А. А. Кириллов

Метод орбит за пределами групп Ли. Бесконечномерные группы

Лекции, которые будут прочитаны сегодня и завтра, в каком-то смысле являются продолжением моих предыдущих лекций (см. «Студенческие чтения МК НМУ», выпуск 1). Прошлые две лекции назывались «Метод орбит и конечные группы», а эти две лекции будут называться «Метод орбит за пределами групп Ли». Я не буду сейчас останавливаться на том, что такое метод орбит. Скажу лишь, что он применяется к группам Ли. Так что основной рассматриваемый объект — это группы Ли. Но метод орбит можно применять и к другим группам, которые не являются группами Ли. Я приготовил три серии таких примеров:

1) бесконечномерные группы;
2) конечные группы;
3) квантовые группы.

Мои прошлогодние лекции были посвящены второй части — конечным группам. Поэтому об этом я говорить больше не буду, хотя и в этом направлении есть интересные продвижения. Сегодня я буду рассказывать про бесконечномерные группы, а завтра про квантовые группы. Квантовые группы — это одно из очень модных направлений современной математики. Их успех во многом обязан звучному названию. Тонкость заключается в том, что квантовые группы группами не являются — это объект другой природы. Но кое-что от групп в них все-таки есть, и метод орбит к ним можно попытаться применить. Об этих попытках я буду завтра рассказывать. А сегодня я буду говорить о бесконечномерных группах, которые тоже группами Ли не являются.

Обычные группы Ли — это (конечномерные) многообразия, которые одновременно снабжены структурой группы, причем структура многообразия и структура группы определенным образом согласованы. Бесконечномерные группы — это почти то же самое, но только теперь многообразие бесконечномерное, т. е. локальные системы координат бесконечномерные. Но если все конечномерные пространства одной и той же размерности над полем вещественных чисел изоморфны, то в бесконечномерном случае это уже не так. Разных бесконечномерных пространств много, поэтому не всегда бывает ясно, какое именно из них нужно рассматривать. Типичный пример бесконечномерного пространства — это пространство функций. Например, можно рассмотреть функции на прямой. Но функции на прямой бывают разные. Во-первых, можно рассмотреть вообще все функции, но это бессмысленное понятие; обычно рассматривают функции, которые имеют какие-то свойства. Можно рассматривать непрерывные функции; это уже более осмысленное понятие. Еще лучше рассматривать гладкие функции, которые имеют одну, две, три... или бесконечное число производных. Можно рассматривать аналитические функции. Можно также вводить какие-то ограничения на бесконечности, например, рассматривать быстро убывающие функции или финитные функции, которые отличны от нуля только в конечной области. Как видите, бесконечномерных пространств очень много. Поэтому бесконечномерные группы в каком-то смысле, как и алгебраические многообразия, тоже не являются множествами. Обычно они состоят из функций и становятся множествами только после того, как мы уточним, какие именно функции рассматриваем. А до этого просто имеется некоторое правило, задающее групповой закон.

Задачи, которые здесь возникают при попытках применения метода орбит, очень интересны. Иногда они совпадают с уже известными классическими задачами, как решенными, так и не решенными. Иногда появляются новые задачи. Часть из этих новых задач я хочу сегодня обсудить.

Теперь я сделаю небольшое отступление. Люди часто интересуются, что происходит нового в математике, поэтому я обычно по мере сил стараюсь об этом рассказывать, чтобы удовлетворить любопытство аудитории. Сейчас математика помимо общих теорий, которые охватывают многочисленные частные примеры, проявляет особый интерес к исключениям. Любители исключений были всегда, но сейчас исключения играют все бо́льшую и бо́льшую роль. В каждой науке бывают исключительные объекты. Например, среди комплексных простых групп Ли есть 4 бесконечные серии и 5 особых примеров групп, которые ни в какие серии не укладываются. Подобные вещи есть и в других науках. Один такой пример я расскажу более подробно. Есть такой объект, связанный с группами Ли, с геометрией и со многими физическими приложениями, — это понятие *решетки*. Решетка — это дискретная подгруппа в n-мерном евклидовом пространстве, фактор-группа по которой компактна (иногда такие группы называют *кокомпактными*). Для любой решетки на прямой можно выбрать масштаб так, что решетка будет состоять из всех целых чисел. В этом случае задача классификации решеток тривиальна.

