И. М. Кричевер

Конформные отображения и уравнение Уизема

Тема, которой посвящена первая часть лекции, всем известна со студенческой скамьи. Моей конечной целью будет — показать, как связаны теория интегрируемых уравнений, которая активно развивалась последние 20 лет, и теория Уизема, которая имеет уже 10-летнюю историю, с классической задачей комплексного анализа. Теорема Римана гласит, что если на комплексной плоскости есть область с границей, содержащей более чем две точки, то существует конформное отображение этой области на единичный диск. Эта теорема носит характер теоремы существования. Построением конкретных таких конформных отображений занимаются многие из прикладных наук, и не только из прикладных наук, потому что с этими задачами связаны приложения в гидродинамике, в теории нефтяных месторождений, в аэродинамике. Во многих ситуациях возникает необходимость строить конформные отображения тех или иных областей.

Я хочу в какой-то степени рассказать о недавнем замечательном наблюдении Забродина и Вигмана, которые пару месяцев тому назад обнаружили связь между классической задачей о конформных отображениях областей и бездисперсионной линеаризованной цепочкой Тода. Я расскажу о том, какое развитие это получило в нашей совместной работе, которая пока не опубликована. А именно, о том, как это обобщается для неодносвязных областей и какую роль в этом играют методы алгебраической геометрии.

Прежде чем перейти собственно к этой задаче, я хочу рассказать обо всем контексте, в котором она возникла, чтобы было яснее, что такое уравнение Уизема. Удивительным образом одинаковые структуры, связанные с уравнением Уизема, возникают в разных областях математики. Помимо конформных отображений они возникают в задаче об n-ортогональных криволинейных координатах, которая была центральной задачей дифференциальной геометрии в XIX веке. Пусть в $\mathbb{R}^n$ задана криволинейная система координат $x^i(u)$, где x^i — декартовы координаты, выраженные через криволинейные координаты u. Эту систему координат называют *n-ортогональной*, если все гиперповерхности уровня $u_i = \mathrm{const}$ пересекаются под прямым углом. Примером такой системы координат служат полярные координаты. В 2-мерном случае задача тривиальна, но начиная с размерности 3 эта задача становится очень богатой. Теоретически она была решена Дарбу, опять же на уровне теоремы существования. Он доказал, что локально задача построения n-ортогональной системы криволинейных координатах зависит от $n(n-1)/2$ функций двух переменных. Известно довольно много конкретных примеров n-ортогональных систем координат. Один из таких примеров — эллиптические координаты. По существу, решение конкретной системы дифференциальных уравнений — это и есть удачное построение системы координат, в которой система становится тривиальной. Поэтому так важны хорошие системы координат: у нас появляется больше шансов решить уравнение.

Задачу об n-ортогональных системах координат можно переформулировать во внутренних терминах как задачу отыскания диагональных метрик $ds^2 = \sum H_i^2(u)(du)^2$, которые являются плоскими. Егоров рассматривал такие метрики, для которых выполняется дополнительное условие $H_i^2 = \partial_i \Phi$. Это — условие симметрии метрики. Такие метрики называют *метриками Дарбу—Егорова*. Этот класс метрик обладает многими специальными свойствами.

И эта задача, и уравнение Уизема, и задача о конформных отображениях — это все единый комплекс идей и методов. Немного позже я расскажу о том, как задача об n-ортогональных криволинейных координатах связана с топологическими квантовыми моделями теории поля.

Другой сюжет, который в конечном итоге объединил все эти разноплановые задачи, — это теория интегрируемых уравнений, или, как теперь говорят, — солитонных уравнений. Эта теория возникла примерно 30 лет назад. Самое известное из солитонных уравнений, которое и возникло первым, — уравнение Кортевега—де Фриза (КдФ)

$$u_t - \frac{3}{2} u u_x + \frac{1}{4} u_{xxx} = 0.$$

Имеется также много других солитонных уравнений, по счастью имеющих важное прикладное значение, которые интегрируемы методами теории солитонов. Я не буду рассказывать об этих методах; они в основном развивались лет 10—20 тому назад и по-прежнему продолжают развиваться.

