А. Б. Каток

Биллиардный стол как игровая площадка для математика

Название этой лекции можно понимать двояко. В буквальном, несколько шутливом смысле: математики резвятся, запуская биллиардные шары на столах различной формы и наблюдая (а также пытаясь предсказать) что получится. В более серьезном значении выражение «игровая площадка» следует понимать как «испытательный полигон»: различные вопросы, гипотезы, методы решения и т. д. в теории динамических систем «испытываются» на различных типах биллиардных задач. Я надеюсь убедительно продемонстрировать, что по крайней мере вторая интерпретация заслуживает серьезного внимания.

О биллиардах написано довольно много и в научных статьях, и в монографиях, и в учебниках, и в научно-популярной литературе. Короткие брошюры Г. А. Гальперина и А. Н. Землякова [4] и Г. А. Гальперина и Н. И. Чернова [5] написаны весьма доступно и освещают широкий круг вопросов. Введение в проблематику, связанную с биллиардами, для более подготовленного читателя содержится в главе 6 книги [9]. Следующий уровень представлен очень хорошо написанной книгой С. Табачникова [14], выход которой на русском языке, к сожалению, задерживается. Книга автора и Б. Хасселблатта [8] содержит достаточно детальное современное изложение теории выпуклых биллиардов и закручивающих отображений. Серьезное, но вполне доступное изложение современного состояния теории параболических биллиардов содержится в обзорной статье Х. Мезера и С. Табачникова, которая выйдет в свет (на английском языке) весной 2002 года [11]. Сборник [12] содержит богатый материал по гиперболическим биллиардам и смежным вопросам. Ссылки более специального характера даются по ходу изложения.

1. Эллиптические, параболические и гиперболические явления в динамике

Задача о движении биллиардного шара формулируется очень просто. Имеется замкнутая кривая $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$. Внутри области D, ограниченной этой кривой, равномерно движется точка по отрезкам прямых, а когда точка встречается с кривой, она отражается от кривой по закону «угол падения равен углу отражения». Задача состоит в том, чтобы понять характер этого движения за большое время.

Мы имеем дело с динамической системой, которая, вообще говоря, не всюду определена. Например, если в области с кусочно гладкой границей точка попадает в угол, то непонятно, как продолжать траекторию. Есть и более тонкие эффекты: при некоторых начальных условиях возможна ситуация, когда за конечное время происходит бесконечное число соударений и движение не может быть продолжено. Но это эффекты патологические; можно говорить, что имеется динамическая система.

Решение задачи о движении шара зависит от области. Одна из причин, по которым интересна эта задача, заключается в том, что формальное описание движения очень просто и остается только содержательная часть. Вторая, более серьезная причина уже была упомянута. Она связана с тем, что если попытаться каким-то образом расклассифицировать задачи теории динамических систем, то, с некоторым огрублением, их можно разделить на эллиптические, параболические и гиперболические (рис. 1). Таким образом, биллиардный стол — это полигон, на котором можно испытывать методы, гипотезы, вопросы, возникающие в разных областях теории динамических систем.

Ничего нового в использовании этих слов для выражения некоторой трихотомии нет. Соответствующая классификация в теории дифференциальных уравнений в частных производных хорошо известна. Но для динамических систем подобная классификация систематически, по-видимому, не была проведена.

В случае биллиардов эллиптические эффекты возникают, например, для эллипса. Это совпадение не совсем случайное, однако оно непосредственно не распространяется на биллиарды внутри параболы и гиперболы. Более общая ситуация, в которой возникают эллиптические эффекты, такова: кривая гладкая (достаточно высокого класса гладкости), выпуклая, и ее кривизна нигде не обращается в нуль. Изучение бильярдной задачи внутри таких областей дает хорошее поле для демонстрации проблематики, а также результатов, связанных с эллиптическим поведением динамических систем.

В параболической ситуации область — обычный многоугольник. Для простоты можно даже взять прямоугольный треугольник, углы которого отличны от 30° и 45°. Прямоугольный треугольник с углом $\pi/8$ уже дает пример динамической системы с параболическим поведением.

Гиперболическая ситуация хорошо представляется тремя примерами (см. рис. 1): квадратом с вырезанным кружком, «стадионом» и кардиоидой.

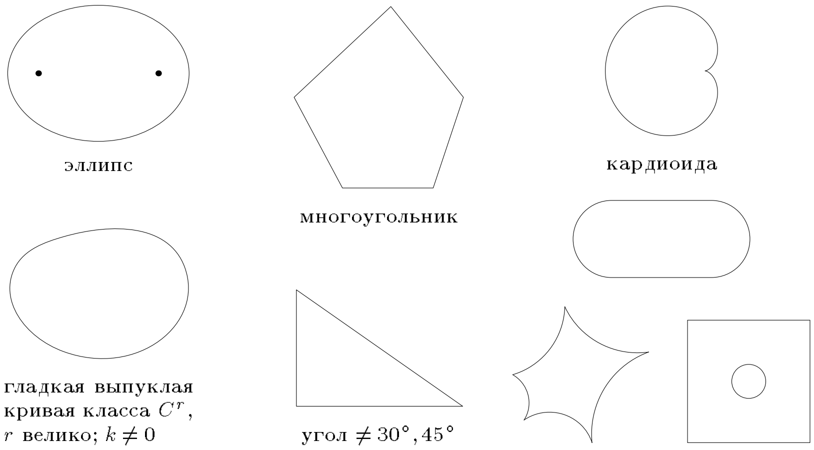


Рис. 1. Эллиптические, параболические и гиперболические бильярды

Идея, по крайней мере, о дихотомии, которая существует в теории динамических систем, за последние годы уже укоренилась. Одна из наиболее замечательных книг по теории динамических систем, написанных во второй половине XX века, — книга Юргена Мозера «Stable and random motion in dinamical systems». «Stable» — это эллиптические эффекты, «random» — гиперболические. Параболические эффекты в книге Мозера не обсуждаются.

Чтобы дать некоторое представление о характере трихотомии, которая здесь возникает, поясню, откуда взялись эти названия. Для линейных отображений соответствующая трихотомия хорошо известна. Для линейного отображения $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ возможны три основных вида поведения:

(1) Устойчивое поведение. Оно возникает тогда, когда все собственные значения λ_i по модулю равны 1 и нет нетривиальных жордановых клеток: $\mathrm{Sp}\, L \subset S^1$. В этой ситуации все орбиты возвращающиеся и устойчивые. Это эллиптическое поведение.

(2) По-прежнему $|\lambda_i| = 1$, но есть нетривиальные жордановы клетки. У жордановой клетки есть собственный вектор, поэтому есть и устойчивые орбиты. Однако в этой ситуации типично полиномиальное разбегание орбит. Это параболическое поведение.

(3) Гиперболическое поведение: $\mathrm{Sp}\, L \cap S^1 = \varnothing$. В этой ситуации любые две орбиты экспоненциально разбегаются либо в положительном, либо в отрицательном направлении.

Возможны также комбинации этих трех парадигм. Например, весьма важно то, что мы называем частично гиперболической ситуацией, когда в спектре есть гиперболическая компонента и что-то еще. В динамике это очень важная парадигма.

Было бы очень наивно пытаться строить концепцию нелинейной дифференциальной динамики на основании только этих трех моделей. Чем вообще занимается нелинейная дифференциальная динамика? Она занимается анализом асимптотического поведения гладких систем, для которых есть понятие локального инфинитезимального поведения системы, а с другой стороны, в силу компактности фазового пространства, есть феномен возвращения орбит сколь угодно близко к начальному положению. Грубо говоря, деление нелинейной динамики на эллиптическую, параболическую и гиперболическую соответствует ситуациям, когда линейное поведение, которое более или менее аппроксимируется этими тремя типами, сочетается с нетривиальным характером возвращения.

Такой подход игнорирует очень существенную часть проблематики теории динамических систем, например, такие вещи, как анализ систем Морса—Смейла или эффекты, связанные с бифуркациями. Речь идет о ситуациях, когда возвращение простое, а интересные феномены относятся, например, к тому, как фазовое пространство разделяется на бассейны притяжения к нескольким имеющимся притягивающим точкам или предельным циклам. Это все игнорируется. Мы сейчас говорим только о той части динамики, которая относится к рекуррентному поведению. Нерекуррентное поведение нами сейчас более или менее игнорируется.

