ОТЧЕТ ПО ГРАНТУ ФОНДА "МОЛОДАЯ МАТЕМАТИКА РОССИИ" ЗА 2016 Г.

АЙЗЕНБЕРГ АНТОН АНДРЕЕВИЧ

1. Полученные результаты

1.1. **Алгебры мульти-вееров.** Основной результат 2015 года — разрешение и последующее уточнение гипотезы, поставленной в совместной работе с М.Масудой [3,6]. Речь в ней шла о комбинаторно-алгебраической структуре мульти-вееров.

Псевдомногообразием называется симплициальный комплекс, у которого все максимальные по включению симплексы имеют одинаковую размерность, и каждый симплекс коразмерности 1 содержится ровно в двух максимальных. Псевдомногообразие называется ориентируемым, если все его максимальные симплексы допускают согласованные ориентации. Допустим, что каждой вершине i n-мерного псевдомногообразия K приписан вектор $\lambda(i) \in \mathbb{R}^n$ так, что векторы, записанные на вершинах каждого максимального симплекса образуют базис — правильная векторная раскраска. По этим данным можно построить совокупность симплициальных конусов в $\mathbb{R}^n$: для каждого симплекса $I \in K$ натянем конус на векторы, приписанные его вершинам, и снабдим максимальные конусы знаком $\pm$ в зависимости от того, совпадает ориентация симплекса с ориентацией полученного базиса, или нет. Такая совокупность конусов называется (симплициальным) мульти-веером.

Мульти-вееры естественным образом возникают при исследовании гладких многообразий с действием компактного тора половинной размерности (тор-многообразия), точно так же как обычные вееры возникают при исследовании торических многообразий в алгебраической геометрии. Тем не менее, оказалось, что у теории мульти-вееров богатый комбинаторный потенциал, позволяющий получить наглядное описание для некоторых результатов из коммутативной алгебры.

Напомним, что по обычному вееру Δ можно определить многочлен объема — это многочлен, значениями которого являются объемы всех выпуклых многогранников, нормальный веер которых совпадает с Δ. Эту конструкцию можно без существенных изменений перенести на мульти-вееры. Мульти-многогранником называется мульти-веер, в котором для каждого одномерного конуса указана аффинная гиперплоскость H_i, перпендикулярная вектору $\lambda(i)$. Для каждого мульти-многогранника можно определить объем, причем этот объем полиномиально зависит от позиций гиперплоскостей H_i. Таким образом, каждый мульти-веер Δ задает однородный многочлен объема V_Δ.

В коммутативной алгебре имеется следующий факт, известный как двойственность Маколея: однородные многочлены степени n биективно соответствуют алгебрам с двойственностью Пуанкаре с фиксированной системой линейных порождающих. По многочлену $P(c_1, \ldots, c_m)$ можно построить алгебру Пуанкаре, рассмотрев фактор алгебры дифференциальных операторов $\mathbb{R}[\frac{\partial}{\partial c_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial c_m}]$ по аннулятору многочлена P.

Применение этой конструкции к многочлену объема полного симплциального веера дает алгебру когомологий соответствующего торического многообразия. В частности, размерности градуированных компонент этой алгебры — это знаменитые h-числа. Они несут информацию о комбинаторике исходного веера.

Мы с Масудой задались естественным вопросом: что получится, если применить двойственность Маколея к многочлену объема произвольного мульти-веера? Оказалось, что если исходное псевдомногообразие является гомологической сферой, то полученная алгебра Пуанкаре есть фактор алгебры Стенли–Райснера по линейной системе параметров, так же как и в случае обычных вееров. В этом случае, размерности градуированных компонент алгебры по-прежнему совпадают с h-числами. Если же исходное псевдомногообразие является гомологическим многообразием, то алгебра Пуанкаре соответствующего мульти-веера совпадает с горенштейновой алгеброй, построенной Новик–Шварцем в 2009г. довольно сложным алгебраическим способом. В этом случае размерности градуированных компонент алгебры также известны — это так называемые h''-числа гомологического многообразия. Они выражаются через числа симплексов каждой размерности и числа Бетти многообразия.

В этих случаях размерности градуированных компонент алгебры Пуанкаре мульти-веера зависят только от исходного симплициального комплекса K, но не от векторной раскраски его вершин. Мы предположили, что это выполнено всегда.

Гипотеза оказалась неверной. В [6] я привел пример псевдомногообразия, над которым существуют мульти-вееры, чьи алгебры Пуанкаре имеют разные размерности. Это потребовало некоторого развития теории: удалось доказать, что размерности не зависят от значений векторной раскраски в вершинах псевдомногообразия, имеющих сферические линки. Первым интересным примером псевдомногообразия, имеющего несферические линки вершин, является надстройка над двумерным тором. Именно такое псевдомногообразие и дало контрпример к гипотезе, хотя проверять это пришлось на компьютере (была написана небольшая программа в среде GAP, вычисляющая многочлены объема и размерности соотверствующей алгебры Пуанкаре по формулам, полученным нами ранее).

Возникли новые вопросы. Поскольку размерности компонент алгебры Пуанкаре не являются инвариантом, резонно спросить, какими они могут быть для данного псевдомногообразия, и что говорят о его комбинаторике. Например, количество возможных размерностей, возникающих из данного псевдомногообразия является инвариантом класса бизвездной эквивалентности. В частности, количество размерностей является топологическим инвариантом для трехмерных псевдомногообразий с изолированными особенностями. Связан ли этот инвариант с квантовыми инвариантами трехмерных псевдомногообразий?

