# Пьер Картье


# Что такое операда?

Лекция будет состоять из следующих частей:

1. Что такое операда?
2. (Ко)гомологические операции.
3. Возвращение к конфигурационному пространству.
4. Заключение: физика.

Теория операд — это теория комбинирования операций. Предположим, что задана магма $X \times X \to X$, $a, b \mapsto (ab)$. Из этой бинарной операции можно строить более сложные операции.

Рассмотрим функцию $f(x_1, \ldots, x_n) \in X$, $x_i \in X$. На языке теории вычислений можно считать, что на вход подаются $x_1, \ldots, x_n$, а на выходе получается $f(x_1, \ldots, x_n)$ (рис. 1).

Операции можно сопоставить $(n+1)$-угольник; сторона с номером 0 соответствует выходу, а стороны с номерами $1, \ldots, n$ соответствуют входу (стороны нумеруются по часовой стрелке: рис. 2).

Определим теперь операцию $f \circ_i g$. Пусть заданы функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, число $1 \leqslant i \leqslant n$ и функция $g(y_1, \ldots, y_p)$. Тогда можно сделать подста-

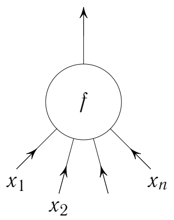



Рис. 1. Операция

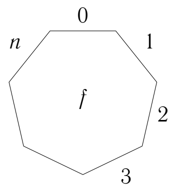



Рис. 2. Многоугольник, соответствующий операции

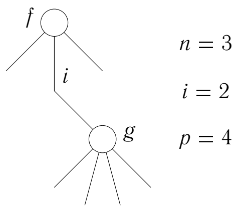
новку $x_i = g(y_1, \ldots, y_p)$. Функцию

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, g(y_1, \ldots, y_p), x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

мы будем рассматривать как функцию от $n+p-1$ переменных $x_1, \ldots$ $\ldots, x_{n+p-1}$; для этого ее нужно записать в виде

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, g(x_i, \ldots, x_{i+p-1}), x_{i+p}, \ldots, x_{n+p-1}) = h(x_1, \ldots, x_{n+p-1}).$$

Операцию $f \circ_i g$ можно проинтерпретировать как на языке графов (рис. 3), так и на языке многоугольников (рис. 4). Графы удобны тем, что их вершины не нужно нумеровать: достаточно задать ориентацию в горизонтальном направлении (например, слева направо, как на рис. 3). Для многогранников сторона многоугольника $g$ с номером 0 приклеивается к стороне многоугольника $f$ с номером $i$.



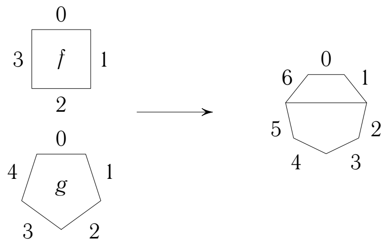




Рис. 3. Склейка графов

Рис. 4. Склейка многоугольников

Эти интерпретации показывают, что комбинирование операций связано как с деревьями, так и с многоугольниками, в которых выделены непересекающиеся диагонали.

Бинарные деревья связаны с бинарными операциями (рис. 5).

Пусть $X$ — множество с бинарной операцией $\mu\colon X \times X \to X$. Положим $\mathscr{P}_n = Map(X^{\times n}, X)$. В частности, $\mathscr{P}_0 = X$ и $\mathscr{P}_1 = Map(X, X)$. Если $f \in \mathscr{P}_n$ и $g \in \mathscr{P}_p$, то $f \circ_i g \in \mathscr{P}_{n+p-1}$. Поэтому возникает отображение

$$\circ_i\colon \mathscr{P}_n \times \mathscr{P}_p \to \mathscr{P}_{n+p-1}.$$

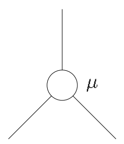


Рис. 5. Бинарная операция

Будем предполагать, что бинарная операция на $X$ коммутативна: $\mu(a,b)=\mu(b,a)$.

На $\mathscr{P}_n$ действует симметрическая группа $S_n$ посредством перестановок переменных:

$$\sigma f(x_1,\ldots,x_n)=f(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}).$$

Для $x=(x_1,\ldots,x_n)$ введем обозначение $x\cdot f=f(x_1,\ldots,x_n)$. Будем предполагать, что $x\sigma\cdot f=x\cdot\sigma f$.