Простейшее решение уравнения КдФ было известно Кортевегу и де Фризу почти в момент написания этого уравнения. Это — стационарное решение $u(x,t)$, не зависящее от t. В этом случае $u_t = 0$ и уравнение можно проинтегрировать:

$$\frac{3}{4}u^2 = \frac{1}{4}u_{xx} + g_2.$$

Затем можно умножить на u_x и снова проинтегрировать:

$$\frac{1}{2}(u_x)^2 = u^3 + g_2 u + g_3.$$

Решения такого уравнения выражаются через функцию Вейерштрасса:

$$u = 2\wp(x + \mathrm{const}; \omega_1, \omega_2),$$

Функция Вейерштрасса $\wp$ — это двоякопериодическая функция с периодами $2\omega_1$ и $2\omega_2$ и с полюсом второго порядка в нуле: $\wp = \dfrac{1}{x^2} + O(x)$. Это решение зависит от трех констант, т. е. мы получили полный набор решений уравнения 3-го порядка.

Стационарное решение строится по эллиптической кривой — кривой рода 1. В 70-е годы и в начале 80-х годов в цикле работ Дубровина, Новикова, Матвеева, моих и ряда других возникли так называемые алгебро-геометрические методы построения решений солитонных уравнений, которые по набору алгебро-геометрических данных выдают решение разных нелинейных уравнений, включая уравнение КдФ, sin-Гордон и другие уравнения в рамках этой науки. Решение возникает как результат обработки данных некой машиной, называемой конечнозонной теорией интегрирования. Решение тоже записывается в явном виде, но только обычно не через эллиптические функции, а через тэта-функции Римана. Алгебро-геометрический набор данных состоит из римановой поверхности Γ_g рода g с фиксированными точками $P_1, \ldots, P_N$ и с фиксированными локальными координатами $z_1, \ldots, z_N$ в окрестностях этих точек и еще из фиксированной точки комплексного многомерного тора $J(\Gamma_g)$ — якобиана этой поверхности. По такому набору данных строится решение. В зависимости от того, сколько выбрать точек, какие классы кривых выделить, получаются решения самых разных уравнений.

Для стационарного решения уравнения КдФ алгебро-геометрический набор данных включает эллиптическую кривую $y^2 = E^3 + g_2 E + g_3$ и фиксированную точку на бесконечности. Эта часть данных играет роль интегралов — они не изменяются с течением времени. А точка на якобиане движется со временем. Фазовое пространство уравнения выглядит таким образом: есть пространство интегралов, которые являются кривыми с отмеченными точками и фиксированными локальными координатами в этих точках, и над каждой точкой пространства интегралов висит тор. Движение на торе — прямолинейная обмотка, в полном соответствии с духом теории вполне интегрируемых конечномерных систем, т. е. с теорией Лиувилля.

Так выглядит ответ для солитонных уравнений. Как строятся решения — это отдельная история. Об этом я сейчас не буду говорить. Я хочу рассказать, о том, что происходило в этой науке потом — начиная с середины 80-х годов. Тогда основной упор переместился на теорию возмущений интегрируемых уравнений. Обычно нас интересует не только какое-то вполне конкретное уравнение, но и то, что происходит в его окрестности. Основной элемент теории возмущений интегрируемых уравнений — это и есть теория Уизема.

Прежде чем перейти к теории Уизема, я хочу написать одну формулу, которую мы потом будем в разных видах встречать во всех перечисленных выше науках. Как я уже сказал, описание движения для солитонных уравнений посредством системы интегралов и прямолинейной обмотки тора вполне согласуется с теорией Лиувилля. Конечная цель теории Лиувилля — построение переменных «действие—угол». Гамильтонова система строится по многообразию M^{2n} (фазовое пространство), симплектической структуре ω на нем и гамильтониану H. Гамильтонова система называется вполне интегрируемой, если помимо гамильтониана есть набор n интегралов в инволюции: $\{F_i, F_j\} = 0$. Тогда компактные поверхности уровня этих интегралов должны быть n-мерными торами, а движение должно быть прямолинейной обмоткой тора. На торе есть естественные координаты — циклы. Если Φ_i — угловые координаты для базисных циклов, то переменными действия называют координаты A_i, которые канонически сопряжены угловым переменным, т. е. симплектическая структура в этих координатах приобретает стандартную форму Дарбу: $\omega = \sum dA_i \wedge d\Phi_i$. Отдельная нетривиальная задача — как выделить такие системы координат среди всех других систем координат. Теорема Лиувилля в изложении Арнольда дает такой ответ: нужно примитивную форму проинтегрировать по базисным циклам. Но непонятно, как этот n-мерный тор в $2n$-мерном многообразии описать явным образом. Так что эта теорема тоже носит характер скорее теоремы существования. Явным образом построить переменные «действие—угол» не удалось. Замечательным было наблюдение Новикова и Веселова в начале 80-х годов. Анализируя первые известные к тому времени интегрируемые гамильтоновы уравнения, они обнаружили, что во всех этих задачах переменные «действие—угол» всегда имеют один и тот же вид. А именно, интегрировать нужно не по циклу в n-мерном пространстве, а по циклу на соответствующей римановой поверхности:

$$A_i = \oint_{a_i} Q\,dE. \tag{1}$$

Здесь Q — некоторый мероморфный дифференциал; каждой гамильтоновой системе соответствует свой дифференциал Q. Эти дифференциалы могут быть и многозначными. Почему так происходит, было не известно. Новиков и Веселов называли это аналитическими скобками Пуассона. Объяснение природы этих формул было получено совсем недавно, 3 года назад, в нашей совместной работе с Fong'ом (в Journal of Differential Geometry) после того, как мы стали анализировать ответы для симплектических структур, которые возникают в теории Виттена—Зайберга по суперсимметричной модели Янга—Миллса. Оказалось, что те же самые симплектические скобки, которые описывают случай гиперэллиптических кривых (я должен сказать, что все то, что рассматривали Новиков и Веселов, относится к случаю гиперэллиптических кривых), были переоткрыты Виттеном и Зайбергом.

Формулу (1) нужно запомнить, потому что точно такой же интеграл многозначного дифференциала решает задачу о конформных отображениях областей.

Что же такое уравнение Уизема? Предположим, что мы немножко изменили уравнение — возмутили его. Тогда интегралы исходного уравнения перестанут быть интегралами. Они будут медленно изменяться; как говорят физики, они станут адиабатическими интегралами. Для невозмущенного уравнения точка фазового пространства бегает по тору. Как только мы возмутим уравнение, начинается медленный дрейф вдоль пространства интегралов. Возникает система уравнений на пространстве модулей кривых с отмеченными точками, которая описывает это движение. Эти уравнения и есть уравнения Уизема. Оказалось, что они сами интегрируемы.

Я больше не буду говорить об алгебро-геометрических данных и перейду на совсем элементарный уровень, когда рассматриваются только кривые рода 0. Дело в том, что самое простое решение уравнения КдФ — это не то решение, которое использует функцию Вейерштрасса; самое простое решение — это константа. В теории уравнения КдФ этим решением никто не интересовался; родом 0 пренебрегали ввиду его полной тривиальности. Но если рассматривать не постоянное решение, а его возмущения, то теория становится содержательной. В теории Уизема род 0 стал играть нетривиальную роль. Этот случай называется бездисперсионным пределом солитонных уравнений. К нему можно относиться как к частному случаю более общей задачи, а можно и заниматься им отдельно.

С чем связано название «бездисперсионный»? В уравнении КдФ коэффициенты не существенны, потому что масштабными преобразованиями его можно привести к виду $u_t = uu_x + u_{xxx}$. В дальнейшем я не буду следить за коэффициентами. Если решение почти постоянное, то про третью производную можно забыть. Хорошим приближением будет уравнение $u_t = uu_x$. Это уравнение и называют бездисперсионным пределом, потому что в уравнении КдФ член u_{xxx} отвечает за дисперсию. Уравнение $u_t = uu_x$ — простейший пример уравнения Уизема.

Если уравнение КдФ — это бесконечномерный аналог интегрируемых (по Лиувиллю) гамильтоновых систем, то уравнение $u_t = uu_x$ тоже интегрируемо, только совсем в другом смысле. Ничего не стоит написать решение уравнения $u_t = uu_x$ (его называют уравнением Римана—Хопфа). А именно, возьмем произвольную функцию $f(\xi)$ и запишем уравнение $u=f(x+ut)$. Это уравнение в неявном виде определяет функцию $u(x,t)$. Эта функция $u(x,t)$ — решение уравнения $u_t=uu_x$. Более того, все решения так получаются.

На основе этого решения обычно объясняют роль нелинейности в гидродинамике. Если воспринимать u как высоту (амплитуду волны), то видно, что точка движется со скоростью, пропорциональной высоте. Поэтому если функция не монотонна, то «горб» начинает обгонять все остальное, волна становится все более крутой, а потом опрокидывается (рис. 1). В том месте, где происходит опрокидывание, уже нельзя пренебрегать третьими производными; они там становятся большими. Гидродинамика воспринимает это так, что дисперсия (вязкость) регуляризует поведение волны.

