В. Ю. Овсиенко

Проективная дифференциальная геометрия — старая и новая

1. Группы симметрий и дифференциальные инварианты

Я буду рассказывать о проективной и дифференциальной геометрии и некоторых классических теоремах из теории гладких кривых, которые принято сейчас называть теорией Штурма.

Пусть M — гладкое многообразие. Следуя Клейну (или Тёрстону), под дифференциальной геометрией на M будем понимать изучение инвариантов действия группы Ли G (это действие задано хотя бы локально). Я сразу приведу несколько примеров.

Пример 1. *$M = \mathbb{R}^n$ с действием евклидовой группы $\mathscr{E}(n) = \mathrm{SO}(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ (полупрямое произведение группы вращений на группу переносов).*

Евклидова геометрия изучает инварианты действия группы $\mathscr{E}(n)$. Основной инвариант — метрика $g = \sum (dx^i)^2$. Кроме того, по метрике можно написать всевозможные кривизны (кривых, поверхностей и т. д.).

Пример 2. *$M = \mathbb{R}^n$ с действием аффинной группы $\mathscr{A}(n) = \mathrm{GL}(n) \ltimes \mathbb{R}^n$.*

В этом случае не существует $\mathscr{A}$-инвариантной метрики. Тем не менее, понятие кривизны может быть определено.

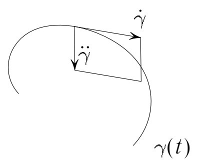

Рис. 1. Кривая γ

Рассмотрим для простоты случай $n=2$. Пусть $\gamma(t)$ — локально выпуклая кривая, т. е. у нее нет перегибов. Тогда векторы $\dot\gamma$ и $\ddot\gamma$ не коллинеарны (рис. 1). В евклидовой геометрии кривизну можно определить как инвариант кривой, различающий кривые с точностью до евклидовых преобразований. Так же можно поступить и в аффинном случае. Мы предположили, что векторы $\dot\gamma$ и $\ddot\gamma$ не коллинеарны. Запишем вектор $\dddot\gamma$ в виде их линейной комбинации:

$$\dddot\gamma = a\dot\gamma + b\ddot\gamma.$$

Кривая $\gamma(t)$ определяется функциями $a(t)$ и $b(t)$. Выберем параметр t так, чтобы избавиться от одной из этих функций. А именно, выберем t так, чтобы площадь параллелограмма, натянутого на векторы $\dot\gamma$ и $\ddot\gamma$ была постоянна: $[\dot\gamma, \ddot\gamma] = \mathrm{const}$. Продифференцировав это равенство, получим $[\dot\gamma, \dddot\gamma] = 0$, т. е. $\dddot\gamma = k(t)\dot\gamma$. Функцию $k(t)$ называют *аффинной кривизной*. Можно доказать, что две кривые аффинно эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие аффинные кривизны равны.

Отметим, что условие $[\dot\gamma, \ddot\gamma] = \mathrm{const}$ аффинно инвариантно, поскольку форма площади аффинно инвариантна с точностью до умножения на константу.

Упражнение. Доказать, что

$$k(t) = \frac{[\dddot\gamma, \ddot\gamma]}{[\dot\gamma, \ddot\gamma]}.$$

Пример 3. *$M = \mathbb{R}P^n$ — проективное пространство, т. е. множество прямых в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящих через начало координат.*

Этот пример будет для нас основным.

Удобно выбирать аффинные координаты на произвольной аффинной гиперплоскости, не проходящей через начало координат. Почти все точки проективного будут параметризованы точками пересечения прямых с этой гиперплоскостью. Исключение составляют точки, принадлежащие проективному подпространству коразмерности 1.

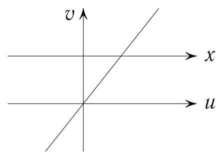

Рис. 2. Координаты на проективной прямой

На линейном пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ действует группа $G = \mathrm{SL}(n+1, \mathbb{R})$ (группа линейных преобразований, сохраняющих объем). Это действие переносится на $\mathbb{R}P^n$, потому что прямые переходят в прямые.

По нашему определению проективная геометрия должна изучать всевозможные инварианты геометрических объектов в проективном пространстве (кривых, подмногообразий, диффеоморфизмов) относительно действия этой группы.

Раньше проективная геометрия была необычайно популярна. Чем интересна проективная геометрия? Легко видеть, что в группу $\mathrm{SL}(n+1, \mathbb{R})$ вложены обе предыдущие группы — евклидова и аффинная. Оказывается, что в некотором смысле группа проективных симметрий максимальна. А именно, никакая другая группа Ли, содержащая $\mathrm{SL}(n+1, \mathbb{R})$, не может действовать на n-мерном многообразии даже локально. Поэтому если нам удастся определить проективные инварианты (кривизну и т. п.), то это будут самые сильные инварианты — инварианты по отношению к максимальной группе; их найти труднее всего.

Есть еще один случай, когда группа симметрий максимальна в этом же смысле. Это — группа конформных преобразований. Есть и другие примеры максимальных групп; классификации максимальных геометрий посвящено много работ.

В размерности 1 конформная геометрия и проективная геометрия совпадают. Мы начнем с этого простейшего случая — рассмотрим геометрию проективной прямой.

2. Производная Шварца

Фиксируем на проективной прямой $M = \mathbb{R}P^1$ координату $x = \dfrac{u}{v}$ (рис 2). Группа $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ действует на проективной прямой следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} x = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Центр $\{\pm 1\}$ действует тривиально. Факторгруппа, которая действует на $\mathbb{R}P^1$ эффективно, — это группа

$$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\{\pm 1\}.$$

В данном случае единственными естественными объектами, инварианты которых можно изучать, являются диффеоморфизмы $f\colon \mathbb{R}P^1 \to \mathbb{R}P^1$. Для такого диффеоморфизма определим *производную Шварца* следующей формулой:

$$S(f) = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\Big(\frac{f''}{f'}\Big)^2.$$

Смысл этого сложного выражения состоит в следующей классической теореме.

Теорема 1. *Диффеоморфизмы f и g проективно эквивалентны $\Big($т. е. $g(x) = \dfrac{af(x)+b}{cf(x)+d}\Big)$ тогда и только тогда, когда $S(f) = S(g)$.*

В одну сторону доказательство простое. А доказательство в другую сторону трудное.

Замечание 1. В одномерном случае евклидовы преобразования сводятся к переносам, поэтому два диффеоморфизма прямой f и g эквивалентны относительно евклидовой группы тогда и только тогда, когда $f(x) = g(x) + \mathrm{const}$. Эквивалентное условие: $f' = g'$. Поэтому в евклидовом случае диффеоморфизмы различает обычная производная.

Упражнение. Доказать, что на аффинной прямой роль производной играет логарифмическая производная f''/f'.

Выясним теперь, откуда возникает производная Шварца. Надо сказать, что этот объект необычайно универсален — существуют десятки или даже сотни мест, из которых он возникает. Я выбрал среди них два наиболее классических и наиболее простых.

Обычная производная измеряет, насколько диффеоморфизм f не сохраняет расстояния между двумя близкими точками x и $x+\epsilon$:

$$f(x+\epsilon) - f(x) = \epsilon f'(x) + (\epsilon^2).$$

В проективной геометрии расстояние между двумя точками не имеет никакого смысла, поскольку любые две (и даже три) точки проективным преобразованием можно перевести в любые другие. Но у четверки точек x_1, x_2, x_3, x_4 на проективной прямой существует (и притом единственный) инвариант — двойное отношение

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{(x_3 - x_1)(x_4 - x_2)}{(x_2 - x_1)(x_4 - x_3)}.$$

Традиционно проективная геометрия начинается с этого инварианта, который был известен еще древним грекам. В проективной геометрии двойное отношение играет такую же роль, как расстояние в евклидовой геометрии. И производная Шварца тоже возникает таким же способом, как обычная производная. Я нашел это определение у Э. Картана, но, вероятно, оно было известно и раньше. А именно, рассмотрим точки x, $x+\epsilon$, $x+2\epsilon$, $x+3\epsilon$. Применим диффеоморфизм f и посчитаем разность двойных отношений. Оказывается, что

$$[f(x), f(x+\epsilon), f(x+2\epsilon), f(x+3\epsilon)] - [x, x+\epsilon, x+2\epsilon, x+3\epsilon] = -2\epsilon^2 S(f) + (\epsilon^3).$$

Но исторически производная Шварца возникла (в XIX в.) по-другому. Рассмотрим простейшее дифференциальное уравнение 2-го порядка:

$$y''(x) + u(x)\cdot y(x) = 0, \quad u(x) \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

Возьмем произвольные линейно независимые решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ и рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}$ (в области, где $y_2(x) \neq 0$). Тогда $u(x) = \dfrac{1}{2}S(f)$. Это — второй способ определить производную Шварца.

Пространство решений двумерно. Поэтому если $\tilde{y}_1(x)$ и $\tilde{y}_2(x)$ — другая пара линейно независимых решений, то

$$\tilde{f}(x) = \frac{\tilde{y}_1(x)}{\tilde{y}_2(x)} = \frac{ay_1(x)+by_2(x)}{cy_1(x)+dy_2(x)} = \frac{af(x)+b}{cf(x)+d}.$$

Из этого можно получить доказательство теоремы 1 в другую сторону. Но доказательство того, что пространство решений двумерно, трудное, поэтому получается, что доказательство теоремы в обратную сторону трудное.

Это только два из многих способов получить производную Шварца. В действительности она обладает необыкновенным количеством разных свойств и используется во многих науках: в комплексном анализе, в теории динамических систем, математической физике.

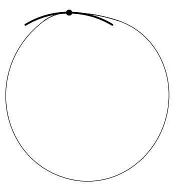

Рис. 3. Соприкасающаяся окружность

3. Замечательное свойство кривизн

Классическая теорема о четырех вершинах утверждает следующее. «Пусть γ — выпуклая замкнутая кривая на плоскости. Тогда евклидова кривизна имеет по крайней мере 4 критических точки, т. е. функция кривизны имеет по крайней мере 4 экстремума.» Экстремальные точки кривизны называют *вершинами*.

Эту теорему доказал в 1909 г. индийский математик Mukhopadhyaya.

Давайте установим две геометрических способа понимать, что такое вершина кривой. Пусть кривая γ общего положения. Для каждой точки кривой можно построить соприкасающуюся окружность, которая приближает кривую с точностью до второго порядка. Радиус соприкасающейся окружности равен $1/k$, где k — кривизна. Поскольку окружность приближает кривую с точностью до второго порядка, кривая из внешней части окружности переходит во внутреннюю (рис. 3). Так будет во всех точках, которые не являются вершинами. И только в вершинах кривая локально будет расположена по одну сторону от окружности, потому что в вершинах окружность приближает кривую с точностью до третьего порядка.

Другой способ геометрически определить вершины связан с так называемыми *каустиками* кривых. Каустика — это огибающая семейства нормалей к кривой (рис. 4). Точки возврата каустики соответствуют вершинам кривой. Каустика в случае эллипса была известна еще Аполлонию и Якоби.

Теорема о четырех вершинах, несмотря на ее простоту, привлекает внимание до сих пор. Известны десятки ее различных доказательств и множество ее обобщений. Одно из обобщений — аффинная теорема о шести вершинах, которую Mukhopadhyaya доказал в той же самой работе 1909 г. Теорема о шести вершинах утверждает, что аффинная кривизна имеет по крайней мере 6 критических точек.

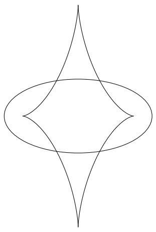

Рис. 4. Каустика

Точки экстремума аффинной кривизны (аффинные вершины) имеют такие же геометрические описания, как и точки экстремума обычной (евклидовой) кривизны, о которых шла речь выше. Во-первых, аффинная вершина — это точка необычайно тесного контакта кривой и коники. Во-вторых, аффинные вершины можно определить с помощью аффинной каустики. Аффинная каустика — это огибающая семейства аффинных нормалей, а аффинные нормали — это касательные к кривым, заметаемым серединами хорд, параллельных касательной (рис. 5). Аффинные вершины соответствуют точкам возврата аффинной каустики.

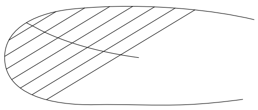

Рис. 5. Аффинная каустика

У эллипса все аффинные нормали проходят через центр. Это — вырожденный случай, как и окружность в евклидовой геометрии. Для эллипса соприкасающаяся коника совпадает с ним самим, так же как и для окружности соприкасающаяся окружность совпадает с ней самой.

Недавно В. И. Арнольд предложил доказательство теоремы о четырех вершинах, использующее симплектическую топологию.

4. Теорема Э. Жиса и нули производной Шварца

В 1995 г. Этьен Жис (E. Ghys) из Лиона обнаружил следующий удивительный факт.

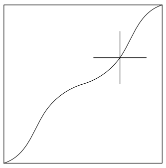

Рис. 6. График диффеоморфизма

Теорема 2. *Пусть f — произвольный диффеоморфизм проективной прямой $\mathbb{R}P^2$. Тогда производная Шварца $S(f)$ обращается в нуль по крайней мере в четырех различных точках.*

На первый взгляд ничего общего, кроме числа 4, между теоремой Жиса и теоремой о четырех вершинах нет. Но Жис открыл ее именно как аналог теоремы о четырех вершинах.

Рассмотрим вместо диффеоморфизма f его график — замкнутую гладкую кривую на двумерном торе $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1$. Эта кривая нигде не вертикальна и нигде не горизонтальна (рис. 6). Если $f \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, то график — гипербола. Оказывается, что в этой ситуации гиперболы играют ту же самую роль, что и соприкасающиеся окружности. А именно, для любой точки x существует единственное проективное преобразование $g_x \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, которое приближает диффеоморфизм f с точностью до 2-струи. Производная Шварца соответствует величине отклонения диффеоморфизма в данной точке от проективного. Нули производной Шварца — это те точки, в которых проективное преобразование приближает f с точностью до 3-струи. Жису это дало способ получить первое доказательство его теоремы, которое следует классическому доказательству Кнезера теоремы о четырех вершинах, основанному на соприкасающихся окружностях.

Доказательство теоремы Жиса было опубликовано С. Табачниковым и автором.

5. Связь с лоренцевой геометрией

Теорема Жиса на самом деле не аналог теоремы о четырех вершинах, а в точности теорема о четырех вершинах, но в лоренцевой геометрии. Рассмотрим на торе плоскую лоренцеву метрику $g = dx\,dy$; конус изотропных векторов при этом — вертикальные и горизонтальные направления. Вычислим лоренцеву кривизну кривой $\gamma = (x, f(x))$ (эта кривая — тот самый график диффеоморфизма, который мы рассматривали). Параметризуем ее параметром t. Тогда $\dot\gamma = (\dot x, f'\dot x)$. Выберем параметр t так, что $\|\dot\gamma\| \equiv 1$, т. е. $\dot x = \dfrac{1}{\sqrt{f'}}$. Лоренцева кривизна равна длине вектора второй производной. Вычислим его:

$$\ddot\gamma = \left(\frac{1}{\sqrt{f'}}, \sqrt{f'}\right)^{\cdot} = \frac{1}{2}\left(-\frac{f''}{(f')^2}, -\frac{f''}{f'}\right).$$

Таким образом, лоренцева кривизна равна

$$\|\dot\gamma\| = \frac{1}{2}\,\frac{f''}{(f')^{3/2}} = k(\gamma).$$

Из этого мы получаем весьма неожиданное выражение

$$k' = \frac{1}{2\sqrt{f'}}S(f). \tag{1}$$

Оказалось, что производная Шварца связана с кривизной в лоренцевой метрике. Экстремумы кривизны — нули производной Шварца.

Замечание 2. Выражение (1) можно записать в более элегантном виде: $2dk\,dt = S(f)$ (как квадратичный дифференциал). Это — инвариантное выражение. Можно задать вопрос: «Для каких лоренцевых метрик выполняется такое соотношение?» Можно доказать, что оно выполняется в точности для лоренцевых метрик постоянной кривизны

$$g = \frac{dx\,dy}{(axy + bx + cy + d)^2}.$$

6. Решающее вмешательство проективной геометрии

Пока все результаты принадлежали разным геометриям — евклидовой, аффинной, лоренцевой. Как же все это связано с проективной геометрией? Сформулируем одно общее утверждение, из которого все будет следовать.

Рассмотрим гладкую замкнутую кривую $\gamma \subset \mathbb{R}P^n$. В 1956 г. M. Barner ввел понятие строго выпуклых кривых и доказал замечательную теорему. Назовем замкнутую кривую γ в проективном пространстве *строго выпуклой*, если через любую $n-1$ точку кривой γ можно провести гиперплоскость, которая пересекает γ только в этих точках. Пример строго выпуклой кривой в $\mathbb{R}P^2$ изображен на рис. 7.

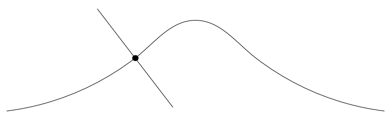

Рис. 7. Строго выпуклая кривая в $\mathbb{R}P^2$

Теорема Барнера состоит в следующем.

Теорема 3. *Любая строго выпуклая кривая в $\mathbb{R}P^n$ имеет по крайней мере $n+1$ точку уплощения.*

Напомню, что точка уплощения — это точка, в которой касательная гиперплоскость приближает с более высоким порядком, чем обычно, т. е. векторы $\dot\gamma$, $\ddot\gamma$, $\ldots$, $\gamma^{(n)}$ линейно зависимы. В 2-мерном случае точка уплощения — это точка перегиба.

Покажем, что все предыдущие теоремы сводятся к теоремы Барнера.

Начнем с теоремы о четырех вершинах. Для этого рассмотрим отображение Веронезе $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}P^3$, которое задается формулой

$$(x, y) \mapsto (x^2 + y^2 : x : y : 1).$$

Это отображение устанавливает взаимно однозначное соответствие между окружностями на плоскости $\mathbb{R}^2$ и гиперплоскостями в $\mathbb{R}P^3$. Вершины любой выпуклой кривой γ на плоскости $\mathbb{R}^2$ соответствуют точкам уплощения кривой $v(\gamma)$ в $\mathbb{R}P^3$. Действительно, рассмотрим для кривой γ соприкасающуюся окружность. Уравнение окружности — это в точности уравнение гиперплоскости в $\mathbb{R}P^3$. Образ $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}P^3$ — некоторая двумерная поверхность. Образ окружности — пересечение этой двумерной поверхности с гиперплоскостью. Вершина кривой (по крайней мере в случае общего положения) соответствует ситуации, когда кривая локально остается по одну сторону от соприкасающейся окружности. В таком случае образ кривой остается локально по одну сторону от гиперплоскости, потому что образ $\mathbb{R}^2$ локально разделяет $\mathbb{R}P^3$ на две части. Это как раз соответствует точке уплощения.

Легко также проверить, что образ выпуклой кривой при отображении Веронезе является строго выпуклой кривой. Действительно, для выпуклой кривой на плоскости любая прямая, проходящая через две ее точки, не пересекает кривую в других точках. Прямая — частный случай окружности, поэтому ее образ тоже лежит в некоторой гиперплоскости. Эта гиперплоскость обладает требуемым свойством, т. е. пересекает $v(\gamma)$ ровно в двух точках.

Для доказательства теоремы о шести вершинах нужно рассмотреть отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}P^5$, которое задается формулой

$$(x, y) \mapsto (x^2 : xy : y^2 : x : y : 1).$$

Это отображение устанавливает взаимно однозначное соответствие между кониками и гиперплоскостями. Аффинные вершины — это точки, в которых соприкасающаяся коника приближает кривую лучше, чем обычно. Таким коникам соответствуют гиперплоскости, которые приближают образ кривой лучше, чем обычно. Такие гиперплоскости соответствуют точкам уплощения.

Для доказательства теоремы Жиса нужно рассмотреть отображение Сёгре $\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1 \to \mathbb{R}P^3$, которое задаётся формулой

$$\big((x : y), (y : z)\big) \mapsto (xz : xt : yz : yt).$$

Оказывается, что нули производной Шварца соответствуют точкам уплощения образа. Это легко понять, воспользовавшись интерпретацией нулей производной Шварца, основанной на соприкасающихся гиперболах.

Современное доказательство теоремы Барнера и вывод из нее четырех вершинах можно найти в недавней работе С. Табачникова.

7. Дискретизация

О. Мусин и В. Седых (1996) доказали дискретный аналог теоремы о четырех вершинах. Пусть P — выпуклый m-угольник на плоскости. Рассмотрим окружность, проходящую через три его последовательные вершины v_i, v_{i+1} и v_{i+2}. Вершины v_{i-1} и v_{i+3} могут лежать либо по разные стороны от этой окружности, либо по одну сторону. Если они лежат по одну сторону, то будем говорить, что тройка последовательных вершин *экстремальная*.

Теорема 4. *Для любого выпуклого m-угольника, где $m \geqslant 4$, найдутся по крайней мере 4 экстремальные тройки.*

Упражнение. Сформулировать дискретную версию теоремы о шести аффинных вершинах.

Сформулируем теперь дискретную версию теоремы Жиса. Заменим диффеоморфизм f на пару упорядоченных наборов точек в $\mathbb{R}P^1$; обозначим их $X = (x_1, \ldots, x_m)$ и $Y = (y_1, \ldots, y_m)$. График f при этом заменится на ломаную. Производную Шварца заменим на разность двойных отношений

$$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}] - [y_i, y_{i+1}, y_{i+2}, y_{i+3}].$$

Дискретная версия теоремы Жиса утверждает, что эта разность меняет знак по крайней мере 4 раза.

Теорема Барнера тоже дискретизируется. Определение строго выпуклого m-угольника то же самое. Доказательство дискретной версии теоремы Барнера можно провести индукцией по числу вершин многоугольника.

Интерес к дискретизации связан с тем, что дискретные теоремы сильнее гладких: гладкие теоремы получаются из дискретных предельным переходом. В то же время, доказательство многих дискретных теорем проще: оно может быть получено индукцией по числу вершин.

У теоремы о четырех вершинах есть две дискретные версии. Другая ее дискретная версия, которую предложил Wegner, отличается от теоремы Мусина и Седых тем, что описанные окружности заменяются на вписанные.

Самое поразительное, что существует дискретная версия теоремы о четырех вершинах, которая почти на 100 лет старше самой теоремы. Это — знаменитая лемма Коши (1813), которую он придумал специально для доказательства теоремы Коши о жесткости выпуклых многогранников.

Лемма (Коши). *Пусть P и P' — выпуклые m-угольники, $m \geqslant 4$. Предположим, что соответственные стороны этих многоугольников равны. Тогда разность соответствующих углов этих многоугольников меняет знак не менее четырех раз.*

Коши дал неверное доказательство этой леммы. Его доказательство исправил Адамар.

Автор искренне признателен В. Прасолову за подробный конспект и подготовку этой лекции к печати.