Чтобы правильно проинтерпретировать интересующие нас феномены, нужно понять, что такое линеаризация динамической системы. Пусть задано отображение $f\colon M \to M$, действующее на фазовом пространстве. Мы считаем, что фазовое пространство является гладким объектом, поэтому можно говорить о действии на касательные векторы. Для любой точки $x \in M$ имеется линейное отображение $Df_x\colon T_xM \to T_{f(x)}M$. Такое отображение само по себе интересно только в случае неподвижной точки. Но в общем случае в динамике можно рассмотреть итерации Df_x^n. Введя риманову метрику, можно говорить об асимптотической скорости роста длины векторов. Риманова метрика вводится неоднозначно, но на компактном многообразии любые две метрики отличаются в пределах мультипликативной константы, поэтому скорость роста векторов определена корректно.

Эллиптическое поведение возникает тогда, когда в линеаризованной системе роста длины векторов либо совсем нет, либо он медленнее, чем линейный (сублинейный рост).

Жорданова клетка минимального порядка 2 соответствует уже линейному росту. Параболическое поведение — это субэкспоненциальный рост (обычно полиномиальный).

Гиперболическая парадигма понята лучше всего. Она соответствует ситуации, в которой система расщепляется и в некоторых направлениях происходит экспоненциальный рост, а в других направлениях экспоненциальное убывание. Когда время обращается, эти направления меняются местами.

Бывают смешанные ситуации. Например, можно взять прямое произведение двух систем разного типа. Но как метаутверждение можно сказать, что гиперболическая парадигма доминирующая: если есть нетривиальный гиперболический эффект и что-то еще, то обычно поведение системы может быть понято на основании ее гиперболической части. Это неверно в буквальном смысле. Например, это неверно для прямого произведения динамических систем. Но для типичной динамической системы гиперболическое поведение «забивает» все остальное.

Можно также сделать такое интересное замечание. Когда размерность фазового пространства мала, смешанное поведение невозможно. Например, когда размерность фазового пространства равна 2, частично гиперболическое поведение невозможно, потому что для гиперболического поведения нужно хотя бы одно расширяющее и хотя бы одно сжимающее направление. По той же самой причине в малых размерностях чаще встречается эллиптическое или параболическое поведение.

Самым чистым примером эллиптического поведения является ситуация, когда имеется гладкая изометрия. В этом случае никакого роста не происходит. Для гладких изометрий понять динамику довольно легко. Если на компактном фазовом пространстве есть гладкая изометрия, то фазовое пространство разбивается на инвариантные торы, и на каждом торе возникает параллельный перенос (или вращение, если применяются мультипликативные обозначения). В частности, если само многообразие не является тором, то такое движение не транзитивно.

Это, конечно, частный случай того, что хорошо известно в гамильтоновой механике, а именно, это соответствует вполне интегрируемым гамильтоновым системам. Это хороший пример взаимодействия парадигм, потому что если на вполне интегрируемую систему посмотреть наивно, то ее нужно отнести к параболической парадигме. Действительно, линейная часть вполне интегрируемой гамильтоновой системы параболическая, потому что в направлении, трансверсальном инвариантным торам, происходит закручивание. С другой стороны, пространство разбивается на инвариантные торы и на каждом торе анализ производится с помощью эллиптических методов.

Эта ситуация типична. Именно по этой причине эллиптическая парадигма важна. Довольно редко бывает, что глобальное поведение на всем фазовом пространстве характеризуется отсутствием роста. Но довольно часто внутри фазового пространства есть какие-то элементы, где поведение может быть описано с помощью эллиптической парадигмы.

Гиперболическая ситуация изучена лучше всего. В некотором смысле, это единственная универсальная парадигма сложного поведения в динамике. Она может быть хорошо понята с помощью цепей Маркова и простых стохастических моделей. С точки зрения приложений динамики, если гиперболическое поведение установлено, то дальше можно применять довольно мощный разработанный аппарат, который позволяет изучать поведение нелинейных систем. Все это возникает благодаря взаимодействию определенного поведения линеаризованной системы с более или менее a priori существующим возвращением. В линейных системах гиперболичность сопровождается просто разбеганием системы в бесконечность. Но если разбегаться некуда, если обязательно нужно возвращаться, то возникают упомянутые выше и хорошо понятые типы сложного поведения.

Параболическое поведение, в отличие от эллиптического и гиперболического, во-первых, неустойчиво, а во-вторых, оно характеризуется отсутствием стандартных моделей. В эллиптической ситуации есть универсальная модель — вращение на торе (или какие-то его следы), а в гиперболической ситуации есть марковская модель, которая все описывает. В параболической ситуации, по-видимому, нельзя даже сказать, что есть какой-то набор моделей, к которым все более или менее сводится. Тем не менее, есть довольно характерные явления, которые встречаются в конкретных классах систем. Одно из этих явлений состо-

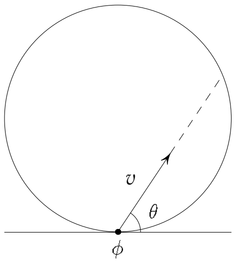


Рис. 2. Координаты вектора после отражения

ит в том, что часто эффект умеренного растяжения можно подменить эффектом разрезания. Например, если есть система, которая локально выглядит как изометрия, но при этом испытывает разрывы, то такая система относится к параболической парадигме.

Хорошо известный пример — перекладывание отрезков. Мы разрезаем отрезок на части и перекладываем их в соответствии с заранее заданной перестановкой. Локально эта система выглядит как эллиптическая, но есть эффект разрезания. Довольно легко сообразить, что эту систему нужно рассматривать как параболическую: при итерациях число отрезков растет линейно. Эта линейность не является результатом закручивания, она является результатом разрезания. Но эффект примерно тот же самый.

Таким образом, параболическое поведение часто связано с существованием умеренных особенностей в системах. Не случайно на картинке для иллюстрации параболического поведения был нарисован биллиард в многоугольнике.

2. Биллиарды в гладких выпуклых областях

Джордж Д. Биркгоф был первым кто стал систематически рассматривать биллиарды как модели для задач классической механики. Биркгоф рассматривал биллиарды только в гладких выпуклых областях. Он, конечно, не думал о биллиардах в многоугольниках, а тем более, в невыпуклых областях.

Прежде всего можно провести редукцию к биллиардному отображению. Первоначальная динамическая система для биллиарда — это система с непрерывным временем. Но то, что происходит внутри биллиардного стола, легко восстановить, зная то, что происходит в моменты отражения. Поэтому достаточно рассмотреть так называемое биллиардное отображение. Фазовое пространство биллиардного отображения устроено следующим образом. Выходящий после отражения вектор v характеризуется циклической координатой $\phi \in S^1$, задающей положение точки на кривой Γ, и углом $\theta \in [0, 2\pi)$ между касательным вектором и вектором v (рис. 2).

Фазовое пространство биллиардного отображения представляет собой цилиндр. После отражения мы получаем новую точку ϕ_1 и новый выходящий вектор, которому соответствует угол θ_1. Отображение $T(\phi_0, \theta_0) = (\phi_1, \theta_1)$ и является биллиардным отображением. Оно отображает открытый цилиндр в себя; по непрерывности это отображение можно продолжить на замкнутый цилиндр. Точки, для которых $\theta = 0$, неподвижные (мы предполагаем, что кривая Γ не содержит отрезков).

Упражнение. Покажите что наличие прямолинейных отрезков у границы стола влечет разрывность биллиардного отображения.

Упражнение. Найдите условия при которых биллиардное отображение дифференцируемо (один раз или бесконечно много раз) на границе цилиндра.

Биллиардное отображение обладает двумя важными качественными свойствами.

1) Сохранение площади. Сохраняется элемент площади

$$dA = \sin\theta \, d\theta \, d\phi = d\alpha \, d\phi, \quad \text{где} \quad \alpha = \cos\theta.$$

(Чтобы ввести координаты, в которых сохраняется площадь, нужно вместо θ взять $\cos\theta = \alpha$).

2) Закручивание. Фиксируем координату ϕ_0 и будем изменять координату θ. Координата ϕ образа будет монотонно изменяться, пока она не обойдет всю окружность и вернется обратно (рис. 3). Образ вертикали закручивается.

Эти два свойства позволяют сделать вывод о наличие эллиптического поведения. Проблематика, которая возникает в связи с эллиптическим поведением, разбивается на две части:

1) каустики,

2) орбиты Биркгофа и множества Обри—Мазера.