С точки зрения теории групп все решетки в n-мерном пространстве одинаковы: они изоморфны $\mathbb{Z}^n$. Но с геометрической точки зрения эти решетки могут быть разными. Например, на плоскости есть стандартная целочисленная решетка. А еще можно построить решетку следующим образом. Рассмотрим на плоскости три координатные оси, образующие друг с другом угол 120° (рис. 1). Тогда каждой точке плоскости будут соответствовать не две координаты, а три: (x, y, z); здесь берутся проекции с учетом знака. Эти координаты связаны соотношением $x+y+z=0$. Если мы потребуем, чтобы все три координаты x, y, z были целыми, то получим другую решетку (рис. 2).

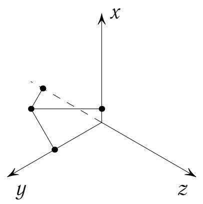

Рис. 1. Координаты на плоскости

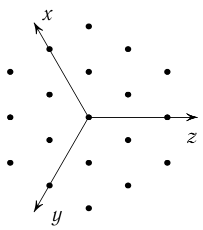

Рис. 2. Решетка на плоскости

Можно сравнить плотность этих двух решеток. Плотность решетки определяется следующим образом. Поместим в каждую точку решетки одинаковые шарики максимального размера так, чтобы эти шарики не пересекались. Отношение площади, покрытой кругами, ко всей площади — это и есть плотность. Видно, что вторая решетка плотнее прямоугольной решетки. В действительности, прямоугольная решетка — одна из наименее плотных, а вторая решетка — наиболее плотная.

Теорию решеток начали разрабатывать еще в XIX в. Сначала это было весьма популярное направление, потом оно было слегка подзабыто, а сейчас оно снова привлекло внимание математиков. В теории решеток помимо серий известны также особые, экзотические, решетки, которые не укладываются в серии. Одна из таких решеток связана с тем, что в 4-мерном пространстве есть гораздо больше правильных многогранников, чем в других пространствах. В 3-мерном пространстве есть 5 правильных выпуклых многогранников: правильный тетраэдр, куб, октаэдр, икосаэдр и додекаэдр. В пространстве размерности 4 имеется 6 правильных многогранников (там добавляется многогранник, ограниченный 24 октаэдрами, который не имеет аналогов в пространствах других размерностей). Во всех остальных пространствах есть только 3 правильных многогранника (правильный симплекс, куб и многогранник, двойственный кубу). Таким образом, 4-мерное пространство является исключительным, и в нем есть исключительная решетка, связанная с правильным 24-гранником. Эта решетка состоит из точек с целыми координатами x_1, x_2, x_3, x_4, которые удовлетворяют следующему условию: они одновременно либо все четные, либо все нечетные. Можно проверить, что у каждой точки будет ровно 24 ближайших к ней точки; расстояние между соседними точками равно 2. Например, у начала координат есть 8 соседних точек вида $(\pm 2, 0, 0, 0)$ и 16 соседних точек вида $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Все точки решетки равноправны: любую точку можно перевести в любую другую симметрией решетки.

Это все были достаточно простые примеры решеток. Более интересный пример — *решетка Лича* в пространстве $\mathbb{R}^{24}$. Эта решетка была открыта геометрами, а в последнее время она часто использовалась физиками в связи со струнными теориями. Я дам не то определение решетки Лича, которое было дано первоначально, а то, которое связано с физикой. Многие физики считают, что мы живем в 26-мерном пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,25}$, в котором есть одна координата временная и 25 координат пространственных: $(t, x_0, \ldots, x_{24})$. Непосредственно наши чувства говорят нам, что мы живем в 4-мерном мире, в котором есть одна временная координата и три пространственные. Но наши чувства грубые, они не могут отличить очень маленькое 10-мерное многообразие от точки. Поэтому размеры пространства в 22 направлениях могут быть очень маленькими, порядка 10^{-33} см; этого вполне достаточно для того, чтобы никакой прибор эти направления не обнаружил. Остальные 3 пространственных направления будут видны явно. Но это отступление. Вернемся к математике. В пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,25}$ есть квадратичная форма $t^2 - x_0^2 - \ldots - x_{24}^2$, и на световом конусе есть замечательный целочисленный вектор $(70, 0, 1, 2, \ldots, 24) = \rho$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^{1,25}$ целочисленную решетку M. Выберем в $\mathbb{R}^{1,25}$ ортогональное дополнение $\rho^{\perp}$; при этом $\rho^{\perp} \supset \rho$. Рассмотрим факторпространство $\rho^{\perp}/\mathbb{R}\rho$, которое имеет размерность 24. Если взять целочисленные точки в $\rho^{\perp}$ и профакторизовать их по $\mathbb{R}\rho$, то получится целочисленная решетка в 24-мерном пространстве, которая замечательна во всех отношениях. Эта решетка не имеет аналогов в пространствах других размерностей.