Операда функций на $X$ — это набор $\mathscr{P}_n$, $n=0,1,\ldots$, с заданным действием $S_n$ на $\mathscr{P}_n$ и с заданными композициями $\circ_i$.

Линейная операда получается, если $\mathscr{P}_n$ — векторное пространство (над полем $K$), действие группы $S_n$ линейное, а композиции билинейные.

Например, пусть

$$\mathscr{P}_n=\mathrm{Hom}_K(V^{\otimes n},V),\quad \text{где}\quad V^{\otimes n}=\underbrace{V\otimes\ldots\otimes V}_{n}.$$

Здесь $K$ — поле нулевой характеристики и $V$ — векторное пространство размерности $d<+\infty$. На пространстве $V^{\otimes n}$ действует группа $G=\mathrm{GL}(V)$:

$$g(v_1\otimes\ldots\otimes v_n)=gv_1\otimes\ldots\otimes gv_n.$$

На пространстве $V^{\otimes n}$ действует также группа $S_n$:

$$\sigma(v_1\otimes\ldots\otimes v_n)=v_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\ldots\otimes v_{\sigma^{-1}(n)}.$$

Эти действия коммутируют. Кроме того, $V^{\otimes n}$ является полупростым $S_n$-модулем, т.е.

$$V^{\otimes n}=P_1\oplus\ldots\oplus P_l,$$

где $P_i$ — неприводимые (простые) $S_n$-модули. В этом разложении можно объединить одинаковые слагаемые, воспользовавшись тем, что $P\oplus P=P\otimes K^2$, $P\oplus P\oplus P=P\otimes K^3$, ... В результате получим разложение

$$V^{\otimes n}=\bigoplus_D P_D\otimes F_D.$$

При этом $\sigma(p_D \otimes f_D) = \sigma p_D \otimes f_D$ и $g(p_D \otimes f_D) = p_D \otimes g f_D$. В стабильной области, где $d \geqslant n$, представления группы $S_n$ и представления группы $\mathrm{GL}_d(K)$ параметризуются одними и теми же диаграммами Юнга $D$. Это — двойственность Шура—Вейля.

Рассмотрим еще один пример (Макдональд и Милнор). Пусть $\mathrm{Vect}_K^f$ — категория конечномерных векторных пространств над полем $K$, $\mathrm{Vect}_K$ — категория векторных пространств (не обязательно конечномерных) над полем $K$. Пусть $T$ — функтор из категории $\mathrm{Vect}_K^f$ в ту же самую категорию $\mathrm{Vect}_K^f$. Функтор $T$ сопоставляет векторному пространству $V$ векторное пространство $T(V)$, а линейному отображению $\phi\colon V \to W$ он сопоставляет линейное отображение $T(\phi)\colon T(V) \to T(W)$. Линейные отображения $\phi$ и $T(\phi)$ представляются матрицами (разных размеров). Потребуем, чтобы выполнялось следующее условие: элементы матрицы $T(\phi)$ выражаются через элементы матрицы $\phi$ как однородные многочлены степени $t$. В таком случае будем говорить, что $T$ — однородный функтор степени $t$. Пусть $J_t$ — векторное пространство над $K$ с заданным действием группы $S_t$. Положим

$$T_t(V) = \left(\left(\underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{t}\right) \otimes J_t\right)^{S_t}$$

и $T = \bigoplus\limits_{t=0}^{\infty} T_t$. В результате получим функтор из $\mathrm{Vect}_K^f$ в $\mathrm{Vect}_K$.

Теперь пример из универсальной алгебры. Пусть $V$ — векторное пространство (над полем $K$) с базисом $e_1, \ldots, e_d$ и $\mathrm{Sym}(V) = K[e_1, \ldots, e_d]$. Тогда

$$\mathrm{Sym}(V) = \bigoplus_{t=0}^{\infty} \mathrm{Sym}^t(V),$$

где $\mathrm{Sym}^t(V) = \left(\underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{t}\right)^{S_t}$ — симметрическая часть. Это соответствует предыдущему примеру для $J_t = K$ с тривиальным действием группы $S_t$.

