ОТЧЕТ ПО ГРАНТУ ФОНДА “МОЛОДАЯ МАТЕМАТИКА РОССИИ” ЗА 2017 Г.

АЙЗЕНБЕРГ АНТОН АНДРЕЕВИЧ

1. Полученные результаты

1.1. **Многообразия изоспектральных матриц.** В 2017 году я продолжил изучение топологии многообразий с действием тора и ее связи с задачами комбинаторики.

Совместно с В.М.Бухштабером мы начали изучать пространства изоспектральных разреженных матриц с точки зрения торической топологии, комбинаторики и теории динамических систем. Под разреженной матрицей понимается эрмитова матрица с нулями на заданных позициях. Под словом “изоспектральный” предполагается, что рассматриваются матрицы с фиксированными попарно различными собственными значениями (простой спектр). Классическим примером такого пространства является многообразие трехдиагональных эрмитовых матриц с фиксированным простым спектром. Это пространство обладает богатой структурой.

Во-первых, на нем имеется классическая динамическая система – непериодический поток Тоды. Дифференциальные уравнения потока Тоды нелинейны, однако его свойства хорошо изучены. Известно, что собственные значения матрицы постоянны вдоль траектории потока, то есть являются интегралами движения. Кроме того, известно, что на бесконечности все траектории потока стремятся к диагональным матрицам. Именно этот факт позволяет доказать гладкость пространства трехдиагональных изоспектральных матриц.

Во-вторых, на этом многообразии имеется действие компактного тора половинной размерности. Пространство орбит этого действия есть множество всех изоспектральных трехдиагональных симметричных матриц, у которых под (и над) диагональю стоят неотрицательные числа. Это множество представляет из себя многообразие с углами. Согласно классическим результатам Мозера и Томеи, пространство орбит диффеоморфно знаменитому выпуклому многограннику – пермутоэдру. Таким образом, многообразие всех изоспектральных трехдиагональных матриц является квазиторическим многообразием (но при этом не является торическим).

Мы стали подробно рассматривать другие примеры.

1.2. **Множество изоспектральных матриц-стрелок.** Матрица-стрелка – это эрмитова матрица, у которой на всех местах кроме диагонали, первой строки и первого столбца, стоят нули. Прямых аналогов системы Тоды на таком пространстве, к сожалению, нет. Однако, нам удалось доказать, что оно является гладким многообразием, и на нем есть действие компактного тора половинной размерности. Пространство орбит этого действия опять является многообразием с углами, однако, в отличие от трехдиагонального случая, не является многогранником. Пространство орбит имеет весьма вычурную топологию.

Первый нетривиальный пример возникает для матриц 4×4. Пространство изоспектральных эрмитовых матриц-стрелок размера 4×4 является гладким 6-мерным многообразием. Его пространство орбит по действию тора является бубликом (полноторием), граница которого регулярным образом разбита на шестиугольники. Такой объект многогранником не является, но все его собственные грани — являются.

В серии предыдущих статей я разработал технику, позволяющую описывать когомологии и эквивариантные когомологии многообразий, на которых действует тор половинной размерности, а все собственные грани пространства орбит - ацикличны (т.е. являются гомологическими многогранниками). Многообразие матриц-стрелок размера 4×4 оказалось идеальным примером, на котором эту технику можно было протестировать. Мы описали алгебро-топологические инварианты этого многообразия. Остается вопрос, какое место это конкретное многообразие занимает в классификации 6-мерных многообразий: на этот вопрос мы постараемся ответить в следующем году.

Для матриц-стрелок размеров больших чем 4×4, мы изучили пространство орбит. С помощью теории нерв-комплексов, разработанной в моей диссертации и совместной работе с В.М.Бухштабером, мы доказали, что пространство орбит гомотопически эквивалентно кубическому подкомплексу пермутоэдра. Для матриц 4×4 - это просто граница шестиугольника, т.е. окружность. Для матриц 5×5 кубический подкомплекс пермутоэдра легко нарисовать: он гомотопен букету 7 окружностей. По-видимому, матрицы 6×6 уже дают более сложную топологию. В дальнейших планах: посчитать числа Бетти кубических подкомплексов пермутоэдра в больших размерностях.

Хочется отметить один важный факт. Известно, что многие алгоритмы вычислительной математики (такие как QR-разложение) хорошо работают на трехдиагональных матрицах, но "ломаются" на других типах матриц, например, на матрицах-стрелках. Может оказаться, что причина этого кроется в более сложной топологической структуре пространств матриц-стрелок, по сравнению с пространствами трехдиагональных матриц. Кажется, что тут есть предпосылки к дальнейшему сотрудничеству топологов и специалистов в вычислительной математике.

1.3. **Множество изоспектральных ступенчато-эрмитовых матриц.** Ступенчато-эрмитова матрица – это матрица, у которой фиксирован ступенчатый контур над (и под) диагональю, вне которого матричные элементы нулевые. Контур определяется так называемой функцией Хессенберга. Количество возможных функций Хессенберга (а значит и задаваемых ими многообразий) равно числу Каталана. Пусть h – функция Хессенберга, а X_h – соответствующее пространство.