Теперь я возвращаюсь к основной теме — метод орбит для бесконечномерных групп. Я хочу рассмотреть две бесконечномерные группы, первая из которых хорошо изучена, а вторая почти совсем не изучена. Обычно абстрактные группы возникают из групп преобразований. А группы преобразований — это обычно преобразования чего-нибудь, которые что-нибудь сохраняют, т. е. обычно берется множество, на котором есть дополнительная структура, и рассматриваются все взаимно однозначные преобразования, которые сохраняют эту структуру. Например, можно взять плоскость, а на ней дополнительную структуру — расстояние между точками. Тогда получим группу движений и отражений, т. е. группу изометрий. Можно взять более обширную группу преобразований, сохраняющих проективную структуру на плоскости или сохраняющих топологию на плоскости, т. е. непрерывных преобразований. Группа непрерывных преобразований плоскости бесконечномерная.

Одна из наиболее изученных бесконечномерных групп — группа взаимно однозначных гладких преобразований окружности; ее обозначают $\mathrm{Diff}(S^1)$. Окружность можно представлять как факторпространство: $S^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, т. е. мы вводим координату $t \pmod 1$ (две точки прямой отождествляются, если их разность — целое число). Диффеоморфизм окружности задается функцией $s=f(t)$; здесь s — новая координата. При этом разность между $f(t+1)$ и $f(t)$ должна быть целым числом. Функция f может быть либо монотонно возрастающей, либо монотонно убывающей. Ясно, что это — две связные компоненты группы $\mathrm{Diff}(S^1)$. Мы будем рассматривать связную компоненту, содержащую единичный элемент группы; эту группу обозначают $\mathrm{Diff}_+(S^1)$. Для нее условие такое: $f(t+1)=f(t)+1$. Функция f гладкая; для нее выполняется условие $f'(t)>0$. Условие $f(t+1)=f(t)+1$ в терминах производной запишется так:

$$\int_0^1 f'(t)\,dt=1.$$

Кроме того, $f'(t+1)=f'(t)$.

Группа получает достаточно наглядное описание. Если в качестве параметра брать не f, а f', то группа состоит из положительных периодических функций (с периодом 1), для которых интеграл по периоду равен 1. Топологически это множество тривиально: оно стягиваемо, потому что представляет собой выпуклое множество в линейном пространстве. Оба условия (положительность и равенство интеграла 1) выпуклые. Но чтобы получить саму группу, надо от производной перейти к функции. Для этого достаточно задать начальное условие, которое принадлежит окружности. В результате получим, что интересующая нас группа $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ гомотопически эквивалентна окружности. Иногда бывает удобно рассматривать односвязные группы. Чтобы получить односвязную группу, можно не факторизовать по функциям, принимающим целые значения, а рассматривать все монотонные функции. Полученная группа $\widetilde{\mathrm{Diff}}_+(S^1)$ будет универсальным накрытием группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$.

Обсудим теперь, как к группе $G = \widetilde{\mathrm{Diff}}_+(S^1)$ применить метод орбит. Для этого прежде всего нужно перейти от группы Ли к алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$. Алгебра Ли является касательным пространством в единице, т. е. она состоит из инфинитезимальных преобразований окружности. Как геометрический объект, алгебра Ли состоит из векторных полей на окружности. Действительно, мы рассматриваем преобразования $t \mapsto t + \epsilon v(t)$. В рассматриваемой группе групповой закон соответствует суперпозиции функций: $f_1 \circ f_2(t) = f_1(f_2(t))$. На уровне алгебры Ли групповой закон превращается в коммутатор $[v, w] = vw' - v'w$; здесь $v' = dv(t)/dt$. Известно, что каждая группа Ли действует на своей алгебре Ли линейными преобразованиями (присоединенное представление группы Ли). В нашем случае группа состоит из замен переменных (систем координат) на окружности: $t = t(s)$. Для векторных полей тоже можно делать замены систем координат, а именно, векторное поле можно записать в одной системе координат, а можно и в другой. Оказывается, что присоединенное представление группы это и есть та же самая замена переменных, но для векторных полей.