Я начну со второй части. Мы хотим найти периодические орбиты биллиардной системы. Периодические орбиты бывают разные. Отличаются они не только периодом, но и некоторой комбинаторикой. Например, две орбиты периода 5 на рис. 4 имеют разную комбинаторику. В первом случае делается один оборот, а во втором два. Эти орбиты регулярные: порядок точек на орбите сохраняется; он такой же, как при вращении. Именно такие (регулярные) орбиты называют орбитами Биркгофа. Это название связано

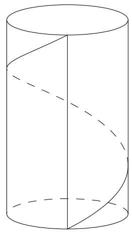
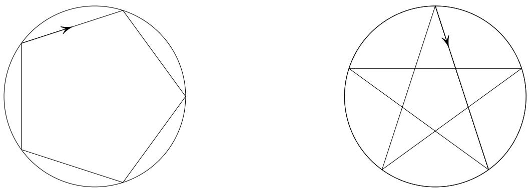


Рис. 3. Закручивание

с тем, что он доказал замечательную и сравнительно простую теорему о существовании регулярных орбит. По-видимому, именно с этой теоремы началось применение вариационных методов в динамике.



$(1,5)$ $(2,5)$

Рис. 4. Орбиты одинакового периода и разной комбинаторики

Теорема (Биркгоф)**.** *Для любых взаимно простых чисел p и q существуют по крайней мере две периодические орбиты типа (p,q).*

Набросок доказательства. При доказательстве используется только выпуклость и гладкость. Рассмотрим всевозможные вписанные многоугольники с требуемыми комбинаторными свойствами. Будем называть такие многоугольники состояниями. Состояния образуют конечномерное пространство. На пространстве состояний есть функционал длины. Если мы разрешим вершинам многоугольников совпадать, то получим компактное пространство. Поэтому у функционала длины есть максимумы.

Любая экстремальная точка функционала длины является биллиардной орбитой (если только эта точка не граничная). Это локальное утверждение. Легко проверить, что производная длины обращается в нуль тогда и только тогда, когда углы равны. Линейная часть изменения функционала зависит как раз от разности углов.

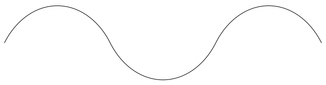


Рис. 5. Перевал

Легко доказать, что максимум не может достигаться на границе, т. е. вершины многоугольника не могут совпадать.

Итак, самый длинный многоугольник является требуемой периодической орбитой. Но это пока еще только самая простая часть теоремы. Нужно еще найти вторую периодическую орбиту. Это можно сделать следующим образом. Циклические перенумерации вершин найденной орбиты дают q максимумов. Продеформируем один из этих максимумов в другой. Если мы идем от одного максимума к другому, то мы должны опуститься. Будем при этом стараться терять как можно меньше высоты. В таком случае надо идти через перевал (рис. 5), потому что если бы в самой нижней точке мы не оказались на перевале, то можно слегка изменить траекторию и уменьшить потерю высоты. Перевал — тоже критическая точка, т. е. искомая периодическая орбита.

Если высоту мы вообще не теряем, то в таком случае есть целое семейство периодических орбит. □

В этом доказательстве четко видно, как можно поменять одну трудность на другую. Трудность этого рассуждения состоит в том, чтобы удержаться в стороне от границы. Этого легко добиться, если просто отказаться от границы и рассматривать все состояния. Очевидно, что рассматриваемая функция ограничена: любое звено не больше диаметра кривой. Можно отказаться от условия упорядоченности точек, а потом доказать, что глобальный максимум обязательно достигается на правильно упорядоченной орбите. Если мы, например, рассматриваем глобально максимальные орбиты, которые при полном обходе делают два оборота, то они это делают в правильном порядке. А можно вместо этого доказывать, что границы можно избежать внутри упорядоченного семейства.

Теорема Биркгофа важна тем, что мы сразу находим бесконечно много периодических орбит.

Дальше начинается интересная история о том, как Биркгоф упустил важное открытие.

Биркгоф приводит свое вариационное рассуждение и говорит, что точно так же можно доказать чисто топологически так называемую последнюю геометрическую теорему Пуанкаре: «Если на цилиндре в разные стороны крутятся основания с сохранением площади, то такой диффеоморфизм имеет по крайней мере две неподвижные точки». Более того, если на верхнем и нижнем основаниях углы поворота разные, то для любого рационального угла поворота можно найти соответствующую периодическую орбиту, даже без условия закручивания.

Биркгоф чрезвычайно гордился тем, что доказал последнюю геометрическую теорему Пуанкаре. Но при этом он упустил совершенно замечательный вывод из своего собственного элементарного доказательства. Этот вывод состоит в следующем. Давайте посмотрим, что происходит при переходе к пределу $p_n/q_n \to \alpha$, где α — иррациональное число. Обычно в динамике такие трюки не проходят, потому что асимптотическое поведение неустойчиво относительно начальных данных, и никакого предельного перехода осуществить нельзя. Но здесь, именно из-за того, что мы имеем дело с эллиптической ситуацией, возникает простой, но удивительный феномен. Если мы рассмотрим на цилиндре биркгофовскую орбиту, то она состоит из конечного числа точек. Если число q_n велико, то точек тоже будет много и они будут сильно конденсироваться. Довольно просто доказывается, что эти точки всегда лежат на липшицевом графике (т. е. на графике функции, удовлетворяющей условию Липшица). При этом константа Липшица фиксирована, она не зависит от длины орбиты. Множество липшицевых функций с заданной константой Липшица компактно, поэтому можно перейти к пределу. Немного иначе можно сказать так: возьмем конечные орбиты и рассмотрим их предел в топологии Хаусдорфа. В топологии Хаусдорфа замкнутые подмножества компактного множества образуют компактное множество, поэтому предел существует — это неудивительно. Но предел — инвариантное множество, которое является подмножеством липшицева графика, потому что в топологии Хаусдорфа подмножества липшицевых графиков образуют замкнутое множество.

Мы пока не знаем, какая у полученного графика геометрия, но зато знаем, какая у него динамика. Динамика у него такая же, как у поворота на угол α, ничего другого быть не может. Действительно, порядок, в котором переставляются точки при повороте на угол α, однозначно определяется порядками, в которых переставляются точки при поворотах на углы p_n/q_n, аппроксимирующие угол α. Поэтому на любом конечном отрезке в пределе комбинаторика окажется такой, как надо, потому что на любом конечном отрезке в пределе комбинаторика стабилизируется и будет такой же, как при повороте на угол α.

Итак, возникает замкнутое инвариантное множество на окружности (ибо предельный липшицев график топологически есть окружность). На этом множестве есть динамика, которая сохраняет порядок и в точности воспроизводит поворот на угол α. Со времен Пуанкаре хорошо известно, в каких ситуациях такое возможно: либо ин-

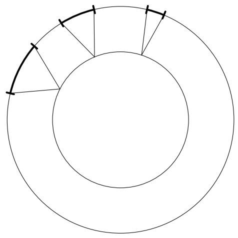


Рис. 6. Контрпример Данжуа

вариантное множество — вся окружность, орбиты на ней плотны и преобразование сопряжено повороту окружности (это, конечно, эллиптическое поведение, по крайней мере, в топологическом смысле), либо на окружности есть инвариантное канторово подмножество, которое появляется в так называемом контрпримере Данжуа (см., например, главы 11 и 12 в [8]). Контрпример Данжуа устроен следующим образом. Возьмем на окружности точку и раздуем ее в интервал. Тогда ее образ и прообраз тоже придется раздуть в интервалы (рис. 6) и т. д. Чтобы была сходимость, нужно, чтобы эти интервалы становились все короче и короче. Это довольно легко сделать топологически. В результате получится преобразование окружности, у которого есть инвариантное канторово множество и которое полусопряжено повороту (существует непрерывное отображение, переводящее его в поворот, но эти интервалы сжимаются в точки).

Для преобразований окружности такое поведение является экзотикой, потому что по теореме Данжуа в классе гладкости C^2 такого не бывает; это возможно только в C^1. Но для закручивающих отображений это вполне нормальное явление (если, конечно, не случилось, что мы получили целую окружность). Таким образом, возникает интересная альтернатива. Когда возникает накапливание биркгофовских орбит на инвариантное множество (это как раз и есть множество Обри—Мазера), то это инвариантное множество либо канторово (возможно, с некоторыми добавками), либо целая окружность. Случай целой окружности называют каустикой. Одно из двух справедливо всегда и для любого числа вращения. При этом само канторово множество единственно, т. е. если из инвариантного множества выбросить блуждающую часть, соответствующую отдельным блуждающим точкам, то оставшееся канторово множество единственно. Но это не препятствует существованию других канторовых множеств, которые имеют то же самое число вращения и на которых соблюдается порядок, но

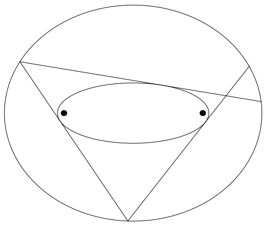


Рис. 7. Софокусные эллипсы

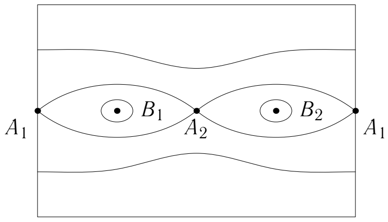


Рис. 8. Траектории в фазовом пространстве

этот порядок, хотя он и совместим с циклическим порядком, не будет совместим с порядком на этом множестве. Канторово множество, построенное как предел орбит Биркгофа максимальной длины особое; его называют минимальным. Оно есть множество минимальной энергии.