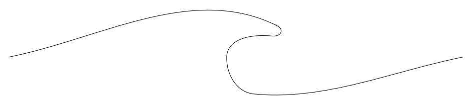

Рис. 1. Опрокидывающаяся волна

Все уравнения Уизема интегрируются сходным методом — пишется некое неявное выражение для решения.

Какова более общая постановка бездисперсионных уравнений Лакса? Я напомню, что в основе построения решений солитонных уравний лежит представление Лакса $\dot{L}=[L,A]$. Для уравнения КдФ $L=\partial^2+u(x,t)$ (оператор Штурма—Лиувилля) и $A=\partial^3+\frac{3}{2}u\partial+\frac{3}{4}u_4$. Обобщения уравнения КдФ возникли, когда стали рассматривать операторы с матричными коэффициентами и операторы более высокого порядка:

$$L=\partial^n+u_{n-2}\partial^{n-2}+\ldots+u_0.$$

Представление Лакса — это условие совместности переопределенной системы линейных задач $L\psi=E\psi$, $L_2\psi=A\psi$. Вообще, идея метода обратной задачи заключается в том, чтобы идти не от уравнения, а в обратную сторону: исходя из функции ψ строить оператор и решение.

Коль скоро мы договорились для начала рассматривать самые простейшие решения лаксовых уравнений (когда u — константа), очень просто решить линейное дифференциальное уравнение. Решение — экспонента. Тогда собственные значения будут полиномами. Если взять собственную функцию $\psi=e^{px}$, то $E(p)=p^n+u_{n-2}p^{n-2}+\ldots+u_0$ (символ соответствующего дифференциального оператора). Уравнение Уизема записывается в виде $\partial_i E=\{E_+^{i/n},E\}$; здесь $\{f,g\}=f_pg_x-f_xg_p$ — скобка Пуассона. Мы будем выражать $u_i(X,T)$ через медленные переменные $X=\epsilon x$ и $T=\epsilon t$.

Появление индекса i здесь не случайно. Каждое интегрируемое уравнение возникает не само по себе, а как часть большой иерархии — целой совокупности коммутирующих с ним интегралов. Это в духе интегрируемости по Лиувиллю: если есть набор интегралов в инволюции, то каждый из них, рассматриваемый как гамильтониан, порождает свою гамильтонову динамику. То, что интегралы в инволюции, означает, что соответствующие динамики коммутируют.

Объясню теперь, что такое $E_+^{i/n}$. Запишем лорановское разложение $E^{1/n}(p)=p+\sum v_ip^{-i}$. Тогда $E^{i/n}(p)=p^i+\ldots+O(p^{-1})$; $E_+^{i/n}$ означает, что здесь берутся только неотрицательные степени p, т. е. нужно вычеркнуть $O(p^{-1})$. Получаем полином, коэффициенты которого — полиномы от u. Поэтому получается замкнутая система уравнений — бездисперсионный предел лаксовых уравнений. В простейшем случае, если $E=p^2+u$ и $i=3$, то получаем уравнения Римана—Хопфа, которые я записывал раньше.

Как выглядит общая процедура решения для бездисперсионного предела? Рассмотрим пространство пар (Q,E), где полиномы E и Q имеют вид соответственно: $p^n+u_{n-2}p^{n-2}+\ldots+u_0$ и $Q=b_0p+\ldots+b_{m-1}p^m$. На этом пространстве можно ввести координаты Уизема $T_i=\frac{1}{i}\operatorname{res}_\infty(E^{-i/n}QdE)$. Так определенные T_i являются функциями от u и b (от b они зависят линейно, а от u полиномиально). Эти T_i обращаются в нуль при больших i; ненулевых T_i ровно столько, сколько нужно. Локально T_i как функции от u и b можно обратить и получить функции $u(T)$, $b(T)$. Подставив эти значения $u(T)$ в E, получим функцию $E(T)$. Утверждение таково: $E(T)$ — решение уравнения бездисперсионной иерархии. При этом Q, вроде бы, выступает как некий вспомогательный объект. Но $Q(T)$ тоже решение того же самого уравнения с тем же самым гамильтонианом, а именно, $\partial_i Q = \{E_+^{i/n}, Q\}$. Более того, оказывается, что всегда $\{Q, E\} = 1$. Уравнение $\{Q, E\} = 1$ называют *струнным уравнением*.

