А. А. Кириллов

Метод орбит за пределами групп Ли. Квантовые группы

Сегодня я буду говорить о квантовых группах. Сначала я расскажу о том, как я понимаю, что такое квантовая группа. Обычная группа Ли — это одновременно гладкое многообразие и группа. Структуру группы мы пока обсуждать не будем, а о структуре гладкого многообразия немного поговорим. Есть разные определения гладкого многообразия. Одно из них — алгебраическое, которое с вычислительной точки зрения часто бывает самым полезным. Общий принцип вычислений в математике состоит в том, чтобы сводить все вопросы к алгебраическим вопросам, а они уже решаются алгоритмическим путем. Как же заменить такую геометрическую конструкцию, как гладкое многообразие, чисто алгебраическим понятием? Для этого вместо гладкого многообразия M мы рассмотрим $A(M)$ — алгебру гладких (вещественных) финитных функций на M. Финитность означает, что функция равна нулю вне некоторого компактного множества. Если многообразие компактно, то говорить о финитности функций не нужно. Для компактных многообразий весь этот подход выглядит проще; теоремы короче формулируются и проще доказываются. Но чтобы результат был общим, я сформулирую его для всех многообразий.

Алгебра $A(M)$ топологическая; в ней определено понятие предела. На компактных многообразиях сходимость означает сходимость самих функций и всех их производных. Алгебра $A(M)$ полностью описывает многообразие M. Тем самым вся геометрия изгоняется, и остается одна алгебра.

Как можно восстановить многообразие M? Если есть другое многообразие N и задано гладкое отображение $\phi\colon M \to N$, то можно построить встречное отображение на алгебрах функций $\phi^*\colon A(N) \to A(M)$. А именно, функции $f \in A(N)$ сопоставляется $\phi^*(f) = f \circ \phi$. Здесь возникает вопрос, останутся ли финитные функции финитными? Для компактного многообразия ответ ясен, а для некомпактного финитная функция может перейти не в финитную. Поэтому для некомпактных многообразий нужно ограничить класс отображений и рассматривать только так называемые *собственные* отображения, для которых прообраз любого компактного множества компактен. Тогда финитные функции будут переходить в финитные. Это не очень удобно, например потому, что отобразить некомпактное многообразие в компактное тогда вообще невозможно, поскольку прообраз самого компактного многообразия будет некомпактным многообразием.

Отображение ϕ^* является гомоморфизмом алгебр, поэтому геометрическое понятие гладкого отображения многообразий заменяется алгебраическим понятием. Самое замечательное здесь то, что любой гомоморфизм алгебр функций порождается гладким отображением многообразий. Тут тоже нужны некоторые уточнения, о которых я сейчас не буду говорить.

Рассмотрим сначала самый простой случай, когда многообразие M_0 состоит из одной точки. Ясно, что $A(M_0) = \mathbb{R}$; поэтому гладкое отображение $\phi\colon M_0 \to M$ индуцирует гомоморфизм $\phi^*\colon A(M) \to \mathbb{R}$. Частный случай только что сформулированной теоремы выглядит следующим образом.

Теорема 1. *Любой ненулевой непрерывный гомоморфизм*

$$\chi\colon A(M) \to \mathbb{R}$$

имеет вид χ_m, $m \in M$, *где* $\chi_m(f) = f(m)$.

Доказательство. Для гомоморфизма χ его ядро $\operatorname{Ker}\chi = \{f \in A(M)\colon \chi(f) = 0\}$ является идеалом; обозначим этот идеал I_χ.

Лемма. *Для любого нетривиального идеала в алгебре функций на многообразии существует точка многообразия, в которой все функции идеала обращаются в нуль.*

Доказательство. Предположим, что такой точки нет. Тогда для любой точки $m \in M$ существует такая функция $f_m \in I_\chi$, что $f_m(m) \neq 0$.

Выберем окрестность U_m точки m так, чтобы в ней функция f_m была отлична от нуля.

Возьмем произвольную функцию $g \in A(M)$. Мы хотим доказать, что эта функция тоже принадлежит идеалу I_χ. Тогда $I_\chi = A(M)$, а это противоречит нетривиальности идеала.

