Ю. И. Манин

Лекция 1 октября 1997 года

Рациональные кривые, эллиптические кривые и уравнение Пенлеве

Я хочу рассказать одну историю, которая, как мне кажется, может быть поучительна в разных отношениях. Это, с одной стороны, попытка решить совсем свежую задачу. С другой стороны, при этом выясняется, что пользоваться нужно очень классическими вещами, которые были сделаны в начале века, в первой трети, потом интерес к ним как-то пропал. Они были забыты, потом снова возобновились по совершенно другим причинам, и так далее.

Это история, в которой попытка решения задачи является полуудачей. Начав с каким-то удовольствием работать —бежать, бежать по горячему следу, как гончая, ты до чего-то добегаешь, но тем не менее, задача, махнув хвостиком, скрывается где-то за поворотом. Так что есть, что делать дальше. Я очень надеюсь, что тем, кто не сможет или не захочет следить за всей математикой, будет интересно проследить за побочными вещами. А из тех, кто захочет следить за математикой, будет кое-кому интересно подумать и над самой задачей.

Задача, о которой я говорю, на техническом языке относится к попытке понять, как устроен потенциал квантовых когомологий проективной плоскости. Что это такое, я сейчас просто напишу в явном виде. Проективная плоскость, скажем, над комплексным полем, производит трехмерное пространство своих когомологий, которое натянуто на классы когомологий всей большой клетки, гиперплоского сечения и точки. В этом трехмерном пространстве есть координаты, которые я обозначу x, y, z:

$$H^*(\mathbb{P}^2, \mathbb{C}) = \{x\Delta_0 + y\Delta_1 + z\Delta_2\}.$$

Теория квантовых когомологий производит один формальный ряд (квантовый потенциал этих когомологий), который устроен следующим образом:

$$\Phi(x,y,z) = \frac{1}{2}(xy^2 + x^2 z) + \sum_{d=1}^{\infty} N(d) \frac{z^{3d-1}}{(3d-1)!} e^{dy},$$

где $N(d)$ —количество рациональных кривых степени d на плоскости, которые проходят через $3d-1$ точку в общем положении. $N(1)$ — количество прямых, проходящих через две точки, т. е. 1. $N(2)$ —количество коник, проходящих через 5 точек; это тоже 1. Попробуйте проверить, что $N(3) = 7$; это уже немножко сложнее. То, что у этой задачи число решений конечно, легко проверяется счетом констант: кривая задается параметрами, потом на эти параметры накладываются линейные условия (прохождение через данные точки). Не так уж это просто сделать, тем не менее, чуть-чуть алгебраической геометрии позволяет провести это рассуждение правильно.

Поразительно, что эти числа $N(d)$ удовлетворяют совсем нетривиальным билинейным соотношениям, которые позволяют последовательно выразить их одно через другое.

Если из $\Phi(x,y,z)$ убрать классический остаточек $\frac{1}{2}(xy^2+x^2z)$, смысл которого я объяснял вчера на лекции в Московском Математическом обществе, получим функцию

$$\varphi(y,z) = \sum_{d=1}^{\infty} N(d) \frac{z^{3d-1}}{(3d-1)!} e^{dy},$$

которая от x уже не зависит. Теорема, доказанная Максимом Концевичем несколько лет назад, и из обдумывания которой вышла наша с ним работа по квантовым когомологиям, выглядит следующим образом.

Теорема 1 (Концевич). *Функция φ удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\varphi_{zzz} = \varphi_{yyz}^2 - \varphi_{yyy}\varphi_{yzz}.$$

Это одно уравнение эквивалентно всем уравнениям ассоциативности для функции $\Phi(x,y,z)$. (Уравнения ассоциативности состоят в том, что третьи частные производные функции $\Phi(x,y,z)$ являются структурными константами некоторой ассоциативной алгебры.)

Это же уравнение эквивалентно также следующей рекуррентной формуле:

$$N(d) = \sum_{k+l=d} N(k)N(l)k^2 l \left[l\binom{3d-4}{3k-2} - k\binom{3d-4}{3k-1} \right]$$

при $d \geq 2$ и $N(1) = 1$.