Следующий вопрос таков: случается ли так, что получается целая окружность? Ответ на этот вопрос иллюстрирует рис. 7. Возьмем большой эллипс в качестве биллиардного стола и рассмотрим орбиту, которая касается софокусного с ним внутреннего эллипса. Оказывается, что эта орбита всегда будет его касаться. То же самое верно и для софокусных гипербол. Гипербола, правда, состоит из двух ветвей, но если какая-то орбита касается одной из ветвей гиперболы, то она будет и дальше касаться гиперболы, а ветви, которых касается орбита, будут при этом чередоваться.

Это картинка в конфигурационном пространстве. А что же будет в фазовом пространстве? Картинка в фазовом пространстве тоже хорошо известна; она очень похожа на картинку для маятника (рис. 8; на этом рисунке цилиндр развернут). А именно, здесь есть две орбиты периода 2, соответствующие большому и малому диаметру эллипса. «Восьмерка» соответствует орбитам, проходящим через фокусы эллипса (если орбита проходит через фокус, то она и дальше будет поочередно проходить через фокусы). То, что расположено вне этой восьмерки, состоит из орбит, которые касаются эллипсов. А то, что внутри, — из орбит, касающихся гипербол.

Какие же из этих орбит соответствуют орбитам Биркгофа и Обри—Мазера, а какие не соответствуют? Иными словами, какие из этих орбит получаются с помощью конструкций Биркгофа и Обри—Мазера, а какие не получаются? Орбиты с рациональными числами вращения, касающиеся эллипсов, получаются конструкцией Биркгофа, а остальные орбиты, касающиеся эллипсов, получаются конструкцией Обри—Мазера. А гиперболы не получаются такими конструкциями. Действительно, для числа вращения $1/2$ будет одна минимальная орбита и одна минимаксная.

Интересно понять, что происходит при обратном переходе к пределу, когда мы переходим от иррациональных чисел к рациональным. В рассматриваемой ситуации ответ достаточно прост. Мы получаем инвариантную окружность, но она не вся состоит из биркгофовских орбит. Она состоит из биркгофовских орбит и асимптотических кривых. Это достаточно общий феномен, за исключением того, что не всегда получается вся окружность.

Мы рассмотрели биллиардные столы весьма специального вида. Весьма знаменит следующий вопрос, ответ на который до сих пор не получен: «Какие же еще бывают биллиардные столы, для которых хотя бы окрестность верха или низа цилиндра расслаивается на инвариантные кривые?» Иными словами, когда система вполне интегрируема? Предполагается что это случается только для эллипса.

Гораздо более фундаментален такой вопрос: когда сохраняются хотя бы какие-то кривые? Весьма замечательно, что необходимые и достаточные условия существования хотя бы одной инвариантной кривой весьма просты. Мы, конечно, имеем в виду инвариантную кривую, обходящую вокруг цилиндра. Только такая кривая и может получиться как предел биркгофовских орбит. Несложно доказать, что если есть инвариантная кривая, на которой сохраняется порядок и имеется число вращения α, то такая кривая единственна, если число α иррационально, и эта кривая есть предел биркгофовских орбит.

Если мы интересуемся тем, что получается как предел биркгофовских орбит — кривая или канторово множество, то естественно спросить, когда именно получается кривая. Будем предполагать, что кривая, ограничивающая стол, достаточно гладкая. Например, класса C^∞ (достаточно потребовать, чтобы кривая была класса C^6). В таком случае теорема, доказанная Владимиром Федоровичем Лазуткиным (1941—2001) [10], утверждает, что инвариантная окружность существует, когда кривизна края стола нигде не обращается в нуль. На

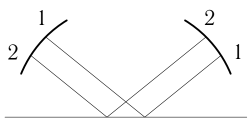


Рис. 9. Изменение порядка точек

самом деле в такой ситуации инвариантных окружностей бесконечно много.

Доказательство Лазуткина является адаптацией для этого случая знаменитой теоремы Колмогорова о возмущениях вполне интегрируемых гамильтоновых систем. Формально теорема Колмогорова эту ситуацию не покрывает, потому что здесь мы имеем дело с поведением вырождающейся системы. Нужно должным образом изменить координаты, чтобы можно было что-то применять. Ненулевая кривизна нужна как раз для того, чтобы эту замену координат можно было сделать.

Если кривизна обращается в нуль, то инвариантных кривых нет. Этот гораздо более простой факт был доказан Джоном Мазером. На самом деле можно доказать более сильное утверждение. А именно, если на границе есть плоская точка, то никакое множество Обри—Мазера не может через эту точку проходить. А на инвариантной окружности должны быть не только точки, соответствующие орбитам Биркгофа, но и точки, соответствующие орбитам Обри—Мазера. (См., например, §13.5 в [8].)

Это рассуждение достаточно простое. При отражении от прямой меняется порядок точек (рис. 9). Если сначала идет точка 1, а потом точка 2, то после отражения сначала будет идти точка 2, а потом точка 1. На рисунке линии параллельные, но такой же эффект будет и в том случае, когда углы разные. Таким образом, при отражении от прямой не может сохраниться порядок точек. Инфинитезимально то же самое происходит и при отражении от кривой в точке с нулевой кривизной.

Здесь возникают некоторые интересные геометрические эффекты. Рассмотрим обратную задачу: как построить биллиардный стол, для которого есть каустики? Для этого есть конструкция, которая хорошо известна для эллипса. Можно взять эллипс и набросить на него шнурок, длина которого больше длины эллипса. Затем нужно натянуть этот шнурок и провести кривую (рис. 10). В результате получится софокусный эллипс. Для большего эллипса меньший будет каустикой.

Та же самая конструкция работает и для произвольной кривой. Если вы возьмете произвольную кривую и возьмете шнурок, который длиннее этой кривой, а затем натянете шнурок и проведете кривую, то для полученной кривой исходная кривая будет каустикой.

Иногда из негладкой внутренней кривой получается гладкий биллиардный стол. Например, если в качестве внутренней кривой взять астроиду, то в результате получится гладкий стол, для которого астроида будет каустикой (рис. 11).

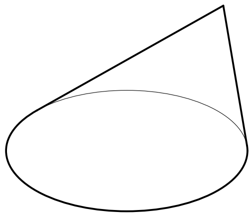


Рис. 10. Построение софокусного эллипса

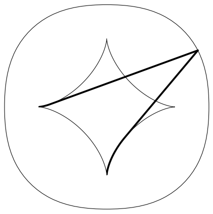


Рис. 11. Биллиардный стол для астроиды

Довольно понятно, почему эллиптические биллиарды можно рассматривать как испытательный полигон. Во-первых, они дают примеры закручивающих отображений. Биллиарды дают некоторую геометрическую интуицию, которую можно развить и потом использовать для произвольных закручивающих отображений, а закручивающие отображения покрывают много интересных случаев помимо биллиардов. А во-вторых, биллиарды дают пример одной стандартной трудности в динамике. Как учесть лагранжеву структуру? Картинка на цилиндре, где есть координата и импульс, — это гамильтонова картинка, это картинка в фазовом пространстве. А биллиард — это лагранжева система, она задается функционалом действия. И в динамике есть много трудностей, связанных с тем, как динамические эффекты связаны с лагранжевой структурой. Лагранжева структура неинвариантна, она связана с разделением на координаты и импульс.

Например, такой вопрос. Может ли у биллиарда быть открытое множество периодических орбит? Для гамильтонова закручивающего отображения пример строится очень просто. Нужно из цилиндра вырезать маленький кружок, сделать рациональный поворот, а потом вклеить кружок обратно (рис. 12). Гамильтоновых препятствий никаких нет. Тем не менее, есть основания подозревать, что для биллиардов ничего подобного сделать нельзя. И это не праздный вопрос, потому что, например, оценки остаточных членов в асимптотиках Вейля для собственных функций оператора Лапласа зависят от предположения, что в биллиарде множество периодических орбит имеет меру нуль. Доказано это только для орбит периода 3.

