldots,x_{l(t)})$ в $\mu_T(x_1,\ldots,x_{l(t)})$.

Универсальное свойство.

1) Для любого множества X с заданным умножением на множестве $M(X)$ есть умножение, индуцированное произведением деревьев $(T',T'')\mapsto T'{*}T''$ (рис. 7).

2) Если есть какое-то другое множество Y с умножением $\nu\colon Y\times Y\to Y$, то любое отображение $\phi\colon X\to Y$ единственным образом можно про-

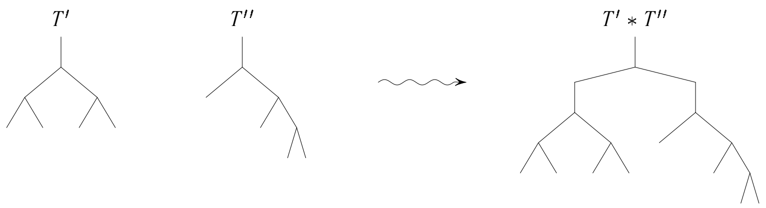

Рис. 7. Произведение деревьев

должить до отображения $\Phi\colon M(X) \to Y$, согласованного с умножением:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\subset"'] & Y \\ M(X) \arrow[ur, "\Phi"'] & \end{tikzcd}$$

Вложение $X \subset M(X)$ устроено следующим образом. Множество $\mathscr{T}_1$ состоит из единственного дерева τ; элементу $x \in X$ мы сопоставляем элемент $(\tau, x_{l(\tau)})$.

Универсальное свойство означает, что $M(X)$ — свободная магма над X. Таким образом, мы получаем явную конструкцию свободной магмы.

Дадим теперь комбинаторную интерпретацию тождества $c(t) = t + c(t)^2$. Пусть $|X| = t$. Обозначим через $M(X)_p$ множество тех деревьев, для которых $l(T) = p$. Тогда $M(X)_p = \mathscr{T}_p \times X^p$ и множество $M(X)$ разлагается следующим образом: $M(X) = \bigsqcup\limits_{p=1}^{\infty} M(X)_p$. Рассмотрим для $M(X)$ ряд Пуанкаре $\sum c_p t^p$. Тождество $c(t) = t + c(t)^2$ вытекает из того, что $M(X) = X \sqcup M(X)^2$. Действительно, любой элемент множества $M(X)$ либо лежит в $M(X)_1$, либо единственным образом представляется в виде произведения двух элементов $M(X)$ (рис. 8).

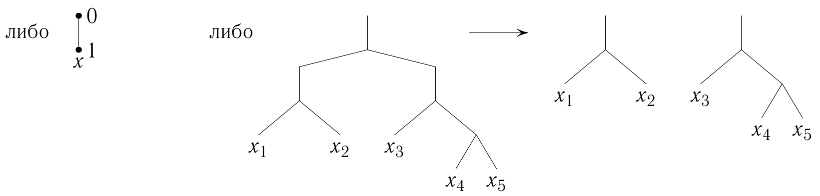

Рис. 8. Разложение дерева

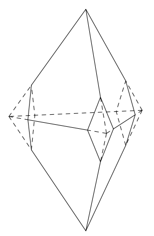

Рис. 9. Многогранник Сташефа $\mathscr{P}_5$

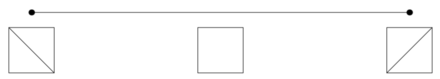

Рис. 10. Многогранник Сташефа $\mathscr{P}_3$

2. Многогранники Сташефа

Многогранник $\mathscr{P}_2$ — это одна точка; $\dim \mathscr{P}_2 = 0$. Число вершин этого многогранника равно $1 = c_2$.

Многогранник $\mathscr{P}_3$ — это отрезок; $\dim \mathscr{P}_3 = 1$. Число вершин этого многогранника равно $2 = c_3$.

Многогранник $\mathscr{P}_4$ — это пятиугольник; $\dim \mathscr{P}_4 = 2$. Число вершин этого многогранника равно $5 = c_4$.

Что такое многогранник $\mathscr{P}_5$, объяснить уже сложнее. Число его вершин должно быть равно $c_5 = 14$. Его размерность должна быть равна 3. Кроме того, все многогранники Сташефа простые (в размерности 3 это означает, что сечение вблизи каждой вершины является симплексом). Многогранник Сташефа $\mathscr{P}_5$ получается следующим образом. Склеим два тетраэдра. У полученного многогранника есть 3 вершины, вблизи которых сечения — четырехугольники. Но если мы отсечем каждую из этих трех вершин плоскостью, то в результате получим простой многогранник (рис. 9). Это и есть многогранник $\mathscr{P}_5$.

Многогранники Сташефа связаны с триангуляциями многоугольников, а именно, вершины многогранника $\mathscr{P}_n$ находятся во взаимно однозначном соответствии с триангуляциями $(n+1)$-угольника. Наиболее простая ситуация для $\mathscr{P}_3$ (рис. 10); вершины отрезка $\mathscr{P}_3$ соответствуют двум триангуляциям квадрата, а внутренность отрезка соответствует самому квадрату.