В отличие от обычной иерархии лаксовских уравнений, в бездисперсионном пределе выживает только одно решение: все решения параметризуются разными высшими временами; общее решение удовлетворяет подходящему струнному уравнению.

Бездисперсионная наука была известна уже несколько лет, когда появилась работа Дирграфа, Верлинде и Виттена, которые занимались совсем другой задачей — классификацией топологических моделей теории поля. Решая эту задачу, они написали те же самые формулы совершенно в другом контексте. Стало ясно, что за всей этой бездисперсионной наукой скрывается еще один очень важный элемент, который теперь называют тау-функцией. Вся структура, связанная с бездисперсионным пределом уравнения КдФ или общего лаксовского уравнения, закодирована в одной функции

$$F(t) = \frac{1}{2}\operatorname{res}_\infty(T_i k^i dS).$$

Здесь $dS = QdE = \sum\limits_{i=1}^{\infty} T_i dk^i + O(k^{-1})$ и $k = E^{1/n}(p) = k(p) = p + O(p^{-1})$. Я напомню, что мы имеем дело со случаем кривой рода 0; отмеченную точку можно загнать на бесконечность. Единственный выживающий параметр — локальная координата p. Можно проверить, хотя это и далеко не очевидно, что производные функции F по временам T_i дают все остальные коэффициенты. Например, $\partial_i F = \operatorname{res}_\infty(k^i\, dS)$ и $\partial^2_{ij} F = \operatorname{res}_\infty(k^i\, d\Omega_j)$, где $\Omega_j = E_+^{j/n}$. Есть совершенно замечательная формула

$$\partial^3_{ijk} F = \sum_{q_s} \operatorname{res}_\infty\Big(\frac{d\Omega_i\, d\Omega_j\, d\Omega_k}{dQ\, dt}\Big),$$

где суммирование ведется по критическим точкам полинома E: $dE(q_s) = 0$.

Теперь я хочу вернуться к исходной задаче о конформных отображениях. Я буду рассматривать только случай областей, ограниченных аналитическими кривыми. Внутреннюю область обозначим D, а внешнюю $\overline{D}$. Меня будут интересовать однолистные конформные отображений внешности единичного круга на $\overline{D}$. Для чтения на эту тему я хочу рекомендовать книгу Варченко и Этингофа (А.Н.Варченко, П.И.Этингоф. Почему граница круглой капли превращается в инверсный образ эллипса. М.: Наука, 1995). Там построено много красивых конкретных примеров конформных отображений, которые связаны со следующей задачей, возникающей в нефтяной отрасли. Представьте себе, что область — это месторождение нефти. Имеется несколько скважин, через которые нефть откачивают. Тогда область как-то деформируется. Уравнение, описывающее динамику границы области таково. Пусть Φ — решение уравнения

$$\Delta\Phi = \sum q_i \, \delta(z - z_i)$$

с нулевым граничным условием: $\Phi|_{\partial D}$. Тогда $\operatorname{grad}\Phi$ — скорость движения границы.

Эта задача в каком-то смысле интегрируема. Оказывается, что конечная форма капли не зависит от того, в каком порядке производится откачивание нефти через скважины, как и полагается для коммутирующих потоков. Результат зависит только от того, сколько нефти откачано через каждую скважину; в каком порядке это делается — не имеет значения.

Основной вклад в эту науку внес Ричардсон, который обнаружил бесконечный набор интегралов. О них мы сейчас и поговорим.

Довольно просто доказать, что любая область (односвязная или неодносвязная) полностью задается своими гармоническими моментами. Гармонические моменты области D определяются следующим образом. Пусть $u(x, y)$ — гармоническая функция. Тогда гармонический момент равен

$$t_u = \iint_D u(x, y) \, dx \, dy.$$

Если область меняется, то меняется гармонический момент для некоторой функции. Это локальное утверждения. Гармонические моменты — локальные координаты.

Не обязательно рассматривать все гармонические моменты; можно ограничиться некоторыми функциями. Например, набор функций

$$t_n = \iint_D z^{-n} \, dz \, d\bar{z}, \quad n \geqslant 1,$$

вместе с функцией

$$t_0 = \iint_{\overline{D}} dz \, d\bar{z},$$

где $\overline{D}$ — внешняя область, для односвязной области является локальным набором координат.