Пусть $\mathrm{Com}_K$ — категория коммутативных ассоциативных алгебр с единицей над полем $K$. Учитывая, что $\mathrm{Sym}^1(V) = V$, получаем вложение $V \subset \mathrm{Sym}(V)$; при этом $\mathrm{Sym}(V)$ — объект категории $\mathrm{Com}_K$. Пусть $A$ — объект категории $\mathrm{Com}_K$. Тогда любое линейное отображение $\lambda\colon V \to A$ однозначно продолжается до гомоморфизма $\Lambda\colon\ \mathrm{Sym}(V) \to A$. Будем считать, что $J_t = K$ с тривиальным действием группы $S_t$. Операцию умножения в $A$ обозначим $\mu(a,b)=a\cdot b$. Пусть

$$\mathscr{P}(A)_n=\mathrm{Hom}_K(A^{\otimes n},A).$$

Ясно, что $\mu\in\mathscr{P}(A)_2$. Рассмотрим наименьшую подопераду в $\mathscr{P}(A)$, содержащую $\mu$. Из ассоциативности умножения следует, что все деревья дают одну и ту же операцию. Операцию степени $n$ можно обозначить $\mu_n$.

Если помимо ассоциативности есть коммутативность, то есть инвариантность относительно действия группы $S_n$. Если же есть только ассоциативность, то получаем универсальную алгебру

$$T(V)=\bigoplus_{t=0}^{\infty}\underbrace{V\otimes\ldots\otimes V}_{t}.$$

В случае, когда $J_t=KS_t$ — регулярное представление ($\dim J_t=t$), получаем операду $Ass_K$.

Пусть $V$ — векторное пространство. Свободная алгебра Ли $\mathrm{Lie}(V)$ над $V$ определяется следующим образом. Рассмотрим линейное отображение $\Delta\colon T(V)\to T(V)\otimes T(V)$, которое для $v\in V$ имеет вид $\Delta v=v\otimes 1+1\otimes v$. Тогда

$$\mathrm{Lie}(V)=\{u\in T(V)\colon \Delta u=u\otimes 1+1\otimes u\}.$$

В частности, $V\subset\mathrm{Lie}(V)$. Определим в $\mathrm{Lie}(V)$ коммутатор $[u,u']=uu'-u'u$.

Положим

$$\mathrm{Lie}_t(V)=\left(\underbrace{V\otimes\ldots\otimes V}_{t}\otimes\mathscr{L}_t\right)^{S_t},$$

где $\mathscr{L}_0=0$, $\mathscr{L}_1=0$; пространство $\mathscr{L}_2$ порождено $[x,y]=-[y,x]$; пространство $\mathscr{L}_3$ порождено элементами $[x,[y,z]]$, $[y,[z,x]]$ и $[z,[x,y]]$, связанными соотношением $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$ (тождество Якоби).

Определим теперь когомологии Хохшильда. Пусть $A$ — ассоциативная алгебра с единицей над полем $K$. Положим

$$C^p=\mathrm{Hom}_K(A^{\otimes p},A).$$

Элемент $c(a_1,\ldots,a_p)\in C^p$ называют коцепью степени $p$. Ясно, что $\mu\in C^2$, где $\mu(a_1,a_2)=a_1a_2$. Определим произведение коцепей следующим образом:

$$c\circ c'=c\circ_1 c'-c\circ_2 c'+c\circ_3 c'-\ldots$$

Положим
$$[c,c']=c\circ c'+(-1)^{|c|+|c'|+|c||c'|}c'\circ c.$$
Тогда, как заметил Герстенхабер (60-е годы), с точностью до знака выполняется тождество Якоби:
$$[[c,c'],c'']=[c,[c',c'']]+(-1)^{|c|+|c'|+|c||c'|}[c',[c,c'']].$$
Кроме того,
$$[c',c]=(-1)^{|c|+|c'|+|c||c'|}[c,c'].$$
При этом $\deg[c,c']=\deg c+\deg c'-1$. В частности, $\mu_2=[\mu,\mu]$ имеет степень 2. Из-за ассоциативности $\mu_2(a,b,c)=(ab)c-a(bc)=0$.

Положим $\mathfrak{b}c=[\mu,c]$. Тогда $\mathfrak{b}\colon C^p\to C^{p+1}$ и из тождества Якоби следует, что $\mathfrak{b}\mathfrak{b}=0$. Гомологии комплекса $C$ с дифференциалом $\mathfrak{b}$ называют когомологиями Хохшильда и обозначают $HH^*(A,A)$.

