ОТЧЕТ ПО ГРАНТУ ФОНДА “МОЛОДАЯ МАТЕМАТИКА РОССИИ” ЗА 2018 Г.

АЙЗЕНБЕРГ АНТОН АНДРЕЕВИЧ

1. Полученные результаты

1.1. **Многообразия изоспектральных матриц.** В этом году я стал заниматься следующей задачей: описать топологию пространства эрмитовых (или симметричных вещественных) матриц, имеющих заданные попарно различне собственные значения, и нули на заданных позициях. Решение этой задачи хорошо известно в некоторых частных случаях. Если условие на нули вообще не накладывается, то пространство изоспектральных эрмитовых матриц совпадает с многообразием полных флагов в $\mathbb{C}^n$. Пространство изоспектральных трехдиагональных эрмитовых матриц является гладким многообразием и обладает действием компактного тора половинной размерности, причем пространство его орбит диффеоморфно, как многообразие с углами, знаменитому простому многограннику — пермутоэдру [Tomei, Davis–Januszkiewicz]. В современных терминах такие многообразия называются квазиторическими. Заметим, что это многообразие не является торическим, хотя при этом оно тесно связано с пермутоэдрическим торическим многообразием [Bloch–Flaschka–Ratiu].

В течение этого года, частично в совместных работах с В.М.Бухштабером, мы стали исследовать пространства изоспектральных матриц другой формы.

1) Мы (Айзенберг–Бухштабер) изучили естественный класс ступенчатых матриц, который включает в себя два крайних случая: трехдиагональные и полные матрицы, описанные выше. Ступенчатая форма матрицы описывается функцией Хессенберга. Вопрос о таких матрицах ставился в математике и раньше [De Mari–Pedroni, De Mari–Procesi–Shayman], в связи с изучением так называемых (алгебраических) многообразий Хессенберга. Мы обратили внимание, что в литературе имеется некоторая путаница: в действительности есть два пространства, которые можно естественным образом построить по функции Хессенберга: многообразие Хессенберга и многообразие изоспектральных ступенчатых матриц. И на том и на другом действует компактный тор. Эти два пространства имеют много общего: одинаковые числа Бетти, изоморфные кольца эквивариантных когомологий, одинаковую структуру пространства орбит. Однако, вообще говоря, эти многообразия не диффеоморфны, как показывают простейшие примеры. Мы изучили, откуда берется такая взаимосвязь и ввели понятие “подпространств–двойников” в многообразии полных флагов.

Открылся ряд новых исследовательских задач. Например, в дальнейших планах — изучить как связаны между собой поток полной симметрической цепочки Тоды на многообразии ступенчатых матриц и поток Бялыницкого-Бирули на многообразии Хессенберга. Новые результаты и обзор имеющихся опубликованы в препринте, текст готовится к публикации

https://arxiv.org/abs/1803.01132.

2) Мы (Айзенберг–Бухштабер) изучили пространство изоспектральных матриц-стрелок: матриц, у которых ненулевые элементы допускаются только на диагонали, в первой строке и первом столбце. Доказали, что такое подпространство является гладким многообразием, и его тип диффеоморфизма не зависит от выбора простого спектра. Это многообразие, аналогично многообразию трехдиагональных матриц, несет действие тора половинной размерности, и его пространство орбит является многообразием с углами. Однако, в этом примере пространство орбит не диффеоморфно простому многограннику. Мы описали гомотопический тип пространства орбит в комбинаторно-топологических терминах. В частном случае матриц-стрелок 4x4, пространство орбит гомеоморфно полноторию, граница которого разбита регулярным образом на шестиугольники.

Ранее я (частично совместно с Masuda–Park–Zeng) разработал инструментарий для вычисления когомологий и эквивариантных когомологий многообразий с действием тора половинной размерности, пространства орбит которых имеют ацикличные грани. Этот общий инструментарий оказался применим к описанному выше 6-мерному многообразию изоспектральных матриц-стрелок размера 4x4, а также его "двойнику", см.п.1. Из полученных нами результатов следует, что существует целое семейство форм матриц (т.н. древесные матрицы), изоспектральные пространства которых несут действие тора половинной размерности, и имеют нетривиальные пространства орбит (т.е. не многогранники). Это открывает простор для новой работы.

Результаты изложены в препринте, текст готовится к публикации https://arxiv.org/abs/1803.10449.