Если вы забудете про приведенную выше интерпретацию чисел $N(d)$, то эквивалентность трех формулировок легко проверяется прямым вычислением. Но доказательство того, что так определенные числа $N(d)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению, —это факт из алгебраической геометрии, который требует довольно крупной возни. Хотя, если разрешить себе махать руками, его можно доказать довольно правдоподобным образом.

Задача, которую я имею в виду и которая дразнит меня до сих пор, заключается в том, чтобы понять аналитическое поведение функции φ. Формальным рядом она задается в окрестности нуля. Несложно показать, что у нее есть ненулевая область сходимости. А дальше непонятно: у нее появляются особенности, но неясно, какого они типа. И вообще, непонятно, что это за функция. Может быть, это что-то знакомое: решение гипергеометрического уравнения, или дзета-функция, или модулярная функция. Скорее всего, ни то, ни другое, ни третье. Из попыток понять, что это за функция, как раз и возникла та работа, о которой я хочу рассказать.

Дифференциальное уравнение для функции φ, хотя и простое, но оно какого-то неклассического вида. Было, однако, известно, что это дифференциальное уравнение можно довольно заковыристыми нелинейными заменами переменных свести к одному из классических уравнений, которые называются «Пенлеве-шесть». Эти уравнения образуют четырехпараметрическое семейство, зависящее от параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Для них имеется стандартное обозначение $\mathrm{PVI}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$, которое держится уже почти 100 лет:

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{X} + \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X-t}\right)\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{X-t}\right)\frac{dX}{dt} + \\ + \frac{X(X-1)(X-t)}{t^2(t-1)^2}\left(\alpha + \beta\frac{t}{X^2} + \gamma\frac{t-1}{(X-1)^2} + \delta\frac{t(t-1)}{(X-t)^2}\right).$$

Я пропущу здесь объяснение того, каким образом и почему исходное уравнение сводится к PVI, а посвящу оставшееся время попытке понять, что же из этого следует для исходной загадочной функции.

В начале века Пенлеве занялся такой задачей классификации. Рассмотрим дифференциальное уравнение, для начала, скажем, такого вида:

$$\frac{dy}{dt} = F(y, t)$$

с начальным условием $y(t_0) = c$. При этом функция F комплексно аналитическая. Вы начинаете аналитически продолжать решение и смотрите, где вы наткнетесь на особенность. Особенность может быть разных типов: может быть обыкновенный полюс, может быть точка ветвления, а может быть существенно особая точка. Положение этой особенности, вообще говоря, зависит от того, какую начальную константу c вы подставите. Здесь бывают разные ситуации: некоторые особенности могут двигаться, а некоторые могут быть неподвижными. Вопрос был такой. (Смысл его мне до сих пор не очень понятен, но, видимо, была какая-то внутренняя логика развития анализа к тому времени, когда этот вопрос был поставлен.) Хочется понять, какие бывают дифференциальные уравнения, у которых двигаться могут только полюсы, а всё существенное (существенно особые точки и точки ветвления) от c не зависит. Оказалось, что при малых порядках уравнения (при первом и даже при втором) ответ на этот вопрос приводит к классификации: можно написать не слишком большое семейство уравнений, к которым всё сводится заменами. С первым порядком всё просто, ответ был давно известен. А со вторым порядком долго мучился Пенлеве и его ученики. И когда Пенлеве написал свою окончательную работу по этому вопросу, он PVI пропустил. Вычисления были жуткие, он сделал ошибку в вычислениях. Не позже чем через год ошибку обнаружили. Первым правильно написал PVI Гамбье (B. Gambier, 1906). Вторым был Фукс, который сделал это независимо от Гамбье и совсем из других соображений.

Пропустить PVI чрезвычайно обидно, потому что в некотором смысле слова начальная часть списка состоит из классических уравнений. И вот впервые появляется неклассическое уравнение. В этом списке неклассических уравнений PVI самое общее, остальные получаются в некотором роде специализацией и предельными переходами. Пенлеве из-за своей ошибки пропустил не специальное уравнение, а общее, самое общее уравнение. Но это может случиться с каждым, и я вообще призываю вас не относиться сурово к ошибкам в хороших работах. Сам факт, что работа поставила правильный вопрос, дала полуправильный ответ и стимулировала дальнейшие исследования, много важнее, чем то обстоятельство, что автор допустил ту или иную ошибку. Все мы люди, и находящий какую-то поддержку современный американский обычай, что человеком, доказавшим теорему, считается тот, кто исправил последнюю ошибку в чужом доказательстве, я чрезвычайно не одобряю. Это неправильно и ведет к неправильному отношению к математике, как мне кажется.