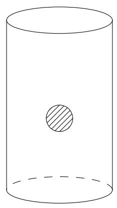


Рис. 12. Вырезанный кружок

Мы закончим обсуждение эллиптических эффектов описанием естественного «мостика» к параболическому случаю.

Рассмотрим выпуклый многоугольник P обладающий тем свойством что группа, порожденная отражениями от его сторон, порождает «замощение» плоскости. Другими словами, образы P под действием элементов этой группы покрывают плоскость и если два таких образа пересекаются, то они совпадают. Таких многоугольников совсем немного: прямоугольники, правильные треугольники, прямоугольные треугольники с углами 45 и 30 градусов. Группа, порожденная отражениями от сторон такого многоугольника, содержит нормальную подгруппу конечного индекса состоящую из параллельных переносов. В четырех случаях индексы равны 4, 6, 8 и 12 соответственно. Взяв представителей смежных классов подгруппы параллельных переносов и подействовав ими на первоначальный многоугольник получаем фундаментальную область для подгруппы параллельных переносов, которая является тором. Проделаем частичную развертку биллиардного потока с помощью выбранной фундаментальной области, т. е. вместо отражения траектории будем отражать многоугольник. Некоторые пары параллельных сторон будут теперь отождествляться параллельными переносами и биллиардный поток будет таким образом представлен как свободное движение частицы на (плоском) торе: каждый касательный вектор движется своем направлении с единичной скоростью. Это вполне интегрируемая система: начальный угол является первым интегралом, фазовое пространство расслаивается на инвариантные торы, и на каждом торе действует поток изометрий. Каждый такой поток это стандартная эллиптическая система.

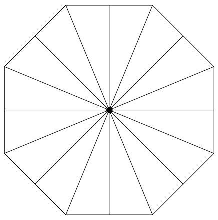


Рис. 13. Простейший параболический биллиард

3. Параболическое поведение: биллиарды в многоугольниках

Простейший параболический биллиардный стол — это прямоугольный треугольник с углом $\pi/8$. Когда траектория встречает стенку, вместо того чтобы отражать траекторию, будем отражать треугольник. В данном конкретном случае все довольно быстро закончится. Если взять 16 копий треугольника и сделать из них 8-угольник (рис. 13), то дальнейшее движение превратится в параллельный поток на этом 8-угольнике, причем противоположные стороны будут отождествлены. Полученный объект — риманова поверхность (в данном случае рода 2) с квадратичным дифференциалом. При склейке вершин 8-угольника получится угол 6π. Чтобы разрешить эту особенность, нужно взять кубический корень. Тогда можно будет получить риманову поверхность с полем направлений. Поле направлений имеет одну особую точку, которая является седлом с шестью сепаратрисами. Это поле направлений можно реализовать с помощью квадратичного дифференциала.

У этого потока есть первый интеграл — угол (в восьмиугольнике направление движения не меняется). Этот первый интеграл имеет особенности.

Упражнение. Проанализируйте подобным образом биллиарды в правильном шестиугольнике и «гномоне».

Подобная конструкция проходит всегда, когда углы треугольника соизмеримы с π. В таком случае из конечного числа экземпляров биллиардного стола можно построить риманову поверхность с квадратичным дифференциалом. Там есть первый интеграл, и то, что получается, можно исследовать, используя весьма мощные методы из теории Тейхмюллера. Результатом является весьма хорошее понимание того, что происходит. Здесь встречаются типично параболические эффекты. Например, на всех инвариантных многообразиях (в данном случае —

при фиксированном значении угла), кроме счетного числа, система получается топологически транзитивной; и также на почти всех инвариантных многообразиях система строго эргодична, т. е. инвариантная мера единственна. А в исключительных случаях, когда инвариантная мера не единственна, количество инвариантных мер не превосходит рода поверхности. Это типично параболические эффекты: инвариантная мера не всегда единственна, но обычно нетривиальных инвариантных мер конечное число.

Таким образом, биллиардная система в многоугольнике с углами соизмеримыми с π, $\pi p_i/q_i$, где p_i и q_i — взаимно простые целые числа, порождает однопараметрическое семейство потоков на некоторой поверхности, род которой определяется геометрией многоугольника и арифметическими свойствами чисел p_i/q_i. Не следует предаваться иллюзии, что структура этих потоков достаточно простая. Например, род поверхности (а, следовательно, в типичных случаях и число неподвижных точек потока) пропорционален наименьшему общему кратному знаменателей q_i.

Тем не менее, эти однопараметрические семейства обладают усложненными вариантами некоторых свойств семейства линейных потоков на торе (которые, как было объяснено выше, соответствуют биллиардам в прямоугольниках и некоторых простых треугольниках). Как я уже отметил, для почти всех значений первого интеграла, поток имеет единственную инвариантную меру (точечные меры, соответствующие положениям равновесия, не принимаются в расчет). Однако, в отличие от случая потоков на торе, множество исключительных значений параметра несчетно. Вспомним, что на торе имеется простая дихотомия между углами наклона с рациональными тангенсами, когда все орбиты замыкаются, и углами с иррациональными тангенсами, когда инвариантная мера единственна и, следовательно, любая орбита равномерно распределена по мере Лебега. В случае семейств потоков, порожденных квадратичными дифференциалами на поверхностях рода больше единицы (в частности, для семейств потоков, возникающих из биллиардов в рациональных многоугольниках), ситуация более сложная. По-прежнему имеется счетное число «рациональных» значений параметра, при которых все траектории замыкаются. Заметим, что в отличие от тора, возникает несколько разных гомотопических типов замкнутых орбит. Число таких типов можно оценить из простого соображения, что орбиты из разных семейств не пересекаются, и, следовательно, их число не превосходит рода поверхности. Кроме этого, существует множество значений параметра нулевой меры, но положительной размерности Хаусдорфа, при которых поток квазиминимален (т. е. любая полутраектория, которая не упирается в неподвижную точку, плотна), однако, существует более одной неатомической инвариантной меры.

При более глубоком рассмотрении оказывается, что это различие является отражением дихотомии между *диофантовыми* иррациональными числами или векторами, для которых скорость рациональной аппроксимации не очень высокая, и *лиувиллевыми* числами или векторами, для которых возникает «аномально хорошая» аппроксимация. В случае линейных потоков на торе, при диофантовых углах наклона временные средние для достаточно гладких функций сходятся очень быстро. Более того, диофантовы потоки отличаются большой устойчивостью: замены времени и даже сохраняющие число вращения малые нелинейные возмущения таких потоков, могут быть «выпрямлены». При лиувиллевых углах наклона временные средние могут вести себя весьма нерегулярно: то они подходят очень близко к интегралу, то проявляют сравнительно большие отклонения, так что скорость сходимости по одним последовательностям времен очень быстрая, а по другим весьма медленная. В соответствие с этим, даже гладкие замены времени существенно меняют долговременную динамику: например, собственные функции, даже измеримые, могут исчезнуть, и поток становится слабо перемешивающим.

Для потоков, возникающих из квадратичных дифференциалов, и биллиардов в рациональных многоугольниках, значения параметров, при которых имеется больше одной инвариантной меры, соответствует углам наклона с иррациональными лиувиллевыми тангенсами. Поэтому не удивительно, что возникают подобные явления, только в более яркой форме: вместо медленной сходимости средних к интегралу по мере Лебега, сходимости нет вообще. С другой стороны, для множества значений параметра полной меры, которые соответствуют углам наклона с диофантовыми тангенсами, наблюдаются сходные, хотя и значительно более сложные, явления устойчивости. Они были открыты и исследованы в течение последних пяти лет молодым математиком Джиованни Форни; его работы представляют одно из самых ярких современных достижений в теории динамических систем. Центральное наблюдение Форни состоит в том, что, хотя инвариантная мера и единственна, имеются также инвариантные распределения (обобщенные функции), т. е. инвариантные непрерывные линейные функционалы, определенные на меньших пространствах функций, чем все непрерывные функции. Для функций заданного класса гладкости, пространство инвариантных распределений конечномерно, но размерность стремится к бесконечности с ростом класса гладкости. Сочетание строгой эргодичности (единственности инвариантной *меры*) с существованием бесконечного множества независимых инвариантных *распределений* весьма характерно для динамических систем с параболическим поведением. Простейший пример, где полное исследование проводится с помощью элементарного анализа Фурье, это аффинное отображение двумерного тора

$$(x, y) \mapsto (x+\alpha, x+y) \pmod 1,$$

где α — иррациональное число. Более интересный пример, который исследуется с помощью теории бесконечномерных унитарных представлений группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, это орициклический поток на поверхности постоянной отрицательной кривизны.