Векторное поле можно задавать функцией $v(t)$. Но геометрический смысл этой функции состоит в том, что она задает векторное поле. Поэтому правильнее писать не $v(t)$, а $v(t)\dfrac{d}{dt}$. Если мы делаем замену переменных $t = t(s)$, то для векторных полей получаем

$$v(t)\frac{d}{dt} \mapsto v(t(s))\frac{d}{dt(s)} = v(t(s))\frac{d}{t'_s\,ds}.$$

Если мы следим только за коэффициентом, то, введя обозначение $t = f(s)$, получаем

$$v \mapsto \frac{v \circ t}{t'} = \frac{v \circ f}{f'}.$$

Для метода орбит нужна не сама алгебра Ли $\mathfrak{g}$, а двойственное пространство $\mathfrak{g}^*$, которое состоит из линейных функционалов на $\mathfrak{g}$. Какой геометрический смысл имеют объекты, двойственные векторным полям? Двойственный объект в паре с векторным полем позволяет получить число. Оказывается, что двойственный объект — это квадратичный дифференциал, т. е. выражение вида $p(t)(dt)^2$. При замене переменных $t = f(s)$ квадратичный дифференциал меняется так: $p(t)(dt)^2 \mapsto p \circ f\,(f')^2$. Можно проверить, что если есть векторное поле $v(t)\dfrac{d}{dt}$ и квадратичный дифференциал $p(t)(dt)^2$, то составленное из них выражение $p(t)v(t)\,dt$ является дифференциальной формой, т. е. при замене переменных оно умножается на первую степень производной. Как и всякую дифференциальную форму, ее можно интегрировать. Интеграл $\displaystyle\int_{S^1} p(t)v(t)\,dt$ не зависит от выбора параметра. Тем самым квадратичный дифференциал является линейным функционалом на пространстве векторных полей. Обозначения специально выбирались так, что естественное действие группы на пространстве $\mathfrak{g}^*$, дуальное действию на самом пространстве $\mathfrak{g}$, тоже будет естественным: оно будет обычной заменой переменных для квадратичных дифференциалов по формуле, написанной выше.

Функция p, вообще говоря, является обобщенной функцией. Но нам интересен тот случай, когда p — обычная гладкая функция, потому что наиболее интересные примеры коприсоединенных орбит связаны именно с такими функциями p.

Я должен сделать еще одно замечание. Метод орбит нужен для того, чтобы строить и изучать бесконечномерные унитарные представления. Но в основных приложениях бесконечномерных унитарных представлений (квантовой теории поля и квантовой механике вообще) обычные представления не так нужны, как проективные представления. Множеством симметрий квантовой системы является не множество унитарных операторов, а соответствующее проективное пространство. Два пропорциональных унитарных оператора не различаются, потому что две волновые функции, отличающиеся множителем, по модулю равным 1, не различаются. Поэтому понятие обычного представления, как функции на группе, удовлетворяющей соотношению

$$\pi(g_1 g_2) = \pi(g_1)\,\pi(g_2),$$

заменяется на понятие проективного представления, как функции на группе, удовлетворяющей соотношению

$$\pi(g_1 g_2) = c(g_1, g_2)\,\pi(g_1)\,\pi(g_2),$$

где $c(g_1, g_2) \in \mathbb{C}$, $|c(g_1, g_2)| = 1$.

Проективные представления группы $\mathbb{G}$ сводятся к обычным представлениям чуть большей группы, а именно, центрального расширения группы G. Если у группы по каким-то причинам нет нетривиальных центральных расширений, то каждое проективное представление на самом деле является обычным представлением. Но у многих интересных групп есть нетривиальные центральные расширения, а значит, есть нетривиальные проективные представления, не сводящиеся к обычным представлениям. Например, группа диффеоморфизмов окружности $\mathrm{Vect}(S^1)$ имеет нетривиальное центральное расширение.

Метод орбит должен на это отреагировать. Мы заменяем группу на ее центральное расширение; алгебра Ли при этом тоже заменяется на центральное расширение и коприсоединенное действие тоже заменяется на чуть более сложное действие. Коприсоединенное действие центрального расширения отличается от исходного действия тем, что оно заменяет линейное действие на аффинное действие.