В когомологиях Хохшильда есть две операции: коммутатор Герстенхабера $[\ ,\ ]_G$ (его степень равна $-1$) и $\cup$-произведение, которое определяется следующим образом:
$$c\cup c'(a_1,\dots,a_p,a_{p+1},\dots,a_{p+q})=c(a_1,\dots,a_p)c'(a_{p+1},\dots,a_{p+q});$$
степень $\cup$-произведения равна 0.

Свойства этих операций таковы: $\cup$-произведение ассоциативно, а на уровне когомологий оно даже коммутативно с точностью до знака; операция $[\ ,\ ]_G$ коммутативна с точностью до знака и для нее с точностью до знака выполняется тождество Якоби. На уровне когомологий выполняется правило Лейбница:
$$[c,c'\cup c'']_G=[c,c']_G\cup c''\pm c'\cup[c,c'']_G.$$

## 1. (Ко)гомологические операции

Дадим теперь описание конструкции топологической операды, которую предложил Сташеф в 60-е годы. Начнем с определения умножения Понтрягина в гомологиях. Пусть $X$ — топологическое пространство и $\mu\colon X\times X\to X$ — непрерывное отображение. Рассмотрим гомологии с рациональными коэффициентами $\mathbb{Q}$. По формуле Кюннета $H_*(X\times X)=H_*(X)\otimes H_*(X)$, поэтому отображение $\mu$ индуцирует отображение $H_*(\mu)\colon H_*(X)\otimes H_*(X)=H_*(X\times X)\to H_*(X)$ (умножение Понтрягина). Таким образом произведение в пространстве дает произведение в гомологиях. Если произведение $\mu$ ассоциативно, то произведение в гомологиях тоже ассоциативно; то же самое верно для коммутативности.

Два дерева, изображенные на рис. 6, соответствуют двум разным расстановкам скобок в произведении трех элементов. Для топологического пространства с произведением $\mu\colon X \times X \to X$ эти два способа расстановки скобок определяют два отображения $X \times X \times X \to X$. Если эти отображения гомотопны, то умножение в $H_*$ ассоциативно.

Двум деревьям, рассмотренным выше, соответствуют две триангуляции квадрата (рис. 7), а этим двум триангуляциям соответствует многогранник Сташефа $\mathscr{P}_3$ (рис. 8).

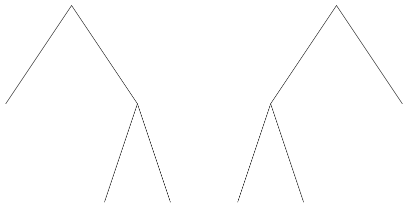


*Рис. 6. Два дерева*

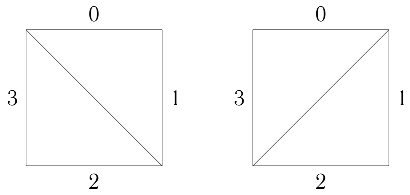



*Рис. 7. Две триангуляции*

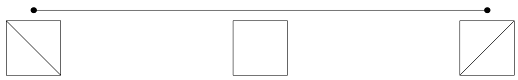


Рис. 8. Многогранник $\mathscr{P}_3$

Аналогично по отображению $\mathscr{P}_3 \times X^3 \to X$ можно определить отображение $\mathscr{P}_n \times X^n \to X$. Напомню, что $\partial \mathscr{P}_n = \bigcup\limits_{p+q=n+1} p\mathscr{P}_p \times \mathscr{P}_q$ и имеются отображения $\mathscr{P}_p \times \mathscr{P}_q \to \mathscr{P}_{p+q-1}$. Поэтому получаем отображение

$$H_*(\mathscr{P}_n) \otimes H_*(X) \otimes \ldots \otimes H_*(X) \to H_*(X).$$

Здесь $\mathscr{P}_n$ — топологическая клетка размерности $n-2$, поэтому $H_0(\mathscr{P}_n) = \mathbb{Q}$ и $H_i(\mathscr{P}_n) = 0$ при $i \geqslant 1$. В результате для каждого $n = 2, 3, \ldots$ получаем операцию порядка $n$ в $H_*(X)$. Например, при $n = 2$ получаем умножение Понтрягина, при $n = 3$ получаем препятствие к ассоциативности умножения Понтрягина.

