Михаил Берштейн, Отчет за 2016 год

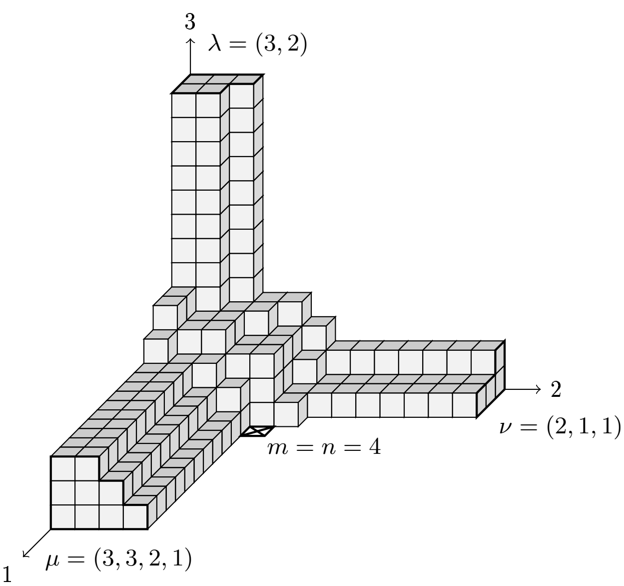
1 Полученные результаты

Мою работу в 2016 году можно разделить на две темы.

1.1. Комбинаторика плоских разбиений и теория представлений

Примерно половина работы [1] посвящена комбинаторике. Мы вычисляем производящую функцию плоских разбиений (трехмерных диаграмм Юнга) с ограничением. Это ограничение в терминах плоских разбиений формулируется как $a_{n+1,m+1} = 0$, в терминах трехмерных диаграмм Юнга как требование, чтобы основание соответствующей диаграммы лежало в «толстом крюке» с шириной руки и ноги n и m соответственно.

Случай $m = 0$ является классическим, по теореме МакМагона производящая функция равна $1/\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)^{\min(k,n)}$, нашей задачей был случай общих m, n. Точнее мы искали производящую функцию трехмерных диаграмм Юнга с фиксированными асимптотиками вдоль осей (производящая функция для пустых асимптотик найдена Г. Мутафяном и Б. Фейгиным в работе 2013 года). Пример трехмерной диаграммы Юнга с асимптотиками и соответствующего плоского разбиения приведен на рисунке 1.



∞	∞	∞	4	4	3	2	2	2	$\cdots$	2
∞	∞	4	4	3	2	1	1	1	$\cdots$	1
5	4	4	3	3	1	1	1	1	$\cdots$	1
5	4	4	3	3	1	0	0	0	$\cdots$	0
4	3	3	2	$\boxtimes$						
3	3	2	1							
3	3	2	1							
3	3	2	1							
3	3	2	1							
3	3	2	1							
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$							
3	3	2	1							

Рис. 1:

Мы нашли формулу для $\chi^{n,m}_{\lambda,\nu,\mu}(q)$ — производящей функции плоских разбиений удовлетворяющих условию ямы в клетке $(m+1, n+1)$ и асимптотикам λ, μ, ν. Ответы достаточно сложные, поэтому в отчеты их я опущу, но прокомментирую их вид. На самом деле мы нашли две формулы для функции $\chi^{n,m}_{\lambda,\nu,\mu}(q)$.

Одна из формул представляет $\chi^{n,m}_{\lambda,\nu,\mu}(q)$ в виде определителя составленного из функций $\chi^{1,0}(q), \chi^{0,1}(q), \chi^{0,1}(q)$. Эта формула похожа по структуре на формулы Якоби-Труди и Джамбелли для симметрических функций Шура (больше всего похожа на их общее обобщение принадлежащее Ласку и Прагачу). Доказывается эта формула при помощи биекции между плоскими разбиениями и наборами несамопересекающихся путей и леммы Линдстрема-Гесселя-Вьено.

Другая формула для $\chi^{n,m}_{\lambda,\nu,\mu}(q)$ может быть названа «бозонной», так как в ней $\chi^{n,m}_{\lambda,\nu,\mu}(q)$ есть линейная комбинация слагаемых вида $q^{\Delta}/\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)^{m+n}$. Она получается из первой формулы как вычисление определителя. Интересно, что она имеет прямое комбинаторное доказательство основанное на формуле Бриона выражающей статсумму по целым точкам многогранника через вклады вершин.

Эти все комбинаторные задачи интересны сами по себе, но реально мотивированы теорией представлений. А именно, такие плоские разбиения нумеруют базис в представлениях квантовой тороидальной алгебры $U_{\vec{q}}(\ddot{\mathfrak{gl}}_1)$. Найденные нами формулы для характеров должны иметь свою материализацию: резольвенту эйлерова характеристика которой равна формуле для характера (подобно тому как резольвента Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда является материализацией формулы Вейля, а резольвента Зелевинского является материализацией формулы Якоби-Труди). В работе мы схематично объясняем, как строить материализацию бозонной формулы, комплекс строится при помощи так называемых скринингов.