Группа G и ее центральное расширение $\widetilde{G}$ включаются в точную последовательность

$$0 \to \mathbb{R} \to \widetilde{G} \to G \to 1.$$

Я начал последовательность с нуля, потому что $\mathbb{R}$ — аддитивная группа, а заканчиваю последовательность единицей, потому что обычно группа G записывается мультипликативно; обе группы 0 и 1 состоят ровно из одного элемента.

Для алгебр Ли точная последовательность выглядит так:

$$0 \to \mathbb{R} \to \tilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g} \to 0.$$

Имеется также двойственная последовательность

$$0 \leftarrow \mathbb{R} \leftarrow \tilde{\mathfrak{g}}^* \leftarrow \mathfrak{g}^* \leftarrow 0.$$

На уровне линейных пространств эта точная последовательность расщепляется, поэтому можно считать, что $\tilde{\mathfrak{g}}^* = \mathfrak{g}^* \oplus \mathbb{R}$ как линейные пространства. Как мы знаем, пространство $\mathfrak{g}^*$ состоит из квадратичных дифференциалов; элементы этого пространства называют *моментами.* Расширенный момент состоит из квадратичного дифференциала и числа. Нужно задать действие группы на множестве пар, состоящих из квадратичного дифференциала и числа. Это действие должно выглядеть так:

$$K(f)(p, c) = (p \circ f\,(f')^2 + cS(f), c). \tag{1}$$

То, что c остается без изменений — это общий факт для всех центральных расширений; дополнительный параметр не изменяется при коприсоединенном действии. Из-за этого его иногда называют *зарядом.* Аффинное преобразование для p состоит из двух частей. Линейную часть $p \circ f\,(f')^2$ мы уже знаем. Добавочный член от p не зависит, а от c зависит линейно, поэтому он имеет вид $cS(f)$. Чтобы выражение (1) было действием, квадратичный дифференциал $S(f)$ должен обладать следующим свойством:

$$S(f_1 \circ f_2) = S(f_1) \circ f_2\,(f_2')^2 + S(f_2).$$

Любители когомологий могут сказать, что это выражение является уравнением коцикла.

Существует ровно одно S, обладающее требуемым свойством, а именно,

$$S(f) = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2. \tag{2}$$

Теперь можно забыть обо всем ранее сказанном и относиться к этому лишь как к мотивировке. Математическая постановка задачи такова. Нужно получить классификацию коприсоединенных орбит, т.е. получить классификацию периодических функций от аргумента t относительно преобразований вида (1).

Выражение (2) было хорошо известно математикам еще в XIX веке. Его открыл немецкий математик Шварц; в связи с этим $S(f)$ называют *производной Шварца*. Вполне естествен вопрос, как устроены функции, для которых $S(f)=0$? Функции, для которых производная Шварца равна нулю, обладают замечательным свойством: они образуют группу относительно композиции. Эти функции являются решениями дифференциального уравнения порядка 3, поэтому соответствующая группа имеет размерность 3. Трехмерных групп Ли не так уж много. На самом деле эта группа изоморфна группе PSL_2 и реализуется как группа дробно-линейных преобразований. Поэтому общее решение уравнения $S(f)=0$ выглядит так: $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Еще более замечательное свойство производной Шварца заключается в том, что если вы вычислите производную Шварца от какой-нибудь хорошей функции, то обычно в результате получается число простого вида. Например, если $f(x) = e^{\lambda x}$, то

$$S(f) = \frac{\lambda^3 e^{\lambda x}}{\lambda e^{\lambda x}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\lambda^2 e^{\lambda x}}{\lambda e^{\lambda x}}\right)^2 = -\frac{\lambda^2}{2}.$$

Для функции $\operatorname{tg} x$ тоже получается число, но я не буду говорить, какое.