По определению функция g финитна, т.е. существует компактное множество K, вне которого она обращается в нуль. Множество K можно покрыть конечным числом определенных выше окрестностей U_1, $\ldots$, U_N. Им соответствуют функции $f_1, \ldots, f_N$ из идеала. Рассмотрим функцию $f = \sum\limits_{i=1}^{N} f_i^2$. Ясно, что $f > 0$ на K. Поэтому $g = fh$, где h — некоторая гладкая функция. Но $f \in I_\chi$, поэтому $g \in I_\chi$. □

В рассматриваемом случае идеал имеет коразмерность 1, потому что вся алгебра отображается в одномерное пространство. Для таких идеалов точка, о которой идет речь в условии леммы, может быть только одна. Тем самым, наш гомоморфизм является вычислением значения функции в данной точке. □

Итак, всю теорию гладких многообразий можно изложить в чисто алгебраических терминах, если вместо точек многообразия говорить об алгебре функций. Теперь мы сделаем самый важный шаг. Зададимся таким вопросом: нельзя ли вместо алгебры гладких функций рассматривать какие-нибудь более общие алгебры, например некоммутативные? Оказывается, что можно. То, что в результате получается, сейчас принято называть *некоммутативным многообразием*. Оно не является многообразием в классическом смысле; говорить о точках этого многообразия нельзя. Можно говорить только об алгебре функций на этом многообразии, а в качестве алгебры функций рассматривать произвольную алгебру, в том числе и некоммутативную. Смысл этого в том, что интуиция работы с гладкими многообразиями переносится на работу с некоммутативными алгебрами. Можно пробовать перенести конструкции, известные в теории гладких многообразий, на некоммутативные алгебры. При этом получается много интересного. В частности, можно определить, что такое некоммутативная группа Ли; здесь имеется в виду не то, что она некоммутативна как группа, а то, что она является некоммутативным многообразием.

Мы подошли к следующему определению: квантовая группа — это некоммутативное многообразие, которое одновременно является группой. Нужно только объяснить, что означает выражение «некоммутативное многообразие, которое одновременно является группой», потому что некоммутативное многообразие не является множеством. Мы должны сформулировать то свойство, что некоторое множество является группой, на языке не множеств, а алгебр функций на множествах. Для этого нужно не говорить о точках, а говорить только о функциях.

Обычное определение группы таково. Группа — это множество G, для которого задано отображение $G \times G \xrightarrow{\Pi} G$, обладающее определенными свойствами. Для группы Ли это отображение должно быть гладким. Нужно еще, чтобы переход к обратному элементу был гладким, но формулировку соответствующего утверждение я оставлю в качестве упражнения. А сейчас я переведу на язык функций свойство ассоциативности умножения. При обычном определении ассоциативность — это коммутативность следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd} & G \times G \arrow[dr, "\Pi"] & \\ G \times G \times G \arrow[ur, "\Pi \times 1"] \arrow[dr, "1 \times \Pi"'] & & G. \\ & G \times G \arrow[ur, "\Pi"'] & \end{tikzcd}$$

Для алгебр функций получаем отображение $A(G) \xrightarrow{\Pi^*} A(G \times G)$. Если группа конечная, то $A(G \times G)$ алгебраически совпадают с обычным тензорным произведением $A(G) \otimes A(G)$. Для бесконечных групп это уже неверно. В этом случае нужно взять пополненное (в топологическом смысле) тензорное произведение $A(G) \widehat{\otimes} A(G)$. Ассоциативность группы соответствует коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} & A(G) \widehat{\otimes} A(G) \arrow[dr, "\Pi^* \times 1"] & \\ A(G) \arrow[ur, "\Pi^*"] \arrow[dr, "\Pi^*"'] & & A(G) \widehat{\otimes} A(G) \widehat{\otimes} A(G) \\ & A(G) \widehat{\otimes} A(G) \arrow[ur, "1 \times \Pi^*"'] & \end{tikzcd}$$

Это определение имеет смысл и для некоммутативных многообразий.