Итак, вот у нас есть уравнение Пенлеве-шесть, написанное на самом деле Гамбье и Фуксом (сыном знаменитого Фукса; его статья, в каком-то смысле, посвящена работам отца, и он о них отзывается очень уважительно). Что более интересно в статье Фукса (которую я читал с огромным удовольствием и которую я должен был прочесть 20 лет назад, но просто не знал о ее существовании), так это то, что он получил это семейство уравнений совсем не таким способом, как Пенлеве. Способ Фукса мне намного ближе. Точнее говоря, Фукс получил эти уравнения двумя способами. Первый способ —это так называемые изомонодромные деформации линейных дифференциальных уравнений, но не будем на этом останавливаться. Другой способ связан с тем, что он обнаружил, что это семейство уравнений можно записать в более приятном виде и очень геометрически.

Глядя на уравнение PVI, если вы когда-нибудь работали с эллиптическими кривыми, вы сразу поймете, что здесь должна играть какую-то роль кривая

$$Y^2 = X(X-1)(X-t).$$

Но не вполне понятно, какую именно роль: уравнение выглядит довольно противно. И вот что сделал Фукс, так это то, что он записал это уравнение в совершенно замечательном виде, который я как только увидел, так сразу почти что подпрыгнул.

Прежде чем продолжать историю PVI, я хочу напомнить, с чего мы начали. У нас имеется четырехпараметрическое семейство уравнений плюс еще два параметра, проистекающие из начальных условий. Итого у нас имеется шестипараметрическое семейство функций, среди которых содержится функция, описывающая квантовый потенциал $\mathbb{P}^2$, с которой я начал. Что бы мы хотели сделать, чтобы описать эту функцию? Мы хотели бы вычислить, какие константы относятся к квантовому потенциалу и какие начальные условия. А уж потом, когда мы всё это вычислим, тогда можно посмотреть, что говорит уравнение Пенлеве про функцию с такими константами и такими начальными условиями. К сожалению, априори должна быть надежда только на какую-то удачу. И это еще один интересный сюжет, связанный с историей PVI. Много сил было потрачено на точную формулировку и доказательство утверждения, которое Пенлеве формулировал так: «Почти все решения этой новой системы уравнений являются неклассическими функциями.» Это трудно сформулировать, трудно доказать и трудно поверить в то, что это утверждение полезно. Действительно, нужно дать точное определение того, что такое классическая функция. Вы определяете итеративный процесс: те функции, которые у вас уже были, разрешается брать в качестве коэффициентов нового линейного дифференциального уравнения; решения этого уравнения можно добавить. Потом их ещё разрешается брать в качестве коэффициентов алгебраического уравнения, и решения этого уравнения тоже разрешается добавить. Но вы никогда не знаете, не пропустили ли вы какую-нибудь важную операцию. Например, мне кажется, что при формулировке и доказательстве этой теоремы пропустили важнейшую операцию —взятие обратной функции. Но так или иначе, общая вера состоит в том, что большинство трансцендентностей Пенлеве являются какими-то новыми функциями. Тем не менее, не исключено, что та самая одна-единственная функция, которая нас интересует, классической всё-таки является. Потому что среди решений PVI известно огромное число классических функций. Это создает некоторый азарт. Нас интересует одна точка в шестимерном пространстве. Мы хотим узнать её аналитический смысл и не знаем окончательного ответа. Это именно то, что я имел в виду, когда говорил от том, что бежишь, вроде бы, по правильному следу, но задачка махнула хвостиком и скрылась за поворотом.