Нам предстоит решить следующую трудную задачу: привести к наиболее простому виду функцию, используя преобразования, действующие по описанному выше сложному правилу. Казалось бы, эта задача

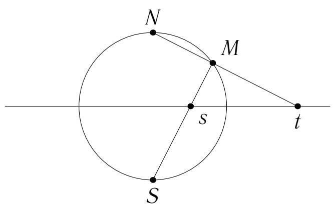

Рис. 3. Проективная структура на окружности

очень искусственная. Но я ее сейчас сформулирую по-другому, и тогда она будет выглядеть совершенно естественно. Оказывается, что эта задача равносильна вот какой геометрической задаче. Рассмотрим окружность S^1 и определим для нее понятие структуры проективного многообразия. Обычное гладкое многообразие получается, если мы покрываем топологическое пространство локальными системами координат и требуем, чтобы переход от одной системы координат к другой задавался гладкими функциями. Наложим теперь дополнительное условие. Пусть две локальные системы координат с координатами t и s пересекаются. Тогда на пересечении возникают две координаты, и одна из них будет функцией от другой, например $t = f(s)$. В обычном определении многообразия требуется только, чтобы функция f была гладкой. Мы сужаем класс функций и требуем, чтобы функция была дробно-линейной, т. е. $t = \dfrac{as+b}{cs+d}$. То, что в результате получится, называют проективной структурой на окружности. Вопрос такой: можно ли вообще ввести проективную структуру на окружности, а если можно, то сколькими способами?

Как известно, окружность одной картой покрыть нельзя. Но с помощью стереографической проекции можно ввести две координаты на окружности (рис. 3). Пусть N — северный полюс, S — южный полюс, M — точка окружности. Точку M можно спроектировать на ось x из точки N и из точки S. В результате получим две координаты t и s. Координата t определена всюду, кроме северного полюса N; координата s определена всюду, кроме южного полюса S. Там, где обе координаты определены, они связаны соотношением $st = 1$. Это соотношение является дробно-линейным: $t = 1/s$. Таким образом, на окружности определена проективная структура. Оказывается, что на окружности есть и другие проективные структуры.

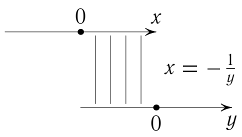

Рис. 4. Проективная структура $\frac{3}{2}\mathbb{R}$

Теорема. *Классификация моментов для центрального расширения группы диффеоморфизмов окружности эквивалентна описанию проективных структур на окружности.*

Окружность — это не самое простое одномерное многообразие. Самое простое одномерное многообразие — это прямая. Попробуем решить задачу описания проективных структур на прямой. На прямой есть одна тривиальная проективная структура: на прямой можно ввести одну локальную координату x (она же будет глобальной координатой). Другой пример проективной структуры можно получить так. Отобразим прямую на окружность: $x \mapsto e^{ix}$. На окружности есть проективная структура; ее можно перенести на прямую. Получится не та проективная структура, которая задается координатой x. Эти проективные структуры не эквивалентны, потому что не существует функции, которая выражает x через координату на окружности и является дробно-линейной.

Теперь я приведу еще один пример проективной структуры на прямой, который даст возможность описать все проективные структуры на прямой. Прежде всего заметим, что интервал $(0,1)$ с координатой y, изменяющейся от 0 до 1, проективно не эквивалентен прямой. Как гладкие многообразия прямая и интервал — одно и то же: существует гладкая функция, отображающая прямую на интервал, для которой обратное отображение тоже гладкое. Но эта функция не может быть дробно-линейной. Ясно также, что луч с координатой z, изменяющейся от 0 до $+\infty$, проективно эквивалентен интервалу. Действительно, в качестве функции перехода можно взять $y = \dfrac{z}{z+1}$.

Обозначим прямую с тривиальной проективной структурой $\mathbb{R}$, а прямую с проективной структурой луча $\frac{1}{2}\mathbb{R}$. Изготовим теперь проективное многообразие, которое назовем $\frac{3}{2}\mathbb{R}$. Это делается следующим образом (рис. 4). Возьмем две прямые с координатами x и y и склеим положительный луч $(0,+\infty)$ первой прямой с отрицательным лучом $(-\infty,0)$ второй прямой по следующему правилу: $x = -\dfrac{1}{y}$. Проек-

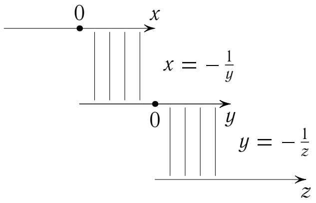

Рис. 5. Проективная структура $2\mathbb{R}$

тивное многообразие $\dfrac{3}{2}\mathbb{R}$ содержит проективные подмногообразия $\dfrac{1}{2}\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}$, но отлично от них.