Возвращаясь к потокам на поверхностях, отметим, что, согласно результатам Форни, инвариантные распределения определяют скорость сходимости временных средних. Грубо говоря, есть некоторая типичная степенная скорость; если первая группа инвариантных распределений обращается в нуль, эта скорость повышается, и так происходит несколько раз, пока не достигается максимально возможная скорость убывания средних, обратно пропорциональная времени. Обращение в нуль достаточного числа инвариантных распределений также гарантирует выпрямляемость потока, полученного заменой времени.

Даже в случае многоугольников с рациональными углами описание биллиарда не сводится полностью к рассмотрению по отдельности потоков на инвариантных многообразиях. Возьмем, например, вопрос о росте числа периодических траекторий длины не более T как функции T. Конечно, периодические орбиты возникают в виде семейств, которые состоят из «параллельных» орбит одинаковой длины. Поэтому нужно считать число $P(T)$ таких семейств. В случае биллиарда в прямоугольнике (который, как мы несколько раз отмечали, сводится к геодезическому потоку, т. е. свободному движению частицы на плоском торе) эта задача сводится после соответствующей перенормировки к подсчету числа точек с целыми координатами в круге радиуса T с центром в начале координат. Таким образом

$$\lim_{T\to\infty} \frac{P(T)}{\pi T^2} = 1.$$

Для общих рациональных биллиардов рост $P(T)$ также оказывается квадратичным, т. е.

$$0 < \liminf_{T\to\infty} \frac{P(T)}{T^2} \leqslant \limsup_{T\to\infty} \frac{P(T)}{T^2} < \infty.$$

Кроме того, известно, что периодические орбиты плотны в фазовом пространстве. Вопрос о существовании предела $\dfrac{P(T)}{T^2}$ при $T \to \infty$ для произвольного рационального прямоугольника пока остается открытым. Положительный ответ получен, с одной стороны, для некоторых специальных многоугольников, которые приводят к квадратичным дифференциалам на поверхностях с большим количеством симметрий (поверхности Вича), а с другой стороны, для квадратичных дифференциалов общего положения. Вполне возможно, что существуют многоугольники с патологическим поведением функции $P(T)$. Отметим, что наш первый нетривиальный пример биллиарда в прямоугольном треугольнике с углом $\pi/8$ и гипотенузой 1 приводит к поверхности Вича, и для него $\lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{P(T)}{T^2} = ?$.

Про биллиарды в многоугольниках, у которых не все углы соизмеримы с π известно удивительно мало. Такие биллиарды являются хорошими примерами параболических систем достаточно общего вида. Приходится констатировать, что доступные нам методы анализа недостаточны для серьезного исследования таких систем. Действительно, успехи в исследовании параболических систем связаны с двумя специальными ситуациями:

(1) потоки на поверхностях, которые обсуждались выше, и где размерность фазового пространства очень мала (в дополнение к размерности, соответствующей орбитам, есть только одна трансверсальная размерность), и

(2) потоки на однородных пространствах, где локально имеется большая симметрия.

Два основных открытых вопроса, относящихся к произвольным биллиардам, это описание глобальной сложности поведения траекторий, и асимптотическое поведение типичных траекторий то отношению к мере Лебега. Начнем со второго вопроса. Здесь известно очень много, и в то же время очень мало. Если фиксировать тип биллиардного стола (например, выпуклые многоугольники с заданным числом сторон), то углы служат естественными параметрами в пространстве таких биллиардов. Биллиарды с углами, соизмеримыми с π, про которые, как было выше объяснено, известно довольно много, образуют плотное множество в таком пространстве. Отправляясь от эргодичности рациональных биллиардов на большинстве инвариантных многообразий, и принимая во внимание тот факт, что при больших знаменателях каждое такое многообразие почти равномерно заполняет фазовое пространство, можно показать с помощью довольно стандартных категорных рассуждений, что для всюду плотного G_δ в пространстве параметров биллиард эргодичен во всем фазовом пространстве. Однако, это топологически значимое множество биллиардов является весьма тощим с метрической точки зрения: не только его мера Лебега, но даже размерность

Хаусдорфа этого множества в пространстве параметров равна нулю. Это множество напоминает множество чисел, допускающих рациональную аппроксимацию с исключительно высокой скоростью, наподобие тройной экспоненты. Предполагается, что для типичных диофантовых значений вектора углов биллиард эргодичен. На сегодняшний день серьезных подходов к этой задаче не известно. Неизвестны также более тонкие статистические свойства, такие как перемешивание, для каких бы то ни было иррациональных биллиардов, включая описанную выше лиувиллевскую ситуацию, для которой доказана эргодичность. Неизвестна также структура сингулярных инвариантных мер для иррациональных биллиардов.

Конечно, частный случай этого последнего вопроса, это описание периодических траекторий, т. к. каждая такая траектория порождает сингулярную эргодическую инвариантную меру. С одной стороны не известно, имеется ли для произвольного многоугольника хотя бы одна периодическая биллиардная траектория. Как отмечалось выше, для рациональных многоугольников таких траекторий бесконечно много, и они плотны в фазовом пространстве. Однако, предельного перехода к иррациональным многоугольникам, даже специального вида, осуществить не удается. Проблема здесь состоит в том, что при увеличении знаменателя инвариантные многообразия становятся поверхностями очень высокого рода, и периодические орбиты имеют очень сложный гомотопический тип, и следовательно являются очень длинными. Есть, однако, некоторые специальные ситуации, когда возникают периодические орбиты с простой комбинаторикой, которые сохраняются при малом возмущении углов. Классический пример это орбита периода 3, образованная основаниями высот в произвольном остроугольном треугольнике. Эта орбита, конечно, допускает вариационное описание. Однако, в отличие от орбит Биркгофа в выпуклых биллиардах, треугольник, образованный основаниями высот, имеет минимальный периметр среди всех вписанных треугольников. Максимальный же, и минимаксный треугольники вырождаются в удвоенную максимальную высоту. Орбита периода 3, построенная таким образом, окружена семейством параллельных орбит периода 6 (см. рис. 14). Заметим, что это единственные периодические орбиты, существование которых известно для всех остроугольных треугольников. Вопрос о плотности, или хотя бы существовании бесконечного числа параллельных семейств периодических орбит остается открытым.

Для произвольного прямоугольного треугольника существование периодических орбит было доказано всего несколько лет назад. К сожалению, вид этих орбит несколько разочаровывает. Это траектории, которые отражаются перпендикулярно от одной из сторон, и после

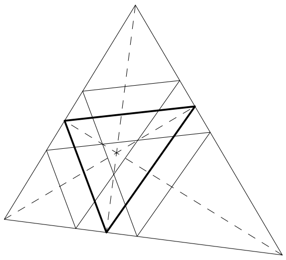


Рис. 14. орбиты периода 3 и 6 в остроугольном треугольнике

конечного числа отражений возвращаются на эту же сторону тоже в перпендикулярном направлении. Очевидно, такая орбита отскакивает обратно и повторяет свой путь в противоположном направлении. Это как раз примеры орбит с устойчивой комбинаторикой. Оказывается, что для почти любого начального положения, орбита, перпендикулярная к стороне, возвращается на эту сторону в перпендикулярном направлении и, следовательно, оказывается периодической. Это является довольно простым следствием сохранения меры и того факта, что возможные направления орбиты образуют единственную траекторию бесконечной диэдрической группы, порожденной отражениями от двух не перпендикулярных сторон треугольника. Это соображение обобщается на некоторые многоугольники, «близкие» к рациональным, т. е. такие, у которых значения углов по модулю π лежат в одномерном пространстве над рациональными числами. Для произвольного тупоугольного треугольника это соображение не применимо и существование даже одной периодической орбиты неизвестно.

Существование периодических орбит тесно связано с вопросом о глобальной сложности поведения траекторий. Рост числа различимых траекторий со временем можно оценивать разными способами. Наиболее естественный способ связан с кодированием. Каждой траектории ставится в соответствие последовательность символов, в соответствии с отражениями от сторон многоугольника, так что каждая сторона обозначается своим символом. Конечно, при этом естественным образом кодируются биллиардные отображения, т. е. отображения возвращения биллиардного потока на границу. Для того, чтобы получить полную информацию о потоке, нужно еще указать время между последовательными отражениями. Рост сложности для биллиардного отображения (соответственно, потока) задается функцией $S(N)$ (соответственно, $\mathscr{S}(T)$) равной числу различных кодов длины N (соответственно, числу различных кодов, возникающих для отрезков траекторий длины T). Очевидно, что каждое семейство параллельных периодических орбит порождает бесконечный периодический код, и почти столь же очевидно, что и наоборот, каждому бесконечному периодическому коду соответствует семейство параллельных периодических орбит. Эти орбиты могут замыкаться либо после одного периода, либо после двух (как орбиты периода 6, параллельные треугольнику Фаньяно в остроугольном треугольнике).

