С.В.Матвеев

Метод нормальных поверхностей Хакена и его применения к классификации 3-мерных многообразий—история одной теоремы

В развитии математики есть верстовые столбы — проблемы, при решении которых мы приходим к новым открытиям и к пониманию природы математических объектов. В топологии одна из таких проблем — классификация трехмерных многообразий. В исследовании этой проблемы были следующие важнейшие этапы:

- 1960 Хакен (Haken): чтобы понять структуру трехмерного многообразия, нужно изучать в нем двумерные поверхности $F^2 \subset M^3$. Этот метод оказался очень продуктивным. Более половины работ в трехмерной топологии, появившихся с тех пор, основаны на этом методе. Классификация достаточно больших многообразий была получена именно с помощью этого метода.
- 1980 Gabai: нужно изучать слоения — это дает информацию о многообразиях.

Рис. 1. Разрешенные пересечения

- 1980 Thurston: нужно изучать геометрии на многообразиях — гиперболические многообразия, эллиптические многообразия, солвмногообразия и т. д., всего есть 8 однородных геометрий.
- 1990 Witten: нужно рассматривать статистические суммы и с их помощью строить инварианты трехмерных многообразий.
- В последнее время усилился интерес к алгоритмической топологии. Здесь метод Хакена играет ключевую роль.

В чем заключается метод Хакена? Пытаться рассматривать все поверхности в трехмерном многообразии безнадежно — их слишком много. Даже если рассматривать поверхности с точностью до шевеления (изотопии), то их все равно слишком много. Поэтому естественно выделить некоторый класс $\mathscr{N}$ поверхностей в многообразии так, чтобы он обладал двумя свойствами:

(1) класс $\mathscr{N}$ информативен (например, в таком смысле: этот класс содержит все интересные поверхности, расположенные в данном многообразии);

(2) класс $\mathscr{N}$ имеет явное описание.

Обозначение $\mathscr{N}$ связано с названием «нормальная поверхность». Теперь я объясню, что такое нормальная поверхность. В дальнейшем всегда предполагается, что многообразие M^3 триангулировано, т. е. разбито на тетраэдры так, что любые два тетраэдра либо не пересекаются, либо пересекаются по вершине, ребру или грани. Грубо говоря, нормальная поверхность (относительно фиксированной триангуляции) определяется так: она пересекает все тетраэдры триангуляции хорошим образом.

Сначала я скажу, как нормальная поверхность может пересекать тетраэдры, а потом перечислю запрещенные пересечения.

Поверхность может пересекать тетраэдр по треугольнику (или нескольким параллельным копиям треугольника) и по прямоугольнику (рис. 1). Для каждого тетраэдра есть 4 типа треугольников (каждый

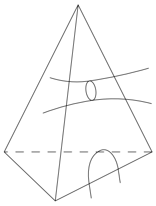

Рис. 2. Запрещенные пересечения

тип соответствует одной из граней) и 3 типа прямоугольников (каждый тип соответствует одной из пар противоположных ребер).

Поверхности запрещается входить в тетраэдр в виде трубочки и запрещены «возвраты» (рис. 2).

Требуется, чтобы каждая связная компонента поверхности пересекала ребро не более одного раза.

Более того, пересечение поверхности с каждым тетраэдром должно состоять из дисков, причем край каждого диска должен пересекать каждое ребро не более одного раза. Сама поверхность может при этом пересекать ребро много раз.

Теперь я могу объяснить, почему класс нормальных поверхностей информативен, т. е. содержит все интересные поверхности. Сначала нужно выяснить, какие поверхности неинтересные. К неинтересным поверхностям относятся все поверхности, расположенные в $\mathbb{R}^3$, потому что такие поверхности есть во всех трехмерных многообразиях.