Теперь можно определить *квантовую группу* как алгебру A, для которой задано такое отображение $A \xrightarrow{\Pi^*} A \widehat{\otimes} A$, что соответствующая диаграмма коммутативна. Еще должно выполняться свойство, соответствующее существованию у каждого элемента обратного, но его формулировка остается в качестве упражнения.

Частным случаем квантовой группы является обычная группа Ли.

В действительности квантовыми группами называют очень специальный класс некоммутативных многообразий, для которых алгебра функций хотя и некоммутативна, но является небольшой деформацией коммутативной. Сформулированное выше определение годится для произвольных некоммутативных алгебр, но в такой общности мало что можно сказать. Наиболее интересные примеры требуют введения дополнительных структур. Поэтому давайте ограничим класс некоммутативных алгебр.

С чем связано название «квантовая»? Дело в том, что один из способов придать математический смысл слову «квантование» состоит в том, чтобы в нужном месте заменить коммутативную операцию некоммутативной. Есть и другие подходы. Например, некоторые считают, что квантование состоит в том, чтобы в некотором месте заменить непрерывный параметр на дискретный. Или заменить какие-нибудь простые конструкции на сложные. Слово «квантование» адекватного перевода на математический язык не имеет. Оно имеет несколько переводов, но эти переводы не эквивалентны. Что вполне естественно, поскольку физика и математика — это два разных языка, и объем понятий не обязан совпадать. Просто в математике нет такого слова, которое имело бы тот же объем понятий, что и слово «квантование» в физике.

Мы будем рассматривать специальный класс некоммутативных алгебр. А именно, рассмотрим пространство формальных степенных рядов от параметра h над некоторой коммутативной (и ассоциативной) алгеброй A. В этом пространстве можно ввести некоммутативное умножение следующим образом. Пусть $a = a_0 + ha_1 + h^2a_2 + \dots$ и $b = b_0 + hb_1 + h^2b_2 + \dots$ Эти элементы нужно перемножить. Их можно перемножить как формальные степенные ряды, но такое умножение коммутативно. Попробуем построить некоммутативное умножение, которое в нулевом приближении было бы устроено так же, а для членов с более высокими степенями h могло бы отличаться. Если мы будем считать, что h коммутирует с остальными элементами, то достаточно научиться перемножать элементы самой алгебры A. Степенные ряды тогда мы сможем перемножать. Определим теперь умножение так:

$$a \circledh b = a_0b_0 + h\{a,b\}_1 + h^2\{a,b\}_2 + \dots$$

Знак $\circledh$ символизирует, что умножение зависит от h. Каждая скобка $\{a,b\}_i$ — билинейная операция в алгебре. Свойство ассоциативности умножения накладывает на скобки много соотношений. В каком-то смысле эти соотношения можно разрешить. Я не буду описывать всю эту науку, которая называется теорией деформаций ассоциативных алгебр, а сформулирую только результаты, к которым она пришла.

Теория деформаций ассоциативных алгебр, как и все остальные науки, сильно зависит от понятия гомологий. Ее результаты записываются некоторыми классами когомологий, т. е. какими-то коциклами по модулю кограниц. На простом языке это означает, что мы могли бы сделать некоторую замену переменных в самой алгебре A, а именно, заменить степенной ряд новым степенным рядом, все члены которого однозначно определяются нулевым членом: $a=a_0+hA_1(a_0)+h^2A_2(a_0)+\ldots$, $b=b_0+hA_1(b_0)+h^2A_2(b_0)+\ldots$ Тогда получим новый закон умножения:

$$\{a,b\}_1^{\text{новое}}=\{a,b\}_1^{\text{старое}}+aA_1(b)-A_1(ab)+A_1(a)b.$$

Это изменение следует считать тривиальным: мы записали то же самое умножение в других координатах. Оказывается, что то уравнение, которому удовлетворяет скобка, говорит, что общая скобка является суммой такой тривиальной добавленной скобки и кососимметричного выражения. Поэтому с точностью до замены переменных можно считать, что умножение в первом члене антикоммутативно; симметричную часть можно убрать. В нулевом члене умножение всегда коммутативно, а в первом члене его можно сделать антикоммутативным. После этого оказывается, что для новой скобки ассоциативность умножения эквивалентна тождеству Якоби. Это можно было предвидеть, потому что есть общая теорема о том, что тождество Якоби — это нечетный аналог ассоциативности.