3) Еще один естественный класс матриц: периодические трехдиагональные матрицы — трехдиагональные матрицы с дополнительными элементами в углах. Матрицы такого вида естественным образом возникают в математической физике, в связи с исследованием разностного периодического уравнения Шрӵдингера и потока периодической цепочки Тоды. Пространство изоспектральных эрмитовых периодических трехдиагональных матриц имеет размерность $2n$, и несет две структуры: эффективное действие тора размерности $n-1$, и интегрируемую динамическую систему: поток Тоды. Используя эти две структуры, удается полностью описать топологию изоспектрального пространства и фазовый портрет потока на этом пространстве. Несмотря на то, что все ингредиенты для такого описания были давно известны [van Moerbeke, Tomei, Кричевер, Кричевер–Ванинский], полученный результат оказывается, по-видимому, новым: раньше не задумывались о том, как соотносятся периодическая и открытая цепочка Тоды с топологической точки зрения.

При описании множества, на котором периодическая цепочка Тоды вырождается в открытую цепочку Тоды, удивительным образом возникает нетривиальная комбинаторная геометрия. Известно, что евклидово пространство можно замостить параллельными копиями правильного пермутоэдра. Если факторизовать такое замощение по определенной подрешетке, то получится некоторое специальное замощение тора пермутоэдрами, которое я назвал "замечательным разбиением". Во-первых, именно замечательное разбиение кодирует множество вырождения цепочки Тоды. Во-вторых, что тоже удивительно, клеточная структура, Пуанкаре-двойственная к замечательному разбиению, является минимальной по числу вершин симплициально-клеточной структурой на торе (или, в терминах работы Ferri–Gagliardi–Grasselli, "кристаллизацией").

Оказывается, что само пространство изоспектральных периодических трехдиагональных матриц не обязано быть гладким многообразием — это первый известный нам пример изоспектральных пространств, которые могут вырождаться. При помощи разностного уравнения Шрӵдингера, я получил условие на спектр, при котором исследуемое пространство является многообразием. Также описано его пространство орбит относительно действия тора, числа Бетти и эквивариантные когомологии. Стоит отметить, что периодические матрицы 3x3 - это просто полные матрицы, а значит исследуемое пространство совпадает с многообразием полных флагов в $\mathbb{C}^3$. Из моих результатов следует, что пространство орбит в этом случае гомеоморфно сфере S^4. Этот результат был ранее получен в работе Бухштабера-Терзич.

В случае вещественных матриц получается аналогичный результат, который гласит, что фактор многообразия полных вещественных флагов в R^3 гомеоморфен S^3. Поскольку само многообразие флагов является однородным пространством для ортогональной группы, можно записать утверждение в более симметричной форме

$$\mathbb{Z}_2^3 \backslash O(3)/\mathbb{Z}_2 \cong S^3.$$

Этот результат имеет интересную и нетривиальную связь с материаловедением и кристаллографией. Пространства вида $G\backslash O(3)/H$, где G, H — дискретные подгруппы $O(3)$, называются пространствами разориентаций, и имеют важное значение для математического описания структуры поликристаллических материалов. Тот факт, что подобное пространство может иметь простую топологию, судя по всему, в материаловедении не был известен. Планируется продолжить работу в этом направлении.

Результаты о пространстве эрмитовых периодических трехдиагональных матриц собраны в препринте, подан в печать.

https://arxiv.org/abs/1803.11433.

Планируется написать еще одну статью о вещественном случае, и связи с задачей о пространстве разориентаций.

1.2. **Действия тора сложности один.** Эффективное действие компактного тора T^{n-1} на многообразии M^{2n} называется действием сложности один. Мы предполагаем, что у действия есть неподвижные точки и они изолированы. Важными для нас примерами таких действий являются

(1) Действие T^3 на комплексном грассманиане $G_{4,2}$;
(2) Действие T^2 на многообразии полных комплексных флагов F_3;
(3) Действие T^2 на почти комплексной сфере S^6;
(4) Действие T^3 на кватернионной проективной плоскости $\mathbb{H}P^2$;
(5) Ограничение действия T^n на M^{2n} на подтор $T^{n-1} \subset T^n$ в общем положении.
(6) Действие тора T^{n-1} на пространстве изоспектральных периодических трехдиагональных матриц (в случае, когда это пространство является многообразием).