Конструкцию можно продолжить дальше и получить проективное многообразие $2\mathbb{R}$. Возьмем для этого три прямые с координатами x, y, z и склеим еще дополнительно положительный луч второй прямой с отрицательным лучом третьей прямой по правилу $y = -\dfrac{1}{z}$ (рис. 5). Проективное многообразие $\dfrac{3}{2}\mathbb{R}$ не содержит проективного подмногообразия $2\mathbb{R}$.

Аналогично можно определить на прямой проективную структуру $\dfrac{m}{2}\mathbb{R}$, где m — любое натуральное число или ∞. На самом деле есть три варианта бесконечной прямой: бесконечная вправо, бесконечная влево и бесконечная в обе стороны. (Последнему случаю соответствует соответствует как раз та проективная структура, которая переносится с окружности на прямую). Можно доказать, что этим исчерпываются все проективные структуры на прямой. Инвариант, который различает эти проективной структуры, — минимальное количество карт, которыми можно покрыть всю прямую.

Таков ответ для прямой. Для окружности все гораздо интереснее. Ответ для окружности равносилен описанию орбит коприсоединенного представления для группы диффеоморфизмов окружности.

Я много времени потратил на формулировку решенных задач, а теперь сформулирую одну нерешенную задачу. Рассмотрим группу $G = \mathrm{Diff}(D, \partial D, \sigma)$, где

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leqslant 1\}, \quad \partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\},$$

а $\sigma = dx\,dy$ — форма площади. Здесь имеется в виду, что G — группа диффеоморфизмов диска D, гладко продолжающихся на границу ∂D и сохраняющих форму σ.

Пример преобразования из группы G — вращение диска. Не так уж просто написать явную формулу какого-нибудь другого преобразования из группы G, кроме

$$r \mapsto r, \quad \phi \mapsto \phi + f(r).$$

Для этой группы я хочу поставить задачу классификации коприсоединенных орбит и обсудить ее. Прежде всего нужно выяснить, как устроена алгебра Ли этой группы. Если бы мы брали все диффеоморфизмы, то получили бы алгебру векторных полей, которые на границе касаются границы. Мы же хотим рассматривать векторные поля, малый сдвиг вдоль которых сохраняет площадь. Как известно, такие векторные поля называют бездивергентными. Векторное поле

$$v = a(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial}{\partial y}.$$

бездивергентно, если

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} = 0.$$

При таком условии малый сдвиг вдоль векторного поля сохраняет площадь.

Обсудим теперь, какова размерность рассматриваемой группы. Для бесконечномерных групп тоже есть понятие размерности, только не обычной, а функциональной. Для конечномерных пространств в топологии доказывается топологическая инвариантность размерности: пространства разной размерности не гомеоморфны. Для бесконечномерных многообразий ситуация не столь простая, но тем не менее все, кто занимается так называемым глобальным анализом, знают, что существует понятие функциональной размерности. Например, функции одной переменной образуют пространство функциональной размерности 1, а функции двух переменных образуют пространство функциональной размерности 2. Поэтому функцию двух переменных нельзя записать с помощью функций одной переменной. Мне могут возразить, что есть 13-я проблема Гильберта, которая была решена Колмогоровым и Арнольдом: им удалось выразить любую функцию n переменных через суперпозицию функций одной переменной. Но тут есть некоторый обман, потому что рассматриваются непрерывные функции, а непрерывные функции — вещь необозримая, не поддающаяся никакому описанию. Если же рассматривать функции гладкие или аналитические, то функция двух переменных содержит гораздо больше информации, чем функция одной переменной; любого конечного числа функций одной переменной не хватит, чтобы заменить функцию двух переменных. Так вот, группа диффеоморфизмов плоскости имеет функциональную размерность, соответствующую двум функциям от двух переменных, т. е.

$2\infty^2$. Действительно, диффеоморфизм плоскости задается двумя функциями от двух переменных. Алгебра Ли в этом случае имеет такую же размерность: векторное поле на плоскости тоже задается парой функций. Но у нас есть дополнительное условие $\operatorname{div} v = 0$. В таком случае существует функция h, для которой $a = -\dfrac{\partial h}{\partial y}$ и $b = \dfrac{\partial h}{\partial x}$. (Векторное поле v называют косым градиентом функции h и обозначают $v = \text{s-grad}\, h$; косой градиент — это обычный градиент, повернутый на $90°$.) Таким образом, рассматриваемая группа имеет размерность ∞^2.