Следующий по сложности случай — многогранник $\mathscr{P}_4$ (5-угольник); его вершины находятся во взаимно однозначном соответствии с три-

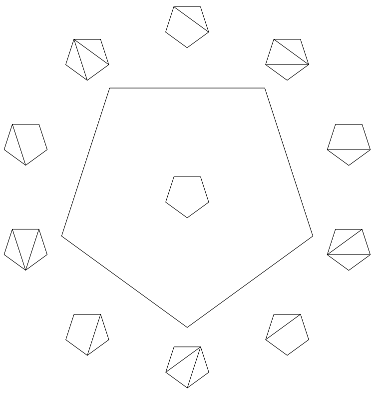

Рис. 11. Многогранник Сташефа $\mathscr{P}_4$

ангуляциями 5-угольника. (рис. 11). Внутренности $\mathscr{P}_4$ соответствует 5-угольник без диагоналей; каждой стороне $\mathscr{P}_4$ соответствует 5-угольник с одной диагональю; каждой вершине $\mathscr{P}_4$ соответствует 5-угольник с двумя диагоналями. При этом две диагонали, относящиеся к вершине $\mathscr{P}_4$, — это в точности те две диагонали, которые относятся к тем двум сторонам $\mathscr{P}_4$, которым принадлежит эта вершина.

Аналогично для клеток $\mathscr{P}_5$ можно установить следующее соответствие: вершинам (0-мерным клеткам) $\mathscr{P}_5$ соответствуют 6-угольники с 3 непересекающимися диагоналями; 1-мерным клеткам $\mathscr{P}_5$ соответствуют 6-угольники с 2 непересекающимися диагоналями; 2-мерным клеткам $\mathscr{P}_5$ соответствуют 6-угольники с 1 диагональю; 3-мерной клетке $\mathscr{P}_5$ соответствует сам 6-угольник.

Граница $\partial\mathscr{P}_5$ состоит из шести 5-угольников (т.е. многогранников $\mathscr{P}_4$) и трех 4-угольников (т.е. многогранников $\mathscr{P}_3 \times \mathscr{P}_3$). Многогранник $\mathscr{P}_2$ — это точка, поэтому $\mathscr{P}_4 = \mathscr{P}_2 \times \mathscr{P}_4 = \mathscr{P}_4 \times \mathscr{P}_2$. Таким образом, $\partial\mathscr{P}_5$ состоит из $2\mathscr{P}_2 \times \mathscr{P}_4$, $4\mathscr{P}_4 \times \mathscr{P}_2$ и $3\mathscr{P}_3 \times \mathscr{P}_3$. В общем случае естественно ожидать, что $\partial\mathscr{P}_n = \bigcup\limits_{p+q=n+1} p\mathscr{P}_p \times \mathscr{P}_q$. В таком случае можно определить отображения $\partial_k : \mathscr{P}_p \times \mathscr{P}_q \to \partial\mathscr{P}_n$, $1 \leqslant k \leqslant p$.

Многогранник $\mathscr{P}_n$ представляется в пространстве $\mathbb{R}^{n-2}$ с координатами $t_1, \ldots, t_{n-2}$ следующей моделью. Рассмотрим множество, заданное системой неравенств $t_1 \geqslant 0$, $t_2 \geqslant 0$, $\ldots$ $\ldots$, $t_{n-2} \geqslant 0$ и $t_1 \leqslant 1$, $t_1 + t_2 \leqslant 2$, $t_1 + t_2 + t_3 \leqslant 3$, $\ldots$ $\ldots$, $t_1 + \ldots + t_{n-2} \leqslant n-2$ (на рис. 12 изображено такое множество для $n = 2$). Многогранник $\mathscr{P}_n$ можно получить, сделав дополнительное разбие-

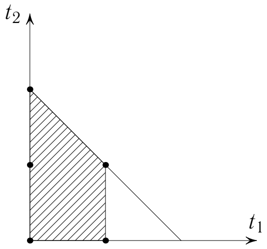

Рис. 12. Модель многогранника $\mathscr{P}_4$

ние некоторых граней этого многогранника. Я оставляю это в качестве упражнения.

Приведем теперь комбинаторную конструкцию $\mathscr{P}_n$ как абстрактного клеточного комплекса. Пусть $n \geqslant 2$. Фиксируем выпуклый $(n+1)$-угольник и фиксируем число $0 \leqslant k \leqslant n-2$. Определим Γ_k (множество k-мерных клеток) следующим образом: элемент $\gamma \in \Gamma_k$ соответствует набору из $n-2-k$ непересекающихся диагоналей в $(n+1)$-угольнике. Например, для $k = n-2$ имеется ровно одна клетка Γ_{n-2}, а 0-мерные клетки Γ_0 соответствуют триангуляциям $(n+1)$-угольника.

Осталось определить отношение инцидентности. Пусть $\gamma \in \Gamma_k$ и $\delta \in \Gamma_l$, причем $k > l$. Тогда клетка δ смежна с клеткой γ (т.е. $\delta \subset \partial\gamma$ геометрически), если $\gamma \subset \delta$ (как множества диагоналей).