Бухштабер–Терзич в недавней работе с помощью развитой ими техники доказали, что $G_{4,2}/T^3 \cong S^5$ и $F_3/T^2 \cong S^4$. Я доказал, что при определенных условиях на веса действия в неподвижных точках, пространство орбит является топологическим многообразием. Также я доказал, что ограничения действий половинной размерности имеют в пространстве орбит сферу, при условии, что исходное действие большого тора давало в пространстве орбит диск. Была разработана техника, позволяющая дать топологическую классификацию действий сложности один. Эта техника, в том числе, была использована для изучения пространства изоспектральных периодических трехдиагональных матриц.

В готовящейся работе я доказываю, что $S^6/T^2 \cong S^4$ и $\mathbb{H}P^2/T^3 \cong S^5$. Последний гомеоморфизм тесно связан с результатом Арнольда, который утверждает $\mathbb{H}P^2/S^1 \cong S^7$, и имеет похожее доказательство, опирающееся на свойства спектроэдра (многогранника нормированных положительно определенных квадратичных форм).

Примеры показывают, что существует взаимосвязь между сферичностью пространства орбит, и эквивариантной формальностью многообразия с действием тора сложности один в смысле Горески–Макферсона. В дальнейшем планируется крупный проект по изучению этой взаимосвязи.

Работа о действиях сложности один:

А. А. Айзенберг, “Торические действия сложности 1 и их локальные свойства”, Топология и физика, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Сергея Петровича Новикова, Тр. МИАН, 302, 2018 (в печати); https://arxiv.org/abs/1802.08828.

Работа о кватернионной проективной плоскости в процессе подготовки.

2. Публикации

А. А. Айзенберг, “Торические действия сложности 1 и их локальные свойства”, Топология и физика, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Сергея Петровича Новикова, Тр. МИАН, 302, 2018 (в печати); https://arxiv.org/abs/1802.08828.

3. Конференции, школы, доклады

Выступал с курсом лекций “Пространства матриц и многогранники” в летней школе “Современная математика” в 2018 году.

Традиционно читал лекции Летней Многопрофильной Школе при МЦНМО. В этом году читал курсы “Комбинаторная топология” и “Квантовая информатика”.

Доклады на семинарах и конференциях:

- Семинар. Дифференциальные операторы на сингулярных пространствах, алгебраически интегрируемые системы и квантование, доклад “Пространства периодических трехдиагональных матриц и немного кристаллографии”.

- Семинар. Дифференциальные операторы на сингулярных пространствах, алгебраически интегрируемые системы и квантование. Доклад "Периодический поток Тоды и пермутоэдрический паркет".
- Семинар. Группы Ли и теория инвариантов. Доклад "Топология действий компактного тора сложности один".
- Заседания Московского математического общества. Доклад "Топология пространств изоспектральных эрмитовых матриц, инвариантных относительно действия тора"
- Семинар по геометрической топологии. Доклад "Spaces of isospectral Hermitian matrices having zeroes at prescribed positions".
- Семинар. Алгебраическая топология и еч приложения. Семинар им. М. М. Постникова. Доклад "Изоспектральное пространство периодических трехдиагональных эрмитовых матриц".
- Семинар отдела геометрии и топологии МИАН "Геометрия, топология и математическая физика". Доклад "Многообразия ступенчатых изоспектральных матриц и многообразия Хессенберга".
- Семинар Алгебраическая топология и еч приложения. Семинар им. М. М. Постникова. Доклад "Многообразие изоспектральных эрмитовых матриц-стрелок".
- Приглашенный доклад в OCAMI, Осака, Япония: OCAMI special talk, Osaka, Japan, 2018. Доклад: "Periodic tridiagonal matrices: where toric topology, combinatorics, and mathematical physics meet".
- Докладе на семинаре в OCU, Университет города Осака: "Space of isospectral arrow-matrices".
- Пленарный доклад (Айзенберг-Бухштабер, докладчик Айзенберг). International conference "Glances@Manifolds 2018", Krakow, Poland, 2018. Доклад: "Manifolds with torus actions, their orbit spaces and universal spaces of parameters".
- Приглашенный доклад. Кумамото, Япония, The 45th Symposium on Transformation Groups: "Orbit spaces of complexity one torus actions"
- Приглашенный доклад. "Hessenberg varieties 2018 in Osaka", Осака, Япония: "Torus actions on manifolds of isospectral Hermitian matrices".

Кроме того, был членом орг.комитета конференции "Международная конференция "Алгебраическая топология, комбинаторика и математическая физика", посвященной 75-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН В.М. Бухштабера"

4. Работа в научных центрах и научных группах

Продолжается сотрудничество с М.Масудой из Osaka City University и его научной школой на почве торической топологии.