Теперь я возвращаюсь к теореме Фукса (1907). Рассмотрим интеграл

$$\int_{\infty}^{(X,Y)} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-t)}}.$$

Он определен лишь с точностью до интеграла по замкнутому контуру на эллиптической кривой, отвечающей заданному значению t, т. е.определен с точностью до периода. Периоды эллиптической кривой удовлетворяют линейному дифференциальному уравнению, поэтому неопределенность интеграла можно снять, применив дифференциальный оператор. Давайте так и поступим и напишем уравнение

$$t(t-1)\left[t(t-1)\frac{d^2}{dt^2}+(1-2t)\frac{d}{dt}-\frac{1}{4}\right]\int_{\infty}^{(X,Y)} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-t)}} =$$
$$= \alpha Y + \beta\frac{tY}{x^2} + \gamma\frac{(t-1)Y}{(x-1)^2} + \left(\delta-\frac{1}{2}\right)\frac{t(t-1)Y}{(x-t)^2},$$

где $Y^2 = X(X-1)(X-t)$. Это уравнение эквивалентно предыдущей записи PVI.

Эта запись лучше потому, что левая часть приобретает теперь совершенно прозрачный алгебро-геометрический смысл, и известен очень широкий контекст, в котором такие уравнения можно обобщать —в отличие от уравнений Пенлеве, которые вкладываются естественным образом в совершенно другой контекст.

Вот эта штука уводит задачу совершенно в другую область —в область алгебро-геометрическую, что приятно: исходная задача была алгебро-геометрической, мы вложили ее в какие-то нелинейные диффуры, а потом снова вернули в алгебраическую геометрию.

Я люблю смотреть на это уравнение как на неоднородное уравнение Пикара-Фукса. Уравнением Пикара-Фукса называется уравнение следующего типа. У вас есть семейство торов, или кривых, или алгебраических многообразий, и вы берете их периоды по замкнутым циклам, которые зависят от параметра. Эти периоды как функции от параметра удовлетворяют однородным линейным дифференциальным уравнениям, в правой части которых стоит нуль. Оказывается, что если в правой части поставить не нуль, а то, что написано выше, то получится уравнение Пенлеве.

То, что я вслед за этим сделал, нужно было сделать много-много лет тому назад. Я не понимаю, почему этот сюжет не развивался дальше. Если вы получили такую эллиптическую кривую, то совершенно очевидно, что можно пересчитать это уравнение на другие геометрические представления того же самого объекта. И самое естественное геометрическое представление того же самого объекта, конечно же, такое. Вы заменяете плоскость t на верхнюю полуплоскость τ, интерпретируя точку верхней полуплоскости как образующую решетки периодов тора. Над точкой τ тогда растет тор $\mathbb{C}/\langle 1,\tau\rangle$. Дифференциал превращается просто в дифференциал dz. Интеграл становится просто равным z. Поэтому, не производя никакого пересчета, мы знаем, что написанный выше дифференциальный оператор превращается в $d^2/d\tau^2$. Дело в том, что тот оператор был второго порядка и аннулировал два периода. У нас периоды 1 и τ, поэтому аннулирующий их оператор и есть $d^2/d\tau^2$. Поэтому вся левая часть превращается в $d^2/d\tau^2$ —видите, как резко она сокращается. Правая часть не вполне тривиальна. Для того чтобы написать ответ, нужно воспользоваться серией классических формул из теории эллиптических функций. Но давайте я сразу напишу ответ, он совсем не сложен:

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} = \frac{1}{(2\pi i)^2}\sum_{j=0}^{3}\alpha_j \wp_z\left(z+\frac{T_j}{2},\tau\right).$$

Здесь T_j —периоды $(0,1,\tau,1+\tau)$; константы α_j —те же самые, но только правильно нормированные: $(\alpha_j) = (\alpha,-\beta,\gamma,1/2-\delta)$; $\wp_z$ —производная по z функции Вейерштрасса

$$\wp(z,\tau)=\frac{1}{z^2}+\sum_{m,n}{}' \left(\frac{1}{(z+m\tau+n)^2}-\frac{1}{(m\tau+n)^2}\right).$$

Функция Вейерштрасса —это простейший ряд, который можно соорудить из z и τ, чтобы он допускал 1 и τ в качестве периодов.

Такой вид уравнения Пенлеве я лично уже в состоянии запомнить; он достаточно прост. Почему этот вид уравнения Пенлеве не был известен до моей работы —для меня абсолютная и полная загадка. Или, скорее, доказательство того, что интерес к уравнению Пенлеве по каким-то причинам надолго увял, а когда он возродился, люди не удосужились посмотреть на классические работы по PVI.

Чем приятна эта переформулировка, так это тем, что она позволяет сразу кое-что увидеть. Не будем забывать, что нас интересуют решения PVI, и даже если мы поверим в то, что большинство из них неклассические, то вдруг наше окажется классическим. И вообще, давайте посмотрим, есть ли классические решения. Одно из них сразу видно: если все α_j равны нулю, то мы получим уравнение $d^2z/d\tau^2=0$; его решения —линейные функции. Между прочим, при первоначальной записи уравнения этого решения не видно. На самом деле, этим простым замечанием можно воспользоваться абсолютно нетривиальным способом, по причинам, которые скрыты очень глубоко. Об этом я скажу позже.

Следствие 1. *Для* $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=(0,0,0,1/2)$ *все решения пишутся в классических функциях.*

Те из вас, кто не хотят думать геометрически, должны просто представлять себе, что переход от X,Y,t к z,τ —это просто подстановка, нелинейная замена переменных. Но, конечно, гораздо продуктивнее смотреть на это геометрически.

Прежде чем двигаться дальше, я сформулирую еще одно следствие. Классические функции Вейерштрасса удовлетворяют многим тождествам, среди которых есть так называемые тождества Ландена. Эти тождества связывают функции Вейерштрасса от аргументов z и τ и от аргументов z (с каким-то сдвигом на полупериод) и 2τ. Довольно понятно, что если заменить τ на 2τ, то мы перейдем к функциям, которые периодичны относительно несколько меньшей решетки (подрешетки индекса 2). Усреднив такие функции по полупериодам, можно снова получить функцию, которая периодична относительно первой решетки. Это и приводит к тождествам Ландена, которые я выписывать не буду. Но если посмотреть, выдерживает ли уравнение Пенлеве переход к подрешетке индекса 2, мы придем к тому, что есть неожиданные симметрии.

Следствие 2. *Если у вас есть уравнение Пенлеве с константами* $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_0, \alpha_1)$, *то оно выдерживает преобразование Ландена, и у вас получаются формулы пересчета от решений уравнения с этими константами к решениям уравнения с константами* $(4\alpha_0, 4\alpha_1, 0, 0)$.

Посчитав константы, соответствующие уравнению, отвечающему за квантовые когомологии, получим, что оно имеет совершенно очаровательный вид

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} = -\frac{1}{2\pi^2}\wp_z(z, \tau).$$

Те из вас, кто занимался симплектической геометрией и гамильтоновой механикой, глядя на это уравнение, без труда убедятся, что оно гамильтоново.

Следствие 3. *Уравнение* PVI *гамильтоново:*

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dy}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial z},$$

где

$$H = \frac{y^2}{2} - \frac{1}{(2\pi i)^2}\sum \alpha_j \wp\left(z + \frac{T_j}{2}, \tau\right).$$

Гамильтониан существенно зависит от τ (параметр τ играет роль комплексного времени).

То, что уравнение PVI гамильтоново, было в классике известно. Однако формулы были чудовищные, и совершенно непонятен их геометрический смысл. Это представление делает очевидным, что уравнение гамильтоново, и оно же позволяет разобрать его геометрический смысл. Точные формулировки я здесь опущу.

Основной общий результат о шестипараметрическом семействе решений уравнения Пенлеве —это в высшей степени загадочная симметрия, к описанию которой я сейчас перейду.

Вся надежда на симметрии состоит в том, что сколько-то классических решений мы знаем, и группа симметрий позволит их размножать. Удивительно, что группа симметрий здесь очень большая, и она абсолютно не очевидная. Эти симметрии многократно открывались и переоткрывались. Но до самого последнего времени их невозможно было понять и написать в каком-то приличном виде. К именам Шлезингера и Окамото я хочу добавить Аринкина и Лысенко. Это два ученика Дринфельда, которые написали очень приятную работу, отчасти проясняющую, что здесь происходит. Давайте я сформулирую ответ.

Я должен ввести новые параметры $a_i^2 = 2\alpha_i$. На пространстве с координатами (a_i) действует группа симметрий W, порожденная следующими преобразованиями:

а) $(a_i) \mapsto (\pm a_i)$;

б) перестановки a_i;

в) $(a_i) \mapsto (a_i + n_i)$, где $n_i \in \mathbb{Z}$ и $\sum_{i=0}^{3n_i}$ чётна.

Главная серия симметрий —*в*. Эта группа симметрий поднимается до действия во всей структуре и, в частности, переводит решения уравнения Пенлеве с одними параметрами в решения с другими параметрами.

Самое главное открытие здесь принадлежит Шлезингеру (1924). Шлезингер вложил эту задачу в серию других задач, которые теперь называются уравнениями Шлезингера, или теорией изомонодромных деформаций линейных дифференциальных уравнений. Он заложил основы этой теории, и он же обнаружил огромное число дискретных преобразований от одних уравнений к другим. Частным случаем этих преобразований является и описанная выше группа симметрий. Были потом разные физические работы, которые описали следствия из всех этих симметрий. Этим много занималась японская школа. Окамото обнаружил некоторое подмножество, на котором эти преобразования образуют группу (преобразования Шлезингера образуют лишь полугруппу и они перемешивают одни уравнения с другими —это довольно непроглядная вещь). А Окамото обнаружил, что на PVI преобразования образуют группу. Аринкин и Лысенко, о которых я только что упоминал, в каком-то смысле вернулись к идеологии Шлезингера для того частного случая уравнения на $\mathbb{P}^1$ с четырьмя особыми точками, к которому сводится уравнение Пенлеве. Они показали, что в некотором разумном смысле слова эта конструкция дает полную группу бирациональных автоморфизмов правильно определённого геометрического объекта.

Следствие 4. *Все* PVI *с* $(a_i) \in \mathbb{Z}^4$ *с четной суммой* a_i *имеют полностью классические решения.*

Действительно, это нам известно в случае $a_i = 0$.

Уравнением Пенлеве в последнее время много занимался Хитчин. В одной из его работ доказывается, что для констант $(0, 0, 0, 2)$ решения полностью классические, и приводятся явные формулы. Он не заметил, что эта точка всего лишь одна из точек бесконечной орбиты.

Добравшись до этого места своих занятий, я воспарил духом и решил, что конечно же не может быть, чтобы уравнение для квантового потенциала $\mathbb{P}^2$ не попало в эту сеть. Оно действительно почти попадает —оно лежит на середине дороги от одного классического решения к другому: в нашем случае получаются параметры $(a_i) = (0, 0, 0, 1)$, что лежит посредине между точками $(0, 0, 0, 0)$ и $(0, 0, 0, 2)$, про которые известно, что для них решения классические. А про середину дороги мы не знаем совершенно ничего. Может случиться, например, что у таких точек есть не двухпараметрическое семейство классических решений, а однопараметрическое семейство.

Вероятно, в этом месте пора сказать про недостающие два параметра. Четыре параметра —это место уравнения в иерархии, а еще два параметра —это начальные условия для той одной конкретной функции, которая меня интересует.

Мне вычислять начальные условия оказалось удобнее для самой вырожденной из всех эллиптических кривых с комплексным умножением: $\tau_0 = e^{2\pi i/3}$. Интересно, что начальное условие получилось такое: $z(\tau_0)$ —точка третьего порядка на эллиптической кривой.

На этом приходится остановиться.

Кстати, эту работу про уравнение Пенлеве-шесть я долго хотел назвать, цитируя Владимира Игоревича Арнольда, «Об одном свойстве одного решения одного дифференциального уравнения» (он применяет этот термин, как известно, к работам, которые ничего не стоят и которые нужно выбросить в мусорный ящик). Я не рискнул назвать так, сам не знаю почему.

Примечание (14 января 1998).

Уже после этой лекции я получил по электронной почте ссылку на заметку Пенлеве 1906 года, где он выводит форму своего уравнения с $\wp$-функцией Вейерштрасса. Я вздохнул с облегчением. Значит, она была открыта вовремя и просто забыта, а сто́ящие мысли, даже если их забывают, обязательно всплывают вновь.