Общего ответа пока нет, но просчитанные на компьютере примеры выявили интересные закономерности. Я рассматривал псевдомногообразия следующего вида: берется зацепление в S^3, и каждая его компонента схлопывается в точку. Оказывается, что размерности алгебры Пуанкаре не зависят от векторной раскраски, если все компоненты зацепления были попарно незацеплены, и зависят, если были зацепленные компоненты. Особенно удивительно, что это верно для зацепления Борромео. Возникает некая зависимость между структурой алгебр Пуанкаре и когомологической структурой псевдомногообразия. Эту зависимость, безусловно, стоит исследовать.

1.2. **Когомологии тор-многообразий.** Работа велась также в иных направлениях. Для обычных вееров, соответствующая алгебра Пуанкаре совпадает с алгеброй когомологий торического многообразия. Для мульти-вееров это уже не верно, однако мы показали, что алгебра мульти-веера является подфактором алгебры когомологий тор-многообразия. Возникла гипотеза, частично описывающая кольцо когомологий тор-многообразия в терминах соотношений Минковского. Я проверил эту гипотезу для широкого класса тор-многообразий в [1,2,4].

1.3. **Трехмерные многогранники Дельзана.** n-мерный многогранник называется многогранником Дельзана, если все его нормали целочисленны, в каждой вершине сходится ровно n гиперграней, и нормали к этим гиперграням, сходящимся в вершине, образуют базис решетки. Важность таких многогранников проистекает из классификационной теоремы Дельзана, согласно которой многогранники Дельзана кодируют всевозможные симплектические торические многообразия.

Оказывается, что у трехмерного многогранника Дельзана есть треугольная или четырехугольная грань. Этот результат был известен ранее (C.Delaunay, 2005), однако используемая в доказательстве техника была непонятна, во всяком случае интересующимся этим результатом топологам. В связи с этим требовалось независимая проверка. Я по возможности упростил доказательство Делоне в [5] (хотя надо отметить, что абсолютно элементарного доказательства как не было, так и нет).

Стало понятно, что ключевой фигурой в доказательстве является эффективный конус — эта выпуклая структура имеется в (ко)гомологиях симплектического торического многообразия, но отсутствует в (ко)гомологиях произвольного тор-многообразия. Некоторые нетривиальные шаги доказательства Делоне можно упростить, воспользовавшись понятием многочлена объема и Маколей-двойственной алгебры Пуанкаре.

2. Публикации

- A. Ayzenberg, *Homology cycles in manifolds with locally standard torus actions*, Homology, Homotopy Appl. 18:1 (2016), 1–23.
- A. Ayzenberg, *Topological model for hvectors of simplicial manifolds*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (2016), 1–9.
- A. Ayzenberg and M. Masuda, *Volume polynomials and duality algebras of multi-fans*, Arnold Math J. (2016) 2: 329–381.
- A. Ayzenberg, *Locally standard torus actions and h'-vectors of simplicial posets*, J. Math. Soc. Japan 68:4 (2016), 1–21.
- * A. Ayzenberg, *Toric manifolds over 3-polytopes*, (2016), arXiv:1607.03377.
- * A. Ayzenberg, *Dimensions of multi-fan algebras*, (2016), arXiv:1607.03889.

3. Конференции, доклады

- “Toric topology 2016 in Kagoshima”, Kagoshima, Japan, 2016. Title of the talk: *Volume polynomials and duality algebras of multi-fans.*
- “Александровские чтения”, Москва, 2016. Доклад: *Торические оригами многообразия и метрические свойства планарных графов.*
- 7-th European Congress of Mathematics, Berlin, Germany, 2016. Contributed talk: *Volume polynomial and Poincare duality algebra of multi-polytope.*
- Заседание Московского Математического Общества, МГУ, 2016. Доклад: “Комбинаторика триангулированных многообразий и многочлены объема”.
- Еженедельный семинар Лаборатории алгебраической геометрии и ее приложений, ВШЭ. Доклад “Алгебры Стенли–Райснера симплициальных многообразий”.
- Семинар “Узлы и теория представлений”, МГУ, 2016. Доклад “Комбинаторика симплициальных многообразий”.
- Семинар “Алгебраическая топология и приложения”, МГУ, 2016. Доклад “Почему не бывает симплектических торических многообразий над додекаэдром?”

4. Совместная работа

Продолжается сотрудничество с М.Масудой из Университета Города Осака.

Во время Конгресса в Берлине возникло плодотворное обсуждение с Т.Янушкевичем, которое, с некоторой вероятностью, выльется в сотрудничество. Сейчас в совместной работе с В.М.Бухштабером мы разбираемся в результатах, о которых рассказал Янушкевич.

5. Педагогическая деятельность

Весна 2016: курс лекций “Комбинаторика, топология и алгебра симплициальных комплексов” в НОЦ МИАН.

Весна 2016: курс “Топология-3” в НМУ, лекции и семинары.

Осень 2016: курс “Торическая топология” в НМУ, лекции.

Осень 2016: веду семинары по матанализу на Факультете Компьютерных Наук ВШЭ.