Нужно запретить все поверхности «с трубочками» (рис. 3). Трубочка характеризуется тем, что есть диск, который пересекает поверхность в точности по своему краю, и это пересечение не ограничивает диска на поверхности. Такие диски называют *сжимающими*. Это название связано с тем, что сжимающий диск можно сильно сжать и тем самым упростить поверхность (перерезать ее по диску). Несжимаемая поверхность в M^3 — это поверхность, для которой нет сжимающих дисков.

Многообразие M^3 называют *неприводимым*, если любая вложенная сфера $S^2 \subset M^3$ ограничивает шар. Любое трехмерное многообразие является связной суммой неприводимых, кроме многообразия $S^2 \times S^1$, которое неприводимо, но не является нетривиальной связной суммой. Поэтому если мы поймем, как устроены неприводимые трехмерные многообразия, то мы поймем, как устроены все трехмерные многообразия.

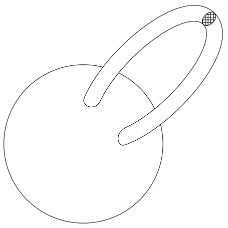

Рис. 3. Поверхность с трубочкой

Теорема 1. *Любая замкнутая несжимаемая поверхность в неприводимом многообразии M^3 изотопна нормальной поверхности.*

Доказательство. Возьмем произвольную замкнутую несжимаемую поверхность и приведем ее в общее положение относительно тетраэдров триангуляции. Если есть запрещенная ситуация (трубка, пересекающая грань тетраэдра по окружности), то тогда есть и сжимающий диск D. Поверхность несжимаемая, поэтому край ∂D этого диска ограничивает диск D' в поверхности, см. рис. 4. Так как многообразие неприводимо, то сфера $D \cup D'$ ограничивает шар, который можно втащить в тетраэдр или вытащить из него. После этого запрещенное пересечение будет уничтожено.

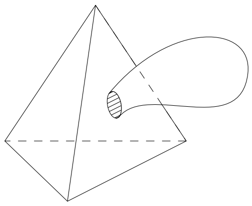

Рис. 4. Устранение пересечения с гранью

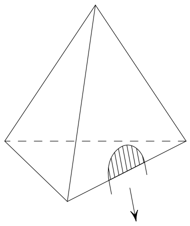

Рис. 5. Устранение пересечения с ребром

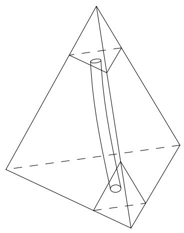

Рис. 6. Устранение «трубочки»

Если есть запрещенная ситуация, изображенная на рис. 5, то тогда пересечение такой компоненты сферы с тетраэдром устраняется очевидным образом, с помощью изотопии поверхности.

Далее, если внутри тетраэдра есть трубочка, соединяющая два треугольных сечения (рис. 6), то эту трубочку можно уничтожить, снова воспользовавшись несжимаемостью поверхности.

Все остальные случаи разбираются аналогично. □

Таким образом, первое условие выполнено: класс $\mathscr{N}$ информативен.

Теперь нужно проверить, что второе условие тоже выполняется. Для этого нужно явно описать класс всех нормальных поверхностей. Каждую нормальную поверхность можно задать целочисленным вектором. Это делается так. В каждом тетраэдре есть 7 разрешенных типов пересечений. Обозначим все возможные типы пересечений (со всеми тетраэдрами) $E_1, \dots, E_n$; здесь $n = 7t$, где t — количество всех тетраэдров в триангуляции. Тогда поверхности F можно сопоставить целочисленный вектор $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где x_i — количество треугольников или прямоугольников типа E_i в пересечении поверхности с тетраэдрами. Легко видеть, что если все числа известны, то по ним поверхность восстанавливается однозначно: участки поверхности можно состыковать лишь одним способом. Но при этом не любому набору чисел соответствует поверхность. Например, набору $(1, 0, \dots, 0)$ не может соответствовать (замкнутая) поверхность.

