Отчет лауреата конкурса "Молодая математика России"за 2016 год, Е. Америк

I

Основная работа была связана с алгебраической геометрией голоморфно симплектических многообразий.

1.1. Вокруг гипотезы о конусе.

Совместно с М. Вербицким мы продолжили изучение кэлерова конуса гиперкэлерова многообразия. Несколько раньше мы доказали так называемую гипотезу Каваматы-Моррисона о конусе для таких многообразий: грубо говоря, это утверждение о том, что кэлеров конус гиперкэлерова многообразия является конечным полиэдром с точностью до действия группы автоморфизмов. Оно в свою очередь сводится к утверждению, что группа ходжевой монодромии действует с конечным числом орбит на некоторых отрицательных целочисленных классах когомологий типа $(1, 1)$, называемых MBM классами (ортогональные к этим классам гиперплоскости как раз и задают грани кэлерова конуса) . Отсюда видно, что квадрат Бовилля-Богомолова MBM класса ограничен (действительно, монодромия действует изометриями) в зависимости от многообразия X. Но для приложений существенен вопрос, можно ли найти не зависящую от X (а зависящую только от его топологического типа) оценку на этот квадрат. Этим мы занимались в отчетный период, что нашло свое отражение в статье Collections of parabolic orbits in homogeneous spaces, homogeneous dynamics and hyperkahler geometry (см. https://arxiv.org/abs/1604.03927). В ней наши методы работы с гиперплоскостями в гиперболическом пространстве, которые происходят из эргодической теории и привели нас к доказательству гипотезы Каваматы-Моррисона о конусе, переносятся на параболические орбиты специального вида в более общем однородном пространстве. Как следствие, получается, что квадрат Бовилля-Богомолова MBM класса на X ограничен числом, не зависящим от X , а зависящим только от его топологического типа.

В нашей следующей работе Construction of automorphisms of hyperkähler manifolds (см https://arxiv.org/abs/1604.03079) этот результат применяется для доказательства, что любое гиперкэлерово многообразие имеет деформации с автоморфизмами некоторого заданного типа (гиперболическими, или в случае большого второго числа Бетти - параболическими). Доказательство это основано на результате Маркмана типа Торелли - о том, что построение автоморфизма эквивалентно нахождению элемента ходжевой монодромии, сохраняющего кэлеров конус. Кэлеров конус будет равен положительному в отсутствие MBM классов, а последнее гарантировано, если форма Бовилля-Богомолова на $H^2(X, \mathbb{Z})$ не представляет малых целых чисел (кроме, возможно, нуля). Таким образом, эта работа - следствие наших исследований об ограниченности квадрата.

Статья, содержащая доказательство гипотезы Каваматы-Моррисона о конусе, в этом г оду принята в журнал Annales Scientifiques de l'Ecole Normale

Supérieure ; для написания окончательной версии потребовалось ее немного переработать.

1.2. Характеристическое слоение на гладкой гиперповерхности

Пусть X голоморфно симплектическое многообразие и $D \subset X$ гладкая гиперп оверхность. Ограничение голоморфно симплектической формы σ на D имеет в любой точке ранг 1, так что его ядро задает слоение F на D , называемое характеристическим слоением. В течение некоторого времени я изучаю вопрос о размерности замыкания Зариского листов этого слоения (т.е. наименьшего аналитического подмногообразия, содержащего лист). Совместно с Ф. Кампана мы некоторое время назад доказали, что если F не расслоение на рациональные кривые, то общий лист компактен (т.е. подмногообразие) в том и только том случае, когда наше многообразие X - произведение Y с голоморфно симплектической поверхностью S, а D - с кривой C на ней. В частности, если X неприводимое голоморфно симплектическое многообразие, то листы F некомпактны, если только D не унилинейчатая. Возникает естественный вопрос, как охарактеризовать другие ситуации, в которых размерность замыкания Зариского общего слоя F меньше, чем размерность D. Очевидный пример таковой - это случай, когда X имеет структуру лагранжева расслоения $f : X \to B$, а D прообраз гиперповерхности на базе. Замыкание по Зарискому общего листа является в этом случае лагранжевым тором. За отчетный период Л. Гусевой и мной была доказана теорема - следующий шаг в программе классификации. Мы рассмотрели случай, когда X неприводимое четырехмерное голоморфно симплектическое многообразие, а D такая гладкая гиперповерхность, что характеристическое слоение на D имеет некомпактные слои, но касательно к расслоению на поверхности (т.е. замыкание по Зарискому общего листа двумерно). Мы показали, что в этом случае X имеет структуру лагранжева расслоения $f : X \to B$, а D прообраз гиперповерхности на базе. Для доказательства использовалась классификация Брунеллы гладких слоений на поверхностях, а также теория деформаций лагранжевых подмногообразий.