Основное наблюдение, которое сделали Вигман и Забродин, таково. Рассмотрим еще моменты дополнения

$$u_n = \iint_{\overline{D}} z^n \, dz \, d\bar{z}.$$

Ясно, что функции v_n выражаются через $t_0, t_1, \ldots$ Оказывается, что при этом

$$\frac{\partial v_n}{\partial t_m} = \frac{\partial v_m}{\partial t_n}.$$

Это означает, что существует функция $F(t)$, для которой $\partial_n F(t) = v_n$. При этом оказывается, что $\partial_0 \partial_n F$ — коэффициенты разложения однолистной функции, осуществляющей конформное отображение. Предполагается, что эта функция нормирована следующим образом. В дополнении к единичному кругу есть координата w, а в $\overline{D}$ — координата z. Мы рассматриваем отображение внешностей и предполагаем, что бесконечность переходит в бесконечность и, более того, $z = w + O(w^{-1})$. В таком случае $w(z) = z + \sum (\partial_0 \partial_n F) z^{-n}$. Снова оказывается, что все конформные отображения закодированы одной функцией. Эта функция та же самая, о которой я говорил раньше.

Прежде всего я хочу дать новое доказательство того, что локально координаты t_n являются полной системой координат. Из этого доказательства будет видно, как это все связать с бездисперсионной наукой.

Мне потребуется понятие функции Шварца. Локально гладкую кривую можно задать в виде $y = f(x)$. В комплексном виде это можно записать так: $\bar{z} = S(z)$. Функцию S называют функцией Шварца. Например, для единичной окружности получаем уравнение $\bar{z} = z^{-1}$.

Для вещественно аналитической кривой (без углов) функцию S можно продолжить до комплексно аналитической функции в малой окрестности кривой.

Первое утверждение, которое я хочу доказать, таково. Предположим, что контур деформируется, т.е. имеется семейство функций Шварца $S(z,t)$, где t — параметр деформации. Тогда если при такой деформации не изменяются все гармонические моменты t_n, то кривая неподвижна, т.е. деформация тривиальна.

Утверждение: 1-дифференциал $S_t(z,t)\,dz$ чисто мнимый на контуре ∂D, т.е. все его значения на касательных к контуру векторах чисто мнимые. Это легко следует из определения функции Шварца.

Следующее **утверждение** уже использует специфику рассматриваемых координат t_n. Если $\partial_t t_n = 0$, то голоморфный дифференциал $\partial_t S \, dz$, определенный в малой окрестности кривой, продолжается до голоморфного дифференциала на всей внешности.

Прежде чем доказывать второе утверждение, я объясню, как из этих двух утверждений следует то, что нужно. Если есть любая область $D \subset \mathbb{C}$ с координатой z, то по ней можно построить замкнутую риманову поверхность. Для этого нужно взять другой экземпляр той же самой области с координатой $\bar{z}$ и склеить их по границе. Полученную риманову поверхность называют дублем Шоттки. Воспользуемся принципом симметрии Шварца: если есть функция, аналитическая в верхней полуплоскости и вещественная на вещественной оси, то ее можно аналитически продолжить в нижнюю полуплоскость. У нас есть голоморфный дифференциал в D. Он продолжается на комплексное сопряжение, потому что на границе он чисто мнимый. В результате получаем голоморфный дифференциал на сфере. Но на сфере нет голоморфных дифференциалов, отличных от нуля.

Займемся доказательством утверждения о том, что голоморфный дифференциал $\partial_t S\, dz$ продолжается на всю внешность. Интеграл Коши позволяет представить любую функцию на гладком контуре в виде разности функции, голоморфной во внешности, и функции, голоморфной во внутренности. Пусть

$$\widehat{S}(z) = \oint_{\partial D} \frac{\partial_t S(w)\, dw}{z - w}.$$

Функция $\widehat{S}(z)$ голоморфна вне контура и продолжается на границу и $S^{+} - S^{-} = \partial_t S$. Если начало координат находится внутри области и $|z| < |w|$, то

$$\widehat{S}(z) = \sum z^n \oint_{\partial D} \partial_t S(w) w^{-n}\, dw = \sum z^n \partial_t t_n,$$

потому что по теореме Стокса

$$t_n = \iint_D z^n\, dz\, d\bar{z} = \oint_{\partial D} z^{-n} \bar{z}\, dz.$$

Если не меняются моменты, то коэффициенты разложения S тождественно нулевые. Поэтому функция S^{-} тождественный нуль в некоторой окрестности. Но эта функция аналитическая, поэтому она тождественно равна нулю. Чтобы $\partial_t S\, dz$ был голоморфным, нужно чтобы еще один коэффициент был нулевым. Потому что мы умножили эту функцию на dz, а этот дифференциал имеет полюс второго порядка.