Для алгебры гладких функций на многообразии это выглядит так. Пусть $f_1,f_2\in C^\infty(M)$. Тогда

$$f_1 \, ⓗ \, f_2(m)=f_1(m)f_2(m)+h\{f_1,f_2\}(m).$$

Этот ряд можно продолжать и дальше, но достаточно интересно ограничиться первыми членами. Если мы наложим еще такое физически понятное требование, что носитель произведения должен содержаться в пересечении носителей сомножителей, то любая билинейная операция, не увеличивающая носитель, должна задаваться дифференциальным оператором. Если еще выполняется и тождество Якоби, то можно доказать, что в дифференциальном операторе не встречаются производные выше первого порядка. Поэтому скобка в локальных координатах имеет вид

$$c^{ij}(m)\,\partial_i f_1\,\partial_j f_2.$$

Константы c^{ij} антисимметричны по i и j и удовлетворяют квадратичному соотношению, вытекающему из тождества Якоби. Такая геометрическая структура на многообразии называется *структурой Пуассона*, а само многообразие с такой структурой — *пуассоновым многообразием*.

Геометрически пуассонова структура задается бивектором c^{ij}. Краткая запись такова: $c^{ij}\,\partial_i \wedge \partial_j$. Можно определить поливекторные поля на многообразии как выражения, которые в локальных системах координат имеют вид

$$c^{i_1\dots i_k}\,\partial_{i_1}\wedge\ldots\wedge\partial_{i_k}.$$

При переходе от одной системы координат к другой эти выражения преобразуются стандартным образом, как частные производные; а внешнее произведение тоже преобразуется стандартным образом, как антисимметричное ассоциативное умножение. Оказывается, что существует естественная билинейная операция

$$\mathrm{Vect}^k(M)\times\mathrm{Vect}^l(M)\to\mathrm{Vect}^{k+l-1}(M).$$

где $\mathrm{Vect}^k(M)$ — множество всех k-векторных полей на многообразии M. В частности, паре векторных полей сопоставляется снова векторное поле, а именно, обычный коммутатор векторных полей. Паре бивекторных полей сопоставляется тривекторное поле. Операция естественна в том смысле, что она не зависит от выбора локальной системы координат. На векторных полях операция антикоммутативна, а на бивекторных полях коммутативна. И всегда она либо коммутативна, либо антикоммутативна.

На бивекторах операция устроена так:

$$[c,c]^{ijk}=c^{s[i}\partial_s c^{jk]};$$

квадратные скобки в правой части означают антисимметризацию по верхним индексам. Тождество Якоби эквивалентно тому, что $[c,c]=0$. Это легко восстановить, если вспомнить, что

$$\{f_1,f_2\}=c^{ij}(m)\,\partial_i f_1\,\partial_j f_2,$$

и потом записать для левой части тождество Якоби. Получится кососимметричное выражение от трех функций, которое задает тривектор. Этот тривектор как раз и есть $[c,c]$.

Вернемся к квантовым группам. Я напомню, что квантовая группа связана с некоммутативным многообразием. У нас теперь есть первое приближение к некоммутативному многообразию: мы рассматривали только два члена ряда, а именно, нулевой (коммутативный) и первый (антикоммутативный). Такое квазиклассическое приближение к квантовой группе задается вполне классическим объектом — группой Ли с пуассоновой структурой. Такой объект называют *группой Пуассона—Ли.*

Группа Пуассона—Ли состоит из группы Ли G и бивекторного поля c на G, удовлетворяющего двум условиям:

- выполняется тождество Якоби $[c,c]=0$;
- если L_x — левый перенос на x, R_y — правый перенос на y, то

$$c(xy) = L_x c(y) + R_y c(x). \tag{1}$$

Первое условие можно сформулировать для любого многообразия; не только для группы Ли. Второе условие соответствует ассоциативности умножения в переводе на язык гомоморфизмов алгебр функций.

Второе условие неудобно с точки зрения вычислений, потому что значение c является не функцией, а сечением некоторого расслоения. Значение бивектора c в данной точке x лежит в пространстве бивекторов, касательных к G в точке x. Поэтому значения в разных точках лежат в разных пространствах. Но группа Ли параллелизуема, поэтому можно ввести новую функцию, а именно, пусть

$$\gamma(x) = L_x^{-1} c(x).$$

Тогда γ — обычная функция на G со значениями в $\mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}$, потому что $c(x)$ принимает значения во внешнем квадрате касательного пространства в точке x, а $L^{-1}(x)$ переводит касательное пространство в точке x в касательное пространство в единице, т. е. в $\mathfrak{g}$. Для функции γ равенство (1) перепишется в виде

$$\gamma(xy) = \gamma(y) + \mathrm{Ad}\, y^{-1}\gamma(x). \tag{2}$$

Это — функциональное уравнение. Из него легко получить дифференциальное уравнение. Для этого положим $y=\exp(tY)$ и продифференцируем по t:

$$Y\gamma(x) = Y\gamma(1) - e^{\mathrm{ad}\, Y} Y(x). \tag{3}$$

Мы получили систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функции $\gamma(x)$; в правую часть входит первая производная в начальной точке. Кстати сказать, если мы в (2) положим $x=y=1$, то получим, что $\gamma(1)=0$. В правую часть (3) входят только первые производные γ в точке 1, поэтому бивектор γ полностью определяется этим дифференциальным уравнением, если известны его первые производные в точке 1.

Первая производная бивектора в точке 1 — это тензор с тремя индексами: бивектор действует на функции, но еще сам он линейно зависит от касательного вектора. Все это вместе дает элемент пространства $\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$, которое изоморфно $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g})$. Группа Пуассона—Ли полностью определяется этим элементом. Этот элемент должен удовлетворять определенным условиям, но вся информация о группе Пуассона—Ли в нем уже содержится. Эта ситуация во многом похожа на само понятие группы Ли. Известно, что группа Ли во многом определяется своей алгеброй Ли, а алгебра Ли определяется набором структурных констант. Структурные константы — это тоже тензор третьего ранга. Набор структурных констант дает отображение $\mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. А для алгебры Пуассона—Ли получается отображение в обратную сторону: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$. Но от одного легко перейти к другому, рассмотрев двойственное отображение. Для алгебры Пуассона—Ли двойственное отображение будет вида $\mathfrak{g}^* \wedge \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$. Таким образом, получается полная аналогия. Сама группа Ли задается структурными константами c_{ij}^k, а в группе Пуассона—Ли добавляется еще бивектор c_k^{ij}, задающий произведение на двойственном пространстве. Оказывается, что условия, которые накладываются на этот бивектор, гарантируют, что второй набор c_k^{ij} тоже является набором структурных констант в двойственном пространстве, т.е. определяемое им произведение тоже удовлетворяет тождеству Якоби.

Получается очень красивая алгебраическая конструкция. Имеется пространство $\mathfrak{g}$, которое является алгеброй Ли с коммутатором $[\ ,\ ]$, причем двойственное пространство $\mathfrak{g}^*$ тоже является алгеброй Ли с некоторым коммутатором $[\ ,\ ]_*$. Конечно, чтобы в результате получилась группа Пуассона—Ли, обе эти структуры должны быть между собой связаны. Алгебраисты занимались этим вопросом. Окончательное решение таково. Если мы рассмотрим отображение $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ как 1-цепь на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ со значениями в $\mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$, то эта 1-цепь должна быть 1-циклом. Двойственное условие для отображения $\mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^* \wedge \mathfrak{g}^*$ эквивалентно первому условию.

Десять лет назад была открыта замечательная интерпретация обоих этих равносильных условий, которую легко может запомнить даже человек, далекий от когомологий. Как проще всего согласовать коммутаторы в самом пространстве и в сопряженном пространстве? Начнем с того, что закодируем понятие сопряженного пространства. Для этого рассмотрим прямую сумму $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^* = \mathfrak{D}$. Пространство $\mathfrak{D}$ имеет дополнительную структуру: в нем можно определить билинейную форму, которая на $\mathfrak{g}$ обращается в нуль, на $\mathfrak{g}^*$ тоже обращается в нуль, а если один аргумент лежит в $\mathfrak{g}$, а другой в $\mathfrak{g}^*$, то берется обычное значение функционала на векторе. Эта форма на $\mathfrak{D}$ невырожденная, а два подпространства $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$ изотропны относительно ее. Кроме того, отдельно на $\mathfrak{g}$ и отдельно на $\mathfrak{g}^*$ задана структура алгебры Ли. Оказывается, что все дополнительные условия с коциклами равносильны следующему условию: на $\mathfrak{D}$ существует структура алгебры Ли, которая сохраняет эту билинейную форму (т. е. все операторы ad кососимметричны относительно этого скалярного произведения) и ограничения этой алгебры Ли на $\mathfrak{g}$ и на $\mathfrak{g}^*$ совпадают с теми алгебрами Ли, которые были заданы на этих пространствах.

Инвариантность билинейной формы соответствует тому, что

$$([x, y], z) = ([y, z], x).$$

Окончательный объект, который отвечает группе Пуассона—Ли, — это так называемая *тройка Манина.* Она состоит из алгебры Ли $\mathfrak{D}$ с невырожденной инвариантной билинейной формой и из двух подалгебр $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$, изотропных относительно этой билинейной формы. Этот набор алгебраических данных полностью кодирует такой геометрический объект, как группа Пуассона—Ли.

Теперь я расскажу о том, какое это имеет отношение к методу орбит. Рассмотрим тривиальную группу Пуассона—Ли, т. е. группу Ли G с бивектором $c = 0$. Ей соответствует тройка Манина $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$, для которой коммутатор в $\mathfrak{g}$ тот же, что и в обычной алгебре Ли, коммутатор в $\mathfrak{g}^*$ нулевой. Билинейная форма такая, как и положено в прямой сумме пространства с двойственным. Уже поэтому коммутатор элементов из $\mathfrak{g}$ и из $\mathfrak{g}^*$ определяется однозначно из условия инвариантности формы. А именно, коммутатор — это коприсоединенное действие элемента из $\mathfrak{g}$ на функционал на алгебре Ли. Таким образом, алгебре Ли $\mathfrak{D}$ отвечает группа Ли $G \ltimes \mathfrak{g}^*$ — полупрямое произведение группы Ли G на пространство $\mathfrak{g}^*$, двойственное алгебре Ли. Групповое действие такое: в G — как и положено, $\mathfrak{g}^*$ — абелева группа по сложению, а G действует на $\mathfrak{g}^*$ коприсоединенно. Мы получаем основной объект метода орбит — коприсоединенное действие группы Ли G на пространстве $\mathfrak{g}^*$. Этот объект возникает, если мы рассматриваем тривиальную группу Пуассона—Ли с нулевым бивектором c. В общем же случае получается группа Ли D с двумя подгруппами G и G^*. Следует заметить, что в этой конструкции G и G^* играют полностью симметричную роль. Квантовые группы, которые связаны с деформациями, встречаются парами. С каждой группой G связана группа G^*. Если G — обычная группа Ли, то G^* — пространство, двойственное алгебре Ли.

Алгебра Ли группы D является прямой суммой алгебр Ли групп G и G^*, поэтому в первом приближении группа D является произведением G и G^*, но в целом это не так. Это примерно так, как разложить матричную группу в произведение верхних треугольных матриц и нижних треугольных: для матриц общего вида это можно сделать, а для исключительных нельзя. Так что не каждый элемент D является произведением элемента из G и элемента из G^*.

Я считаю, что полезно изучить действие элементов G не только на пространстве $\mathfrak{g}^*$, но и на группе G^*. Это уже будет нелинейное действие.

Если $G = \mathrm{SO}(3)$ или $\mathrm{SL}(2)$, то G^* — разрешимая группа. Этот факт имеет общую природу: группа, двойственная простой группе Ли, всегда разрешима. Группа G^* зависит от того, какие берутся скобки. Но для простой группы G можно описать все группы G^*. Это, как я уже говорил, связано с некоторыми коциклами, а у простой группы все коциклы тривиальны, т. е. все коциклы — кограницы. Поэтому нужный коцикл можно явно написать. Если этот коцикл (который является кограницей) достаточно невырожден, то получается довольно явное описание. Оно получено Белавиным и Дринфельдом.

Для $G = \mathrm{SO}(3)$ получается одна двойственная группа, а для $\mathrm{SL}(2)$ их три, потому что в $\mathrm{SL}(2)$ есть элементы трех типов: эллиптические, параболические и гиперболические.

Совершенно неизученная задача — попробовать исследовать тройку Манина, построенную на бесконечномерной алгебре Ли, а именно, на той алгебре, которая обсуждалась на прошлой лекции. В качестве алгебры Ли $\mathscr{A}$ я предлагаю взять алгебру гладких комплексных функций на диске D, обращающихся в нуль на границе, а в качестве инвариантного скалярного произведения взять

$$(f_1, f_2) = \mathrm{Im} \int_D f_1 f_2 \, d\sigma.$$

В конечномерной ситуации любая алгебра Ли соответствует некоторой группе Ли. А эта бесконечномерная алгебра Ли не соответствует никакой группе Ли; в бесконечномерной ситуации есть много других таких примеров. Зато $\mathscr{A}$ можно представить в виде прямой суммы подпространств $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$, которые изотропны относительно указанного скалярного произведения и являются алгебрами Ли, причем этим алгебрам Ли соответствуют группы Ли. А именно, в качестве $\mathfrak{g}$ возьмем вещественные функции $C^\infty_{\mathbb{R}}(D, \partial D)$ (это пространство изотропно, поскольку мы берем мнимую часть интеграла, а для вещественных функций мнимая часть интеграла равна нулю). Пространство $\mathfrak{g}^*$ строится следующим образом. Запишем функцию на диске в виде

$$f = f(r, \phi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(r) e^{ik\phi}.$$

Удобно заменить r на другую координату. В механике есть канонические координаты, называемые действие—угол. В них форма записывается в виде произведения дифференциалов координат. В нашем случае

$$\sigma = r\,dr \wedge d\phi = d(\pi r^2) \wedge d\left(\frac{\phi}{2\pi}\right) = dS \wedge d\theta;$$

здесь S — площадь (в механике — действие), θ — нормированный угол. Положим

$$\mathfrak{g}^* = \left\{ f = \sum_{k \geqslant 0} c_k(S) e^{2\pi i k\theta} \right\}.$$

Операция в алгебре Ли — скобка Пуассона. Скобку Пуассона можно брать в любых координатах, лишь бы площадь в них записывалась, как обычно, $dx\,dy$. В частности, S и θ можно взять за канонические координаты. Тогда

$$\{f_1(S)e^{2\pi i k\theta},\, f_2(S)e^{2\pi i l\theta}\} = 2\pi i\big(l f_1'(S) f_2(S) - k f_1(S) f_2'(S)\big) e^{2\pi i(k+l)\theta}.$$

Числа k и l складываются, поэтому функции, для которых $k \geqslant 0$, образуют подалгебру (положительные гармоники образуют подалгебру).

Итак, из алгебры Ли $\mathscr{A}$ можно изготовить тройку Манина. Пространство здесь бесконечномерное, поэтому все привычные конечномерные конструкции приходится заново осмысливать. Все это пока совершенно не исследовано.

В науке часто бывает, что, когда известно, что задача очень трудная, никто не берется ее решать. А потом приходит молодой человек, который не знал, что эта задача трудная. Он берет и решает ее. Его спрашивают: «Как же ты ее решил? Ведь она трудная.» А он отвечает: «А я не знал, что она трудная.» Поэтому я призываю тех людей, которые пока не могут оценить всех трудностей, которые здесь возникают, заняться этой задачей.