Выясним, какие векторы реализуются поверхностями. Рассмотрим тетраэдр, выделим одну его грань, и у этой грани выделим один из трех углов. Проведем отрезок, соединяющий стороны этого угла. Этот отрезок может принадлежать одному треугольному сечению типа E_i и одному прямоугольному сечению типа E_j. Выделенная грань принадлежит еще ровно одному другому тетраэдру. В нем рассматриваемый отрезок может принадлежать сечениям типа E_k и типа E_m. В результате получаем соотношение $x_i + x_j = x_k + x_m$. Кроме того, если поверхность вложенная, то ни в одном тетраэдре не может быть прямоугольных сечений разного типа (такие сечения всегда пересекаются); решения полученной системы уравнений будем называть допустимыми, если у него нет одновременно двух ненулевых x_i, относящихся к разным типам прямоугольных сечений одного и того же тетраэдра.

Теорема 2. *Множество всех нормальных поверхностей находится во взаимно однозначном соответствии с множеством допустимых целых неотрицательных решений описанной выше системы уравнений.*

Доказательство этой теоремы очень простое; я не буду на нем останавливаться.

Количество уравнений в системе равно $6t$, поэтому система недоопределенная. У нее должно быть много решений. Важное наблюдение Хакена заключается в том, что множество решений этой системы имеет конечный базис фундаментальных решений.

Решение $\bar{x}$ называют фундаментальным (неразложимым), если из равенства $\bar{x} = \bar{y} + \bar{z}$, где y, z — неотрицательные целые решения, следует, что $\bar{y} = 0$ или $\bar{z} = 0$.

Теорема 3 (Хакен). *Множество фундаментальных решений конечно.*

В линейной алгебре хорошо известна аналогичная теорема, но там разрешены любые коэффициенты: целые и не целые, положительные и отрицательные. Здесь же коэффициенты должны быть целыми неотрицательными.

Доказательство теоремы Хакена достаточно просто, но я вместо доказательства в общем случае рассмотрю простой пример.

Прежде всего я отмечу следующее. Мы ищем неотрицательные решения; тем самым в систему мы включаем неравенства. Можно считать, что вся система состоит только из однородных неравенств. Действительно, уравнение $x=0$ эквивалентно системе двух неравенств $x\geqslant 0$ и $x\leqslant 0$.

Рассмотрим систему неравенств $-x+4y\geqslant 0$ и $2x-y\geqslant 0$ (рис. 7). Сложим координаты фундаментальных решений, принадлежащих прямым: $(5,3)=(4,1)+(1,2)$. Ясно, что все фундаментальные решения содержатся в области $x\leqslant 5$, $y\leqslant 3$. Действительно, если решение лежит вне этой области, то из этого решения можно вычесть одно из двух фундаментальных решений $(4,1)$ и $(1,2)$. В общем случае рассуждения те же самые.

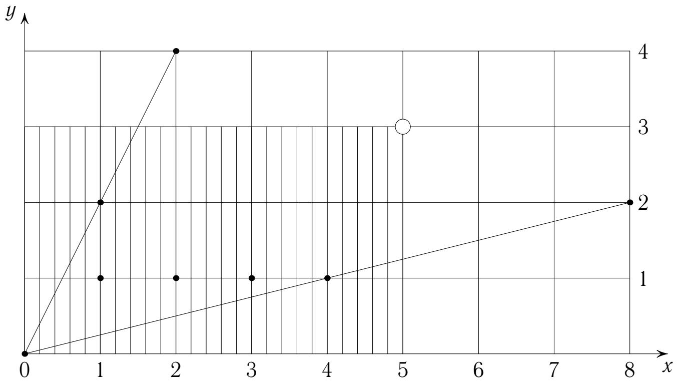

Рис. 7. Система неравенств

Теперь я могу выполнить одну из своих целей — рассказать алгоритм распознавания тривиального узла. Тривиальный узел характеризуется тем, что он ограничивает вложенный диск. Это вопрос о поверхности. (Существует ли поверхность данного типа?) Правда, здесь поверхность незамкнутая. Но все, что я говорил, проходит и для незамкнутых поверхностей, правда число уравнений уменьшается: отрезки в треугольниках на крае многообразия никаких уравнений не дают. Нужно только не включать в систему уравнений те треугольники и прямоугольники, которые примыкают к краю поверхности.