По нашим результатам мы подготовили статью "On the characteristic foliation on a smooth hypersurface in a holomorphic symplectic fourfold" (текст см. на https://arxiv.org/abs/1611.00416), которую на днях отправили в журнал.

Другое

Совместно с А. Кузнецовой изучались эндоморфизмы проективных расслоений, в продолжение моей статьи On endomorphisms of projective bundles, Manuscripta Math., 203. В той статье было доказано, что проективное расслоение над проективным многообразием допускает эндоморфизм степени больше 1, коммутирующий с проекцией на базу, если и только если расслоение тривиализуется после конечного накрытия. Еще было доказано для расслоений на проективные прямые, что существование эндоморфизмов степени больше 1, не обязательно коммутирующих с проекцией на базу, связано с расщеплением расслоения. В заметке с А. Кузнецовой мы доказали результат того же типа для расслоений произвольного ранга,ограничившись некоторым специальным классом баз. А именно, если первые когомологии линейных расслоений на базе B обращаются в нуль и B односвязна,то расслоение над B с эндоморфизмами должно полностью расщепляться. По нашим результатам мы написали заметку Endomorphisms of projective bundles over a certain class of varieties , см. https://arxiv.org/abs/1609.00910.

II

Опубликованные работы

1. Amerik, Ekaterina; Kurlberg, Pär; Nguyen, Khoa D.; Towsley, Adam; Viray, Bianca; Voloch, José Felipe Evidence for the dynamical Brauer-Manin criterion. Exp. Math. 25 (2016), no. 1, 54–65.

2. Amerik, Ekaterina; Verbitsky, Misha Hyperbolic geometry of the ample cone of a hyperk'ahler manifold. Res. Math. Sci. 3 (2016), Paper No. 7, 9 pp.

Работы, принятые в печать

1. Journal of the LMS: Characteristic foliation on non-uniruled smooth divisors on hyperk'ahler manifolds Ekaterina Amerik, Frédéric Campana

2. Annales Scientifiques de l'ENS: Morrison-Kawamata cone conjecture for hyperkahler manifolds Ekaterina Amerik, Misha Verbitsky

Работы, отправленные в журналы

1. Construction of automorphisms of hyperkähler manifolds. Ekaterina Amerik, Misha Verbitsky

2. Collections of parabolic orbits in homogeneous spaces, homogeneous dynamics and hyperkahler geometry. Ekaterina Amerik, Misha Verbitsky

3. Endomorphisms of projective bundles over a certain class of varieties. Ekaterina Amerik, Alexandra Kuznetsova

4. On the characteristic foliation on a smooth hypersurface in a holomorphic symplectic fourfold. Ekaterina Amerik, Lyalya Guseva

III Конференции (в качестве приглашенного докладчика)

March 2-6, KIAS, Seoul, Korea, Workshop on foliations

May 30–June 3, CIRM, Luminy, France Topology of algebraic manifolds

June 12-16, Bedlewo, Polska, Varieties with trivial canonical class

September 12-14, Many faces of geometry, workshop in honor of F. Bogomolov, Nottingham, UK

Курс лекций на летней школе "Алгебра и геометрия"в Ярославле в июле

IV Научное руководство: дипломами А. Кузнецовой и Л. Гусевой, которые превратились в совместные статьи, см. выше; магистерской диссертацией Е. Черкасского об эндоморфизмах алгебраических поверхностей. Преподавание: матфак ВШЭ, 2 курс, "Теория Галуа".