Многогранник $\mathscr{P}_n$ определяется как геометрическая реализация этого комплекса. При таком подходе нетривиально доказательство того, что геометрическая реализация этого комплекса гомеоморфна $(n-2)$-мерной клетке.

3. Пространство (вещественных) конфигураций

Рассмотрим вещественную проективную прямую. Топологи обозначают ее $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$, а алгебраические геометры используют обозначение $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ или даже просто $\mathbb{P}^1$. Стандартное определение таково: точка $\mathbb{P}^1$ — это прямая в пространстве V, где $\dim V = 2$. Пусть $u_0, \ldots, u_n$ — различные точки $\mathbb{P}^1$, рассматриваемые с точностью до проективного преобразования. По-другому это можно сказать так: наборы $u_0, \ldots, u_n$ и $v_0, \ldots, v_n$ эквивалентны, если существует такой элемент $g \in G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, что $gu_i = v_i$.

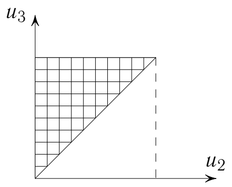

Рис. 13. Пространство конфигураций

Помимо группы G есть другая важная группа $G_+ \subset G$, состоящая из матриц с положительным определителем. Индекс $[G : G_+]$ равен 2. Преобразования из группы G_+ сохраняют ориентацию $\mathbb{P}^1$.

Нас будут интересовать наборы точек $u_0, \ldots, u_n$, рассматриваемые с точностью до преобразования из группы G_+. Можно ввести следующую нормализацию: $u_0 = \infty$. Тогда $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$ — различные точки, рассматриваемые с точностью до преобразования $u_i \mapsto au_i + b$, где $a > 0$ и $b \in \mathbb{R}$.

На этом множестве действует симметрическая группа S_n: элемент $\sigma \in S_n$ переводит набор $u_1, \ldots, u_n$ в набор $u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(n)}$.

Пространство наборов точек состоит из $n!$ связных компонент. Каждый элемент группы S_n переставляет эти связные компоненты. Выберем ту из компонент, для которой $u_1 < \ldots < u_n$. Такие наборы точек называют *вещественными конфигурациями*. Пространство вещественных конфигураций обозначают conf^+_{n+1}.

Рассматриваемая группа преобразований позволяет нормализовать точки так, что $u_1 = 0$ и $u_n = 1$. Например, для $n = 4$ пространство конфигураций изображено на рис. 13. Действительно, в этом случае $0 = u_1 < u_2 < u_3 < u_4 = 1$.

Из пространства конфигураций conf^+_5 легко получить пятиугольник $\mathscr{P}_5$ (рис. 14). Точки пересечения трех прямых соответствуют нестабильным конфигурациям, в которых сталкиваются 3 точки. В этих точках нужно сделать раздутие.

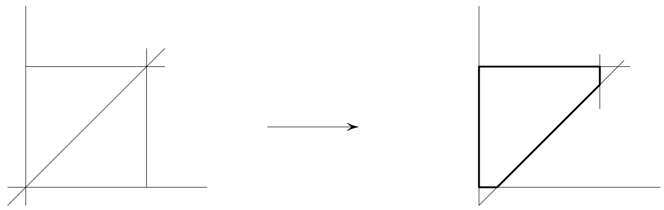

Рис. 14. Компактификация пространства конфигураций

В общем случае Капранов доказал, что многогранник $\mathscr{P}_n$ является естественной компактификацией пространства conf_n^+. При этом внутренность многогранника $\mathscr{P}_n$ отождествляется с пространством conf_n^+; размерности этих пространств равны $n-2$.

Внутренность многогранника $\mathscr{P}_n$ параметризует конфигурации. Рассмотрим теперь внутренние точки граней многогранника $\mathscr{P}_n$ размерности $n-3$. Такие точки принадлежат одному из множеств $\operatorname{int}\mathscr{P}_p \times \operatorname{int}\mathscr{P}_q$, где $p+q=n+1$. Сопоставим точке такого множества композицию двух конфигураций (рис. 15). Для этого склеим две проективные прямые в одной точке. Конфигурации на одной проективной прямой параметризуются $\operatorname{int}\mathscr{P}_p$, а конфигурации на другой параметризуются $\operatorname{int}\mathscr{P}_q$. Для первой прямой точку касания пометим числом k, а для второй прямой эту точку пометим числом 0. При этом $1 \leqslant k \leqslant p$, как и должно быть (с. 82).

В общем случае, склеивая проективные прямые, получаем бинарное дерево (рис. 16).

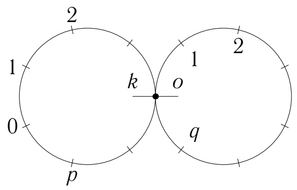

Рис. 15. Композиция конфигураций

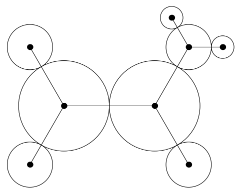

Рис. 16. Дерево конфигураций