Теперь ясно, что изменится, если мы будем дифференцировать по t_n. Это утверждение было для любой переменной. Коэффициенты разложения теперь будут не всюду тождественными нулями; один из коэффициентов будет ненулевым. Это означает, что, например, $\partial_{t_0} S\,dz$ — мероморфный дифференциал с простым полюсом на бесконечности. Такой дифференциал только один. Поэтому мы доказали, что $\partial_0 \bar z\,dz = \dfrac{dw}{w}$. Здесь мы дифференцируем $\bar z$ при постоянном z. Эквивалентная запись такова:

$$\{z(w,t_0), \bar z(w,t_0)\} = 1.$$

У нас получился мероморфный дифференциал с простым полюсом. Когда мы возьмем дубль, по принципу симметрии возникнет второй полюс. Возникнет дифференциал, который имеет вычет ± 1 в двух точках. Это глобальное свойство, как теорема Лиувилля. Если есть аналитическая функция на компактной поверхности, то она — константа. Эти два факта позволяют использовать глобальные свойства. Первый факт позволяет с области с границей переходить на компактную поверхность. А второй факт, и это уже требует специальных свойств, позволяет это аналитически продолжать до мероморфного объекта.

Это утверждение про нулевой момент. А утверждение про все остальные моменты выглядит следующим образом: $\partial_n \bar z\,dz = dz_+^n$. Здесь используются такие обозначения. Пусть $z(w) = w + \ldots$ Тогда $z^n(w) = w^n + \ldots$ Плюс означает, что берется только положительная часть (полином на сфере).

Меня могут спросить, почему дифференциал имеет полюс только в одной точке, хотя по принципу симметрии он должен иметь полюс и в симметричной точке. Но функции t_n не аналитические; это функции и от вещественной и от мнимой части: $t_n = x_n + iy_n$. При этом

$$\frac{\partial}{\partial t_n} = \frac{\partial}{\partial x_n} - i\,\frac{\partial}{\partial y_n}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial x_n}\,\bar z\,dz = dz_+^n - d\bar z_+^n$$

и

$$\frac{\partial}{\partial y_n}\,\bar z\,dz = i(dz_+^n + d\bar z_+^n).$$

Дело в том, что можно писать иерархии по t_n и по комплексно сопряженной переменной $\bar{t_n}$. Получается линеаризованная цепочка Тодда.

Можно написать замечательную формулу:

$$F(t) = -\frac{t_0^2}{2} + \sum_{n\geqslant 0}(n-2)(t_n v_n + \bar{t_n}\bar v_n).$$

Эта формула содержит массу нетривиальных тождеств. Например, тождество $\partial_n F = v_n$ выглядит почти наивно. Но сами v_n зависят от t_n загадочным образом. Когда эти зависимости подставишь и продифференцируешь, то получается как раз v_n.

Функцию F можно явно вычислить для эллипса:

$$F = \frac{1}{2} t_0^2 \ln t_0 - \frac{3}{4} t_0^2 - \frac{1}{2} \ln(1 - 4|t_2|^2) + t_0 \frac{|t_1|^2 + t_1^2 \bar{t}_2 + \bar{t}_1^2 t_2}{1 - 4 t_2 \bar{t}_2}.$$

Этот пример показывает, как F зависит от первых трех моментов. (У дополнения к эллипсу только три ненулевых момента.)

Для неодносвязных областей первое утверждение (о производной функции Шварца) остается справедливым. Второй факт опирался на суммирование геометрической прогрессии для интеграла Коши. В конце 80-х годов мы с Новиковым, занимаясь оператором квантования бозонных струн, построили теорию Лорана—Фурье на произвольной римановой поверхности. Базис z^n заменяется на другой базис.

Написанная формула симметрична по t и v. Это наводит на мысль попытаться применить ее к старой классической задаче. Как по однолистному конформному отображению дополнений построить отображение самих областей? Например, отображение дополнения эллипса на дополнение круга — простая алгебраическая функция. А отображение внутренности эллипса на внутренность круга задается эллиптической функцией. Так что связь между этими отображениями нетривиальна.