Сотрудничество с Международной лабораторией стохастических алгоритмов и анализа многомерных данных ФКН ВШЭ на почве совместного изучения прикладной алгебраической топологии, создан семинар по топологическому анализу данных, на котором разбираются задачи интересные как специалистам в статистике, так и топологам.

Сотрудничество с Центром нейронаук и когнитивных наук на ФФМ МГУ на почве исследования мозга топологическими и геометрическими методами. Возник совместный семинар "Топология мозга", на котором, в частности, я сделал два доклада: о числах Бетти и их применений в нейронауке, и о нерв-лемме и ее применении для восстановления топологии физического пространства по активности нейронов места в гиппокампе.

5. Педагогическая деятельность

Весна 2018: вел семинары по Мат.анализу на 1 курсе ФКН ВШЭ.

Весна 2018: вел семинары и выполнял обязанности, связанные с администрированием учебного курса по Мат.анализу на 2 курсе ФКН ВШЭ.

Весна 2018: вел семинары по Дифф.уравнениям на 2 курсе ФКН ВШЭ.

Осень 2018: читаю лекции и веду семинары на основном потоке учебной программы "Прикладная математика и информатика" ФКН ВШЭ по Мат.анализу, 1 курс.

Был руководителем научно-педагогической летней практики у семи студентов ФКН ВШЭ. По результатам летней практики одна студентка готовит доклад на студенческую конференцию.

Руководитель курсовой работы у одного студента ФКН ВШЭ в 2017-2018 учебном году, защищена на “7 из 10”. Руководитель курсовых работ у трех других студентов ФКН ВШЭ в 2018-2019 году.

6. Итоги трех лет

Как и было указано в заявке, я работал над действиями тора на многообразиях и их взаимосвязями с комбинаторной и выпуклой геометрией, а также коммутативной и гомологиеской алгеброй. Однако, конкретное направление исследований ушло от изначально запланированного.

Вместо общих результатов о момент-угол многообразиях и многообразиях с действием тора половинной размерности, я сосредоточился на конкретных примерах, по большей части происходящих из изоспектральных эрмитовых матриц. Удалось найти обширную область примеров, к которым оказались применимы методы, разработанные мной ранее. При этом открылись взаимосвязи исследуемой области с неизвестными мне до последнего времени областями, такими как динамические системы, кристаллография, исследование кватернионной и октонионной проективных плоскостей. Я считаю это обстоятельство наиболее важным результатом деятельности за последние два года: я узнал много нового в привязке к теме своей специализации. Полученные результаты, как я надеюсь, составят основное содержание докторской диссертации.

Касательно общих вопросов торических действий — акцент моей исследовательской деятельности сместился в сторону торических действий сложности один. Я понял, что с топологической точки зрения имеется очень мало результатов про такие действия, в то время как торические действия сложности ноль хорошо изучены. Вопрос о топологии пространств орбит, по всей видимости, не рассматривался до 2014 года, когда Бухштабер–Терзич получили свои результаты о грассманиане $G_{4,2}$ и многообразии флагов F_3. Пространства орбит действия тора в обоих случаях оказались сферами. Этот результат не случаен: примеры показывают, что в большинстве естественных примеров действий сложности один пространства орбит гомеоморфны сферам. Я считаю содержательной исследовательской задачей: найти критерий сферичности пространства орбит действия сложности один.

Сформулированная задача, на мой взгляд, может быть связана с другими яркими топологическими результатами: теоремой Кейпера–Масси о факторе $\mathbb{C}P^2$ по комплексному сопряжению (фактор гомеоморфен сфере S^4), теоремой Ботта о пространстве не более чем трехэлементных подмножеств окружности (это пространство гомеоморфно сфере S^3), и теоремой Васильева о когерентном джойне грассманианов (который, опять же, гомеоморфен сфере).

В последний год я стал интересоваться темами, связанными с приложениями алгебраической топологии. Хотя пока собственных результатов в этом направлении у меня нет, уже намечаются интересные задачи, идет работа со студентами.

Считаю, что эти три года прошли продуктивно: мою работу отметили премией Московского Математического Общества в России и премией OCAMI Foundation Special Prize в Японии. За это время я узнал много интересной математики и познакомился со многими интересными математиками. Я искренне благодарен фонду Молодая Математика России за предоставленную поддержку.