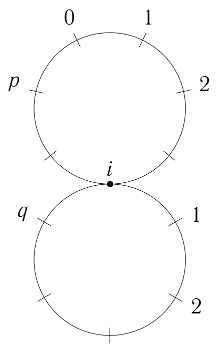



Рис. 9. Композиция

## 2. Возвращение к конфигурационному пространству

Ввиду того, что пространство $\mathscr{M}_{0,n+1}(\mathbb{R})$ гомеоморфно $S_n \times \operatorname{int} \mathscr{P}_n$, $\overline{\mathscr{M}_{0,n+1}(\mathbb{R})} \approx S_n \times \mathscr{P}_n$. В положительных размерностях гомологии $H_*(\overline{\mathscr{M}_{0,n+1}(\mathbb{R})})$ тривиальны.

Положим $\Pi_n = H_0(\overline{\mathscr{M}_{0,n+1}(\mathbb{R})}, \mathbb{Q})$. Тогда $\Pi_n = \mathbb{Q}\, S_n$ — регулярное представление группы $S_n$.

Рассмотрим набор множеств $\mathscr{X}_n = \overline{\mathscr{M}_{0,n+1}(\mathbb{R})}$, $n = 0, 1, \ldots$ Группа $S_n$ действует на $\mathscr{X}_n$. Для $1 \leqslant i \leqslant p$ можно образовать композицию $\circ_i$, как показано на рис. 9. В результате получаем вырожденную конфигурацию; все вырожденные конфигурации такого вида образуют пространство, гомеоморфное $\operatorname{int}(\mathscr{P}_p \times \mathscr{P}_q)$. При компактификации получаем точку пространства $\mathscr{P}_{p+q-1}$. Таким образом, многогранники Сташефа (или конфигурационные пространства) могут быть организованы в топологическую операду $\mathscr{X}$.

Если есть топологическая операда, то из нее с помощью гомологий можно получить алгебраическую операду. Из топологической операды Сташефа $\mathscr{X}$ получается тривиальная алгебраическая операда $Ass_{\mathbb{Q}}$. Но в комплексном случае теория нетривиальна.

Комплексная теория получается следующим образом. Рассмотрим пространство $\mathscr{M}_{0,n+1}(\mathbb{C})$, которое получается из

$$\mathbb{C}^n_* = \{z = (z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : z_j \neq z_k \text{ при } j \neq k\}$$

факторизацией по действию аффинной группы $z \mapsto az + b$. Компактификация $\overline{\mathscr{M}_{0,n+1}(\mathbb{C})}$ определяется довольно сложно; это было сделано

Делинем и Мамфордом. Из пространств $\overline{\mathscr{M}_{0,n+1}(\mathbb{C})}$ можно организовать топологическую операду. В вещественном случае было объяснено, как это делается. В вещественном случае композиция представляется вещественными многочленами с рациональными коэффициентами. Их можно комплексифицировать, заменив вещественные переменные комплексными.

В вещественном случае гомологии получаются тривиальными, а в комплексном случае гомологии $H_*(\overline{\mathscr{M}_{0,n+1}(\mathbb{C})}, \mathbb{Q})$ очень интересны. Они образуют алгебраическую операду $\Pi_{\mathbb{C}}$. В этой алгебраической операде есть два специальных элемента, которые в некотором смысле ее порождают. А именно, cup-произведение $\cup$ и произведение Герстенхабера $[\ ,\ ]_G$. Это означает, что операда $\Pi_{\mathbb{C}}$ действует на $HH^*(A)$. Это получается вычислениями. Вопрос заключается в том, чтобы объяснить, почему это происходит.

В 1970 г. Арнольд вычислил гомологии $H_*(\mathbb{C}^n_*)$. Это позволяет вычислить гомологии некомпактифицированного пространства. Вопрос заключается в том, чтобы понять, почему гомологии $H_*(\overline{\mathscr{M}_{0,n+1}(\mathbb{C})}, \mathbb{Q})$ — это как раз то, что управляет операциями в когомологиях Хохшильда. Желательно построить действие на уровне коцепей.

Теперь коротко о связи с физикой. Одна из важнейших задач сейчас — точное решение уравнений Янга—Бакстера. Их решения можно получить как решения некоторых дифференциальных уравнений — так называемых уравнений Книжника—Замолодчикова, которые строятся на $\mathbb{C}^n_*$. При построении решений этих уравнений (Дринфельд) возникают степенные ряды, связанные с MZV-числами, о которых шла речь на первой лекции.

Есть также связь с диаграммами Фейманна и с матрицей рассеяния.