Условие, что векторное поле касается границы, выражается очень просто: $h|_{\partial D} = \text{const}$. Действительно, у функции h косой градиент касается границы, поэтому обычный градиент перпендикулярен границе. Следовательно, граница является линией уровня, т. е. на границе функция постоянна. Косой градиент, так же как и обычный, не изменяется при добавлении к функции константы. Поэтому можно считать, что $h|_{\partial D} = 0$. Тогда алгебра Ли $\mathfrak{g} = C^\infty(D, \partial D)$ — пространство гладких функций на диске, обращающихся в нуль на границе. Коммутатор в этой алгебре Ли — обычная скобка Пуассона $[f, g] = f'_x g'_y - f'_y g'_x$. Двойственное пространство $\mathfrak{g}^*$ состоит из обобщенных функций F, для которых $\langle F, f\rangle = \iint_D F f \sigma$.Мы ограничимся гладкой частью пространства $\mathfrak{g}^*$, т. е. будем считать, что F — гладкая функция. Тогда коприсоединенное действие — это обычное действие диффеоморфизмов на функции.

Мы получаем такую задачу. Имеется гладкая функция на диске. Две функции считаются эквивалентными, если одну можно перевести в другую заменой переменных, сохраняющей площадь. Какие есть инварианты?

Эта задача совсем не тривиальна. Она, по-видимому, имеет обозримое решение. Я сейчас его намечу. С каждой функцией $f \in C^\infty(D, \partial D)$ связан интересный топологический инвариант Y_f — дерево компонент линий уровня функции f (рис. 6). Оно определяется так. Рассмотрим линию уровня. Она может состоять из нескольких компонент связности. Каждую компоненту связности будем считать отдельной точкой. На этом множестве есть естественная топология. Соответствующее топологическое пространство и есть дерево компонент уровня.

Ясно, что дерево компонент линий уровня является инвариантом относительно замен переменных, в том числе и относительно замен переменных, сохраняющих площадь. Для функций, у которых дерево компонент линий уровня имеет простейший вид (две вершины, соединенные ребром), есть ровно один инвариант относительно замен переменных, сохраняющих

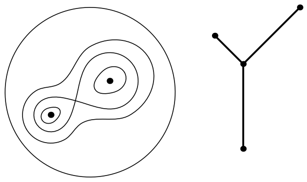

Рис. 6. Дерево компонент линий уровня

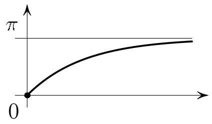

Рис. 7. График функции S

площадь. Этот инвариант не обычный, а функциональный. А именно, рассмотрим функцию

$$S(c) = \mathrm{area}\{x : f(x) \leqslant c\}.$$

Если функция f неотрицательна, то $S(0) = 0$, $S(\infty) = \pi$ и график функции имеет такой вид, как на рис. 7. Не очень простая, но и не очень сложная теорема утверждает, что для функций с простейшим деревом компонент этот инвариант единствен. Это означает, что если известна функция S, то известна и функция f с точностью до замены переменных, сохраняющих площадь. А именно, замену переменных можно сделать так, чтобы функция f зависела только от радиуса (как именно она зависит от радиуса, легко вычислить, зная функцию S).

Соответствующая теорема предполагается верной и для любого дерева компонент, но эта теорема не доказана. Функцию S при этом нужно модифицировать, указывая отдельно ее значения для каждого ребра дерева. Такая функция по-прежнему является инвариантом, но не известно, есть ли другие инварианты.

Бесконечная группа Ли $\mathrm{Diff}(D, \partial D, \sigma)$ и ее алгебра Ли, по-видимому, являются богатым источником для новых исследований. Дело в том, что эта алгебра сама себе двойственна, потому что она имеет инвариантную относительно коприсоединенного представления форму $\langle F, f\rangle = \iint_D Ff\sigma$. Таким образом, присоединенное представление эквивалентно коприсоединенному. А это позволяет обращаться с такой алгеброй Ли, как с обычной компактной алгеброй Ли. И перенесение основных конечномерных конструкций на этот бесконечномерный случай — это очень перспективное занятие. В частности, описание многообразия флагов для этой группы — это очень вызывающая задача, на которую я хочу обратить внимание молодых математиков. Правда, здесь будет не одно многообразие флагов, а несколько, отвечающих разным типам деревьев.

Я еще не успел рассказать о симплектической структуре орбит и о комплексной структуре, которая тоже здесь иногда встречается.