Для точности узел нужно заменить на полноторие — трубчатую окрестность узла. Узел тривиален тогда и только тогда, когда на какую-нибудь параллель этого полнотория можно снаружи натянуть диск.

Несложно показать, что если существует хотя бы один диск, натянутый на параллель, то такой диск найдется и среди фундаментальных поверхностей. Если это известно, то алгоритм распознавания узла, по крайней мере теоретически, чрезвычайно прост. Удаляем трубчатую окрестность узла и триангулируем полученное многообразие. Составляем систему уравнений (неравенств) и находим фундаментальные решения. Затем для каждого фундаментального решения проверяем, дает ли оно диск, край которого является параллелью. Это легко сделать, вычислив эйлерову характеристику поверхности и проверив, что ее край состоит из окружности, пересекающей медиан один раз.

Теперь я хочу рассказать о классификации достаточно больших трехмерных многообразий. Неприводимое многообразие M^3 называют *достаточно большим*, если оно содержит несжимаемую поверхность, отличную от S^2, $\mathbb{R}P^2$ и D^2. Например, любое неприводимое многообразие с краем либо достаточно большое, либо гомеоморфно полному кренделю некоторого рода. Многообразия, у которых одномерная группа гомологий бесконечна, тоже достаточно большие.

Теорема 4 (Хакен, Вальдхаузен, Иогансен, Хемион). *Существует алгоритм распознавания достаточно больших трехмерных многообразий. (Для любых двух достаточно больших многообразий этот алгоритм позволяет выяснить, гомеоморфны они или нет.)*

Из этой теоремы легко выводится существование алгоритмической классификации достаточно больших трехмерных многообразий. А именно, сначала строится алгоритм, перечисляющий все трехмерные многообразия. Для этого нужно среди 3-мерных симплициальных комплексов выбрать те, которые являются многообразиями. В полученном списке будут дубликаты. От дубликатов можно избавиться, применив алгоритм распознавания.

История теоремы классификации достаточно больших трехмерных многообразий такова. Впервые ее доказал Хакен, после того как он построил теорию нормальных поверхностей в 1962 г. Но вскоре в его доказательстве обнаружили серьезный пробел. Долгое время различные математики (Вальдсхаузен, Иоганнсон, Джейко, Шэлен и др.) пытались его ликвидировать. При этом была проделана большая и важная работа, построена теория характеристических подмногообразий.

В конце концов было выделено ключевое препятствие: для некоторого очень специального класса многообразий метод Хакена не работает. Это препятствие — так называемые многообразия Столлингса. Позже я объясню, почему для них метод Хакена не работает.

Препятствие, связанное с многообразиями Столлингса, преодолел Хемион в 1976 г. Он сумел решить задачу распознавания для многообразий Столлингса независимым методом, который не имел никакого отношения к теории Хакена.

После этого было объявлено, что теорема классификации достаточно больших многообразий доказана. На эту тему появилось несколько обзорных статей, в 1991 г. вышла книга Хемиона. Теорема важная, на нее ссылаются во многих работах.

Все публикации по этой теме были построены по одной и той же схеме. Сначала говорилось о доказательстве Хакена и возникающем там препятствии, затем о том, как Хемион это препятствие преодолел, после чего делалось заключение, что теорема доказана. Однако, никакого претендующего на полноту текста так и не появилось. Возникает естественный вопрос: «Почему нет других препятствий?» Я решил в этом разобраться и написать полное доказательство. Оказалось, что действительно есть еще одно препятствие, которое я назвал квазимногообразиями Столлингса и которое не может быть преодолено с помощью метода Хемиона. Других препятствий нет. Чтобы преодолеть второе препятствие, нужен очень мощный аппарат теории гомеоморфизмов поверхностей, разработанный Тёрстоном гораздо позже 1976 г., когда было объявлено о доказательстве теоремы. Работы Тёрстона появились в 80-е годы, а нам нужна алгоритмическая версия этого аппарата, так называемые train tracks (железнодорожные пути), которую предложили Бествина и Хэндел еще позже — в 1995 г.