В случае многоугольников с рациональными относительно π углами, обе функции допускают квадратичную оценку:

$$0 < \liminf_{N\to\infty} \frac{S(N)}{N^2} \leqslant \limsup_{N\to\infty} \frac{S(N)}{N^2} < \infty$$

и

$$0 < \liminf_{T\to\infty} \frac{\mathscr{S}(T)}{T^2} \leqslant \limsup_{T\to\infty} \frac{\mathscr{S}(T)}{T^2} < \infty.$$

Заметим, что в этом случае положительная доля всех допустимых кодов реализуется периодическими траекториями.

Альтернативный способ описания сложности состоит в подсчете числа способов, которыми коды могут изменяться. Очевидно, что код меняется, когда траектория попадает в угол. Очевидно также, что имеется только конечное число отрезков траекторий ограниченной длины, которые попадают в углы и в положительном, и в отрицательном направлении. По довольно очевидным причинам такие сингулярные траектории называют *обобщенными диагоналями* многоугольника. Определим $D(N)$ (соответственно, $\mathscr{D}(T)$) как число обобщенных диагоналей из $\leqslant N$ звеньев (соответственно, число обобщенных диагоналей длины $\leqslant T$). Как и выше, эти величины допускают квадратичную оценку для рациональных многоугольников.

Естественно предположить, что для произвольных многоугольников рост траекторий не должен быть намного более быстрым, чем для рациональных, т. к. локальная геометрическая структура биллиардного потока одна и та же в рациональном и в общем случае. Однако, единственный известный факт в этом направлении состоит из гораздо более слабых субэкспоненциальных оценок:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\log S(N)}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{\log D(N)}{N} = \lim_{T\to\infty} \frac{\log \mathscr{S}(T)}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{\log \mathscr{D}(T)}{T} = 0.$$

4. Гиперболическое поведение: биллиарды Синая, Бунимовича, Войтковского и прочих авторов

Как мы уже отмечали, гиперболическое поведение довольно широко распространено и позволяет установить основные элементы стохастического или «хаотического» поведения. Преобладание гиперболического поведения естественно по аналогии с линейными системами. Действительно, случайно выбранная матрица, скорее всего не имеет собственных значений по модулю равных единице. Даже если заранее ограничиться матрицами с единичным определителем, это по-прежнему верно для матриц размера 3 на 3 или больше. Хотя эту аналогию и не удается распространить буквально на нелинейные системы, она по крайней мере показывает важность гиперболической парадигмы.

Самые ранние примеры гиперболического поведения биллиардов были найдены Я. Г. Синаем [13]. Простейшие примеры биллиарда типа Синая это, во-первых, квадрат с вырезанным круговым отверстием, а во-вторых, выпуклый многоугольник, стороны которого заменены дугами, выпуклыми внутрь (см. рис. 1). С точки зрения строгого математического анализа, второй пример оказывается несколько более простым, чем первый. Гиперболическое поведение в биллиардах Синая связано с явлением рассеяния света, хорошо известным из геометрической оптики: параллельный или расходящийся поток света при отражении от выпуклого зеркала становится более расходящимся. Не очень сложные вычисления показывают, что если отражение происходит достаточно регулярно, то угловой размер пучка растет экспоненциально. Это и обеспечивает гиперболичность линеаризованной системы. При анализе рассеивающих биллиардов возникают две технические трудности.

Во-первых, нужно добиться достаточной регулярности отражений от выпуклых внутрь частей границы. Сразу видно, почему второй пример в этом отношении лучше первого: в нем время между двумя последовательными отражениями ограниченно. В первом же примере, имеются периодические траектории, параллельные сторонам квадрата, которые вообще не отражаются от препятствия. Такие траектории, конечно, образуют множество нулевой меры, но траектории, образующие с ними очень маленький угол, впервые встречают препятствие только через очень большое время. Это явление называется бесконечным горизонтом; соответственно, ограниченность времени между отражениями, соответствует конечному горизонту. Бесконечный горизонт влечет неравномерность гиперболических оценок по фазовому пространству.

Хотя это приводит к существенным техническим усложнениям в доказательствах эргодичности, перемешивания, и других стохастических свойств, это также подтверждает роль биллиардов, как важного испытательного полигона для различных методов и средств анализа динамики. Действительно, неравномерная гиперболичность гораздо более распространена, чем равномерная. Например, глобальное равномерное гиперболическое поведение для классических консервативных систем, налагает ограничение на топологию фазового пространства. В то же время, неравномерная гиперболичность совместима с любой топологией. Этот факт, хотя и был предсказан довольно давно, был в полной общности установлен только недавно Д. И. Долгопятом и Я. Б. Песиным [6].

Вторая трудность при анализе рассеивающих биллиардов — это наличие особенностей (разрывов и неограниченности производных) в системе. Этим они отличаются от биллиардов в гладких выпуклых областях, рассмотренных выше, где биллиардное отображение является гладким. Особенности возникают в точках касания траекторий с выпуклыми внутрь частями границы. Они конечно, также возникают, когда траектория попадает в угол. Особенности второго типа возникают и в параболических биллиардах, и в случае рассеивающих биллиардов приводят только к небольшим осложнениям. Такие особенности приводят к разрывам первого рода для функций, представляющих динамику: возникает поверхность разрыва, и функции являются гладкими с обеих сторон этой поверхности. Таким образом, дифференциал вдоль биллиардной траектории, не попадающей в саму точку разрыва, ведет себя вполне регулярно. Для траекторий, касающихся границы изнутри, производные около этих траекторий неограниченны, так что разрывы носят более серьезный характер. Отметим, что упругие столкновения, и более сложные эффекты подобного рода естественно возникают во многих важных задачах классической механики, например, в задаче n тел. Влияние таких явлений на долговременное поведение траекторий является одной из центральных проблем механики. Здесь также биллиарды, и особенно их многомерные аналоги, играют роль важного испытательного полигона.

Рассеивающие биллиарды весьма существенны для математического обоснования моделей статистической физики. Это важная и интересная тема, которой мы, однако, не будем здесь касаться. С точки зрения геометрии, рассеивающие биллиарды обладают некоторыми дефектами, например, неизбежным наличием особенностей на границе. Правда, если рассматривать биллиарды не в областях на плоскости, а в областях на плоском торе, этого недостатка можно избежать. Например, биллиард на торе с вырезанным кругом —

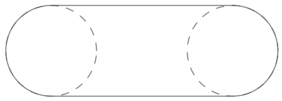


Рис. 15. Стадион

это классический пример биллиарда Синая. Тем не менее, интересно выяснить, каким образом гиперболические поведение может возникать другими способами, чем в результате рассеивания выпуклыми внутрь частями границы. Первый ответ на этот вопрос дается довольно знаменитым примером «стадиона», т.е. двух полуокружностей, соединенных отрезками общих касательных (см. рис. 15). Это пример так называемых биллиардов Бунимовича [2], где гиперболическое поведение возникает как результат последовательных фокусировок пучков орбит. С точки зрения конфигурационного пространства эта картина драматически отличается от случая рассеивающих биллиардов; однако, в фазовом пространстве, где принимаются во внимание и координаты и скорости, возникает равномерный экспоненциальный рост.

Биллиарды Бунимовича были изобретены очень интересным образом. В начале 70-х годов Л. А. Бунимович, который был тогда аспирантом Синая, работал над расширением класса биллиардов с экспоненциальным разбеганием и стохастическим поведением орбит. Он обнаружил, что если добавить к рассеивающему биллиарду небольшие круглые «лузы», то биллиард на полученном таким образом столе, в котором выпуклые участки чередуются с вогнутыми, обладает экспоненциальным разбеганием траекторий. На самом деле, Бунимович открыл важный новый механизм гиперболичности. Однако, он сам сначала рассматривал свою работу лишь как небольшое обобщение результатов о рассеивающих биллиардах. Во время доклада Бунимовича на семинаре в МИАНе, которым руководили Д. В. Аносов и автор, возник естественный вопрос о механизме гиперболичности, и в частности о том, необходимо ли наличие каких бы то ни было рассеивающих компонент. Я обратил внимание докладчика, что из его рассуждений такая необходимость как будто бы не вытекала, и предложил стадион как модель для проверки этой гипотезы. Остальные геометрические условия Бунимовича были выполнены, по крайней мере, если полные круги не пересекались (см. рис. 15). Немного подумав, Бунимович сказал, что его рассуждения должны проходить в этом случае, и в следующем варианте своей работы он сформулировал условия, которые не требовали наличия рассеивающих компонент. Более того, оказалось, что первоначальные геометрические условия можно ослабить, так что, например, в случае стадиона, окружности достаточно раздвинуть на произвольно малое расстояние.

Среди биллиардов Бунимовича много других интересных и весьма простых форм, однако все они имеют общее свойство, что граница, помимо рассеивающих участков, может включать только отрезки прямых и дуги окружностей. Естественный вопрос, насколько существенно это условие, занимал специалистов в течении, примерно, десяти лет. Техническая трудность заключается в следующем. Гиперболичность устанавливается с помощью системы конусов в касательных пространствах к точкам фазового пространства, которые переходят в себя под действием динамики. Для простоты и геометрической наглядности лучше думать о биллиардном отображении, а не о потоке. В этом случае фазовое пространство двумерно, и конуса, о которых идет речь, это внутренности двух противоположных углов, образованных парой прямых, пересекающихся в начале координат. Система конусов, которая инвариантна и в рассеивающих биллиардах, и в биллиардах Бунимовича, одна и та же. Геометрически, эти конуса определяются, как множества инфинитезимальных расходящихся кусков траекторий. Для получения гиперболичности необходимо, чтобы конус вместе со своей границей отображался строго внутрь соответствующего конуса в образе. Это, конечно, выполняется в случае рассеивающих биллиардов уже при одном отражении. В случае же плоских и круговых зеркал, конус переходит в себя, но одна из его сторон остается инвариантной. Это типично параболический эффект, т.к. именно так действуют унипотентные матрицы. Возьмем, например, матрицу $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Конус, о котором идет речь, определяется условием $x_1x_2 > 0$, т.е. это объединение первого и третьего квадранта на плоскости. Его образ — это конус $|x_1| > |x_2|$, $x_1x_2 > 0$ (см. рис. 16). При дальнейших итерациях образ становится все

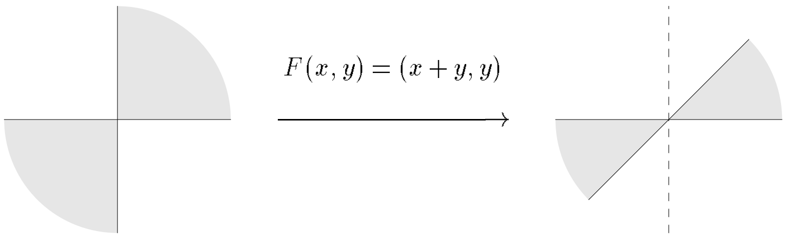


Рис. 16. Действие параболического преобразования на конус

более узким, но он по-прежнему «прилипает» к горизонтальной оси. Для того, чтобы получить гиперболичность, Бунимович использует геометрическое условие, которое обеспечивает строгую инвариантность конусов после отражения от *различных* круговых участков границы (как в случае стадиона). Так как траектория, отражающаяся от кругового участка под очень маленьким углом, продолжает это делать много раз, казалось, что явный вид итерации при отражении от круговых участков (интегрируемость биллиарда в круге), играл существенную роль. Так я объяснял для себя жесткие ограничения в условиях Бунимовича.

Оказалось, однако, что эту трудность можно преодолеть. Биллиарды с выпуклыми участками границы могут быть гиперболическими по целому ряду причин. Как только точка зрения, основанная на использовании систем инвариантных конусов. была осознана, задача нахождения новых классов гиперболических биллиардов стала задачей на сообразительность. Отметим, что Бунимович использовал другую технику, которая формально эквивалентна системе инвариантных конусов, но значительно менее наглядна. Пионерами использования метода инвариантных конусов в динамике были В. М. Алексеев (1932—1980) и Юрген Мозер (1928—1999). Существенным шагом было введение этого метода в неравномерной гиперболической ситуации. Автор использовал этот метод для построения примеров гладких систем со стохастическим поведением на различных многообразиях. Однако, основная заслуга здесь принадлежит Мачею Войтковскому. И опять биллиарды оказались идеальным испытательным полигоном. Осознав ключевую роль систем конусов, Войтковский понял, что задачу можно решать в обратном порядке: подбирать классы биллиардных столов под заданную систему конусов. Препринт его ключевой работы на эту темы [3] назывался «Principles for the design of billiards with nonvanishing Lyapunov exponents», в несколько вольном переводе «Принципы проектирования биллиардов с ненулевыми показателями Ляпунова». Также как квадрат или тор с вырезанным кружком является квинтэссенцией феномена, открытого Синаем, а стадион символизирует биллиарды Бунимовича, характерный пример биллиардов Войтковского дается кардиоидой (см. рис. 1). Принципиальная важность результатов Войтковского для теории биллиардов состоит в том, что он открыл классы гиперболических примеров, которые открыты в C^2 топологии и таким [11] образом это свойство не зависит от небольших погрешностей зеркал.

Как я уже отмечал, построение новых классов гиперболических биллиардов стало возможно с использованием метода инвариантных конусов. Как пример гибкости этого метода упомянем следующий результат Виктора Доннэ [7]: любой достаточно малый кусок выпуклой кривой является частью границы кусочно-гладкого выпуклого гиперболического биллиарда. Отметим также, что использование метода инвариантных конусов позволило получить много замечательных примеров классических динамических систем с неравномерным гиперболическим поведением.

Важные нерешенные задачи связаны с существованием гиперболических биллиардов с гладкой (по крайней мере дважды дифференцируемой) границей. Отметим что граница стадиона дифференцируема, но кривизна (и, следовательно, вторая производная) разрывна. Неизвестны дважды дифференцируемые примеры даже с невыпуклой или неодносвязной границей.

Что же дает гиперболичность? Она позволяет показать, что детерминистская динамическая система во многих отношениях ведет себя как последовательность независимых случайных величин. В некотором смысле это утверждение верно буквально: при выполнении некоторых (часто проверяемых без большого труда) условий, в дополнение к (даже неравномерной) гиперболичности фазовое пространство сохраняющей конечный объем системы, можно разделить на конечное число множеств $A_1, \dots, A_n$ положительной меры, так что, во-первых, каждая точка фазового пространства кодируется последовательностью попаданий в эти множества в положительные и отрицательные моменты времени, а во-вторых, эти множества полностью независимы по отношению к динамике F, т.е.

$$\mathrm{vol}\Big(\bigcap_{k=0}^{n} F^k(A_{i_k})\Big) = \prod_{k=0}^{n} \mathrm{vol}\, A_{i_k}.$$

Хотя эти множества носят экзотический характер, но из этого свойства, которое, естественно, называется свойством Бернулли, следует много важных свойств: сходимость временных средних к пространственному (эргодичность), убывание корреляции (перемешивание), асимптотическая независимость будущего от прошлого (K-свойство, или свойство Колмогорова).

Литература

[1] Дж. Д. Биркгоф. Динамические Системы. М.—Л.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1941.

[2] L. A. Bunimovich. On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards // Comm. Mathematics. Phys. **65** (1979). № 3. P. 295—312.

[3] M. Wojkowski. Invariant families of cones and Lyapunov exponents // Erg. Theory and Dynam. Syst. **5** (1985). P. 145—161.

[4] Г. А. Гальперин, А. Н. Земляков. Математические бильярды. М.: Наука, 1990. (Библиотечка «Квант»; вып. 77.)

[5] Г. А. Гальперин, Н. И. Чернов. Биллиарды и хаос. М.: Знание, 1991.

[6] D. Dolgopyat, Ya. Pesin. Every compact manifold carries a completely hyperbolic diffeomorphism. To appear in Erg. Theory and Dynam. Syst.

[7] V. J. Donnay. Using integrability to produce chaos: billiards with positive entropy // Comm. Math. Phys. **141** (1991). № 2. P. 225—257.

[8] А. Б. Каток, Б. Хасселблатт. Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999.

[9] И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.

[10] В. Ф. Лазуткин. Существование каустик для биллиардной задачи в выпуклой области // Изв. АН СССР **37** (1973), № 1, С. 186—216.

[11] H. Masur, S. Tabachnikov. Rational billiards and flat structures. To appear in Handbook in Dynamical Systems **1A**, Elsevier.

[12] Hard ball systems and the Lorentz gas / Edited by D. Szász. Springer-Verlag, Berlin, 2000. (Encyclopaedia of Mathematical Sciences, **101**. Mathematical Physics, II.)

[13] Я. Г. Синай. Динамические системы с упругими отражениями. Эргодические свойства рассеивающих бильярдов // Успехи Мат. Наук **25** (1970), вып. 2. С. 141—192.

[14] S. Tabachnikov. Billiards // Panoramas et Synthèses **1** (1995).