На пространстве X_h имеется аналог потока Тоды, обладающий хорошими асимптотическими свойствами, что позволяет доказать гладкость многообразия X_h. Мы применяем теорию Морса и ГКМ-теорию для описания когомологий и эквивариантных когомологий X_h. Частично эти результаты были известны ранее.

Нашей основной целью в этом поле деятельности было изучение взаимосвязи многообразия X_h с многообразиями Хессенберга Y_h. Каждой функции Хессенберга h можно сопоставить алгебраическое подмногообразие Хессенберга Y_h в многообразии полных комплексных флагов. Факт, который, по-видимому, ранее в работах не обсуждался, таков: многообразия X_h и Y_h различны, хотя и имеют много общего (одинаковые пространства орбит по действию тора, одинаковые числа Бетти, изоморфные кольца эквивариантных когомологий). Мы стали изучать эту взаимосвязь более детально и оказалось, что существует подмногообразие Z_h в группе Ли $U(n)$ унитарных матриц, такое что его фактор по левому действию компактного тора есть X_h, а фактор по правому действию есть Y_h. Объекты, подобные многообразиям Z_h, заслуживают дальнейшего изучения.

1.4. **Комбинаторная геометрия периодического потока Тоды.** Последний класс примеров, над которым я начал работать — это периодические трехдиагональные матрицы, т.е. эрмитовы матрицы, у которых ненулевые элементы допускаются только на диагонали, под диагональю, над диагональю, а также в левом нижнем и правом верхнем углах. На пространстве таких матриц действует периодический поток Тоды. Он хорошими асимптотическими свойствами не обладает, однако его поведение вне точек вырождения попадает под теорему Лиувилля–Арнольда.

Я стал рассматривать точки вырождения этого пространства, т.е. множество всех матриц, у которых хотя бы один внедиагональный элемент равен нулю (конечно, из числа тех, которые в принципе допускаются ненулевыми). В этом случае периодический поток Тоды вырождается в непериодический поток Тоды. Топологию множества точек вырождения оказалось удобным описать при помощи замощения евклидова пространства параллельными копиями правильного пермутоэдра. Возникающие в задаче о периодическом потоке Тоды комбинаторные структуры тесно связаны с циклопермутоэдром Г.Паниной. Исследование этой взаимосвязи – также предмет исследования на следующий год.

2. Публикации

- Ayzenberg A., Masuda M., Park S., Zeng H. Cohomology of toric origami manifolds with acyclic proper faces, Journal of Symplectic Geometry. 2017. Vol. 15. No. 3. P. 645–685.
- Айзенберг А. А. Локально стандартные действия тора и пучки над множествами Буксбаума, Математический сборник. 2017. Т. 208. No. 9. С. 3–25.

3. Конференции и доклады

- Британско-Российский семинар по торической топологии и теории гомотопий, Москва, Россия, 2017. Доклад: Spectral sequences associated with torus actions.
- Princeton-Rider Workshop “On the Homotopy Theory of Polyhedral Products”, Принстон, США, 2017. Доклад: Toric Origami Structures on Quasitoric Manifolds and Fatness of 3-Polytopes.
- International Open Chinese-Russian conference “Algebraic topology, geometry and combinatorics of manifolds”, Санья, Китай, 2017. Доклад: Algebras of multi-fans and combinatorics of pseudomanifolds.
- Семинар “Алгебраическая топология”, МГУ, доклад: Многообразие изоспектральных эрмитовых матриц-стрелок.
- Семинар “Дифференциальные операторы на сингулярных пространствах, алгебраически интегрируемые системы и квантование”, МГУ, доклад: Объемы мульти-многогранников и алгебры мульти-вееров.
- Семинар отдела геометрии и топологии МИАН “Геометрия, топология и математическая физика”, доклад: Многообразия ступенчатых изоспектральных матриц и многообразия Хессенберга.
- Invited talk at Shanghai Jiao Tong University: Combinatorics and toric topology of spaces of isospectral matrices.

4. Совместная работа

Продолжается сотрудничество с М.Масудой из Osaka City University и его научной школой. Взаимодействие с Яокуном Ву и Тюдором Ратью из Shanghai Jiao Tong University.

5. Педагогическая деятельность

Весна 2017: курс Топология-3 в НМУ, 15 лекций. Подготовлены конспекты лекций и листки семинаров.

Весна 2017: вел семинары по Мат.анализу на 1 курсе ФКН ВШЭ.

Весна 2017: вел семинары по Дифференциальным уравнениям на 2 курсе на ФКН ВШЭ.

Осень 2017: веду семинары по Мат.анализу на 1 курсе ФКН ВШЭ.

Осень 2017: веду семинары по Мат.анализу на 2 курсе ФКН ВШЭ.

Был руководителем научно-педагогической летней практики у пятерых студентов ФКН ВШЭ.

Руководитель курсовой работы у одного студента ФКН ВШЭ в 2017-2018 учебном году.