Таким образом, до 1998 г., когда была опубликована моя статья в «Успехах математических наук», теорема оставалась не доказанной. Полное доказательство заняло 20 лет.

Из теоремы о классификации достаточно больших многообразий сразу вытекает существование алгоритма классификации узлов. Точнее говоря, не из самой теоремы, а из метода ее доказательства: нужно повторить доказательство теоремы Хакена, следя за тем, как себя ведет меридиан трубчатой окрестности узла.

Теорема классификации доказывается с помощью конструкции, называемой *иерархией*, или *скелетом*. Возьмем достаточно большое трехмерное многообразие. В нем есть несжимаемая поверхность. Разрежем многообразие по этой поверхности. В результате получим либо одно многообразие, либо два. Эти многообразия будем называть ячейками. Ячейки имеют край, поэтому они достаточно большие. Снова сделаем разрезы по несжимаемым поверхностям и т. д. Останавливаемся тогда, когда полученные ячейки — шары. При этом нужно следить за тем, чтобы поверхности были в общем положении. Например, не должно быть троек поверхностей, пересекающихся в одной точке. Технически удобнее не разрезать многообразие, а возводить перегородки. Тогда в многообразии получаем некоторый двумерный полиэдр P^2, который я и называю скелетом. Если проводить разрезы, то результат называют иерархией. Но при этом очень сложно следить за тем, что происходит. Рассмотрение скелета (объекта), а не иерархии (процесса), существенно упрощает доказательство теоремы классификации.

Доказательство того, что мы рано или поздно остановимся, основано на понятии *сложности* трехмерного многообразия. При разрезании сложность всегда уменьшается (если только она отлична от нуля).

Возьмем другое многообразие и построим для него скелет. Первое важное наблюдение таково: если скелеты гомеоморфны, то многообразия тоже гомеоморфны. Действительно, гомеоморфизм границ двух шаров с помощью конической конструкции можно продолжить до гомеоморфизма шаров.

Второе наблюдение таково. Предположим, что нам удалось ввести на допустимые вставки такие жесткие ограничения, что на каждом шаге можно делать только конечное число вставок (с точностью до гомеоморфизма многообразия на себя). Тогда для каждого многообразия получается конечный набор скелетов, причем многообразия гомеоморфны тогда и только тогда, когда наборы скелетов попарно гомеоморфны. Действительно, с одной стороны, если какие-то два скелета гомеоморфны, то, как уже было показано, гомеоморфны и сами многообразия. С другой стороны, если многообразия гомеоморфны, то наборы скелетов для них тоже окажутся гомеоморфными, потому что конструкция определена с точностью до гомеоморфизма.

Все сводится к тому, чтобы добиться конечности допустимых вставок. Будем вставлять поверхности минимальной сложности. *Сложностью* поверхности F назовем число $c(F) = -\chi(F) + N$, где N — число точек пересечения с сингулярностями полиэдра, полученного на предыдущем шаге. Теорема о конечности числа поверхностей минимальной сложности — это вариант теории нормальных поверхностей, учитывающий сложность поверхности. Количество фундаментальных поверхностей с учетом сложности тоже остается конечным.

Хакен отметил следующее. Предположим, что на каждом шаге все вставляемые фундаментальные поверхности имеют положительную сложность. Тогда поверхности минимальной сложности — часть фундаментальных поверхностей; в частности, поверхностей минимальной сложности конечное число. Утверждение очевидное, так как сложность аддитивна по отношению к суммированию поверхностей. Поэтому, пусть некоторая поверхность F является суммой двух поверхностей F_1 и F_2 положительной сложности. Тогда $c(F) > c(F_2)$ и $c(F) > c(F_1)$. Поэтому любая поверхность минимальной сложности является фундаментальной.

Это — легкий случай. Хакен дальше него не продвинулся. Здесь возникает вопрос: как быть в том случае, когда есть фундаментальные поверхности нулевой сложности? Хакен посчитал, что с этим случаем легко можно справиться, но оказалось, что это не так.

Какие бывают поверхности нулевой сложности? Другими словами, когда выполняется равенство $-\chi(F)+N=0$? Эйлерова характеристика может быть положительной лишь в случае сферы, проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ и диска. Но из-за неприводимости сферы исключены. Поэтому проективные плоскости тоже исключены, потому что край трубчатой окрестности проективной плоскости — сфера. Диски мы исключаем, пользуясь несжимаемостью: поверхности вставляем так, чтобы они были несжимаемыми; тогда дисков не будет.

Таким образом, поверхность нулевой сложности не содержит сингулярных точек и имеет нулевую эйлерову характеристику. Нулевую эйлерову характеристику имеют кольцо, лист Мёбиуса, тор и бутылка Клейна. Торы и бутылки Клейна нам не мешают, так как любая ячейка содержит только конечное число таких поверхностей (с точностью до гомеоморфизмов ячейки, неподвижных на ее крае).

Случай колец и листов Мёбиуса гораздо сложнее, поскольку число таких поверхностей в ячейке может быть бесконечным, даже с точностью до неподвижных на крае гомеоморфизмов.

Например, многократно скручивая одно кольцо вдоль другого (см. рис. 8), можно получить бесконечное число неэквивалентных колец, поскольку скручивания ячейки вдоль кольца сдвигают край.

Правильный путь состоит в разбиении всех колец на два типа: продольные и поперечные (случай листов Мёбиуса рассматривается аналогично, и его можно опустить). Здесь я имею в виду такую ситуацию. Все кольцо лежит внутри одной ячейки, и край кольца принадлежит краю ячейки. Кольцо A называют *продольным*, если любое другое кольцо A_1 можно сдвинуть так, чтобы для нового кольца A_1' выполнялось условие: пересечение $A\cap A_1'$ либо пусто, либо состоит из окружностей, параллельных средней линии кольца A (рис. 9). В противном случае кольцо называют *поперечным*.

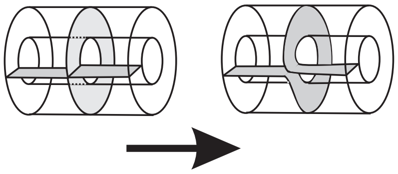

Рис. 8.

Окружность на кольце, ограничивающую диск, можно убрать изза несжимаемости. Поэтому пересечение любого кольца с поперечным кольцом можно привести к виду, изображенному на рис. 10.

Оказалось, что продольные кольца намного приятнее, чем поперечные. Наличие колец нам мешало тем, что скручивание вдоль кольца могло приводить к гомеоморфизмам ячейки, которые не продолжаются до гомеоморфизма многообразия. Но при скручивании вдоль любого другого кольца продольное кольцо остается инвариантным, потому что пересечение этих колец состоит из окружностей, параллельных средней линии кольца. Эти окружности инвариантны, поэтому продольное кольцо нечувствительно к скручиваниям. Отсюда следует, что продольных колец конечное число.

Продольных колец конечное число, потому что добавление к ним других колец равносильно скручиваниям, а продольные кольца к скручиваниям нечувствительны.

Рис. 9. Продольное кольцо

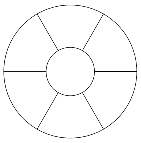

Рис. 10. Поперечное кольцо

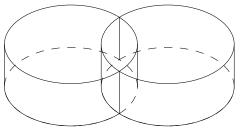

Рис. 11. Структура прямого произведения

Теперь можно сформулировать окончательный вариант способа вставления поверхностей. Если колец вообще нет, то работает предыдущий метод. Если есть хотя бы одно продольное кольцо, то мы его вставляем; продольных колец конечное число. Остановимся мы тогда, когда останутся только шары и ячейки, в которых нет продольных колец, но есть поперечные кольца. Оказывается, что такие ячейки легко описать: они имеют вид $F \times I$ или $F \tilde{\times} I$ (нетривиальное расслоение со слоем отрезок).

Доказывается это весьма просто. Нарисуем поперечное кольцо в виде цилиндра. Из того, что оно поперечное, следует, что существует другое кольцо, которое пересекает его по двум вертикальным от-

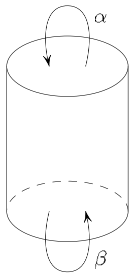

Рис. 12. Две инволюции

резкам (рис. 11). Тогда структура прямого произведения есть уже на окрестности объединения этих двух колец. Конструкция расширяется и каждый раз сохраняется структура прямого произведения, точнее говоря, расслоения со слоем отрезок (при распространении отрезки могут перевернуться, т. е. может получиться косое произведение).

На шары я не буду обращать внимание. Если есть поверхность $F\times I$, то к ней тоже что-то приклеивается и т. д. В результате получается многообразие Столлингса. Для него алгоритм Хакена не работает, потому что после первого разреза получаем многообразие $F\times I$, в котором очень много разных колец. Кольца соответствуют кривым на поверхности, а число кривых на поверхности бесконечно. Поэтому нет шансов сделать процедуру выбора какого-нибудь кольца конечной.

Для многообразий, содержащих многообразия Столлингса, задачу классификации нужно решать отдельно. Это сделал Хемион. После этого было объявлено, что задача классификации трехмерных многообразий решена. Но есть еще и квазимногообразия Столлингса, которые склеиваются из $F\widetilde{\times}I$ и $F\tilde{I}$. Для них процедура Хакена не работает по тем же самым причинам.

Возьмем поверхность $F\times I$ и на каждом ее крае рассмотрим некоторую обращающую ориентацию инволюцию (гомеоморфизм периода 2) без неподвижных точек. Произведем по этим инволюциям склейку (рис. 12). Полученное в результате многообразие — это и есть квазимногообразие Столлингса. Для таких многообразий метод не работает по тем же причинам, что и раньше. Для них надо решать проблему отдельно. Несложная редукция сводит проблему распознавания квазимногообразий Столлингса к следующей проблеме о гомеоморфизмах поверхностей. Пусть заданы два гомеоморфизма $f,g\colon F\to F$ поверхности на себя. Требуется выяснить, существует ли такое число n, что $f^n=g$ (равенство с точностью до изотопии). Гомеоморфизмы поверхностей, рассматриваемые с точностью до изотопии, описываются в терминах гомоморфизмов фундаментальной группы. Поэтому задача чисто алгебраическая. Она трудная лишь потому, что число n не ограничено. Если же получить оценку для числа n, то задача сразу становится легкой.

Оценку для числа n можно получить с помощью теории Тёрстона так называемых *растягивающих факторов*. Наиболее проста эта теория для тора. Гомеоморфизмы тора задаются матрицами порядка 2 с определителем, равным 1. Мнимые собственные значения бывают очень редко; этот случай неинтересный. Если же собственные значения действительные, то они имеют вид λ и λ^{-1}. Таким образом, в одном направлении происходит растяжение, а в другом сжатие. Для тора это было известно давно, а Тёрстон доказал, что так устроены не только гомеоморфизмы тора, но и гомеоморфизмы всех поверхностей. Для каждого гомеоморфизма поверхности определен растягивающий фактор $\lambda > 1$. Тогда оценить число n можно так: оно не превосходит любого такого N, что $\lambda(f)^N \geqslant \lambda(g)$. Это завершает доказательство теоремы об алгоритмическом распознавании достаточно больших многообразий и теоремы об их алгоритмической классификации.

Тогда неравенство $\lambda(f)^n > \lambda(g)$ позволяет получить оценку для n.

Это преодолевает второе неравенство. Я доказал, что больше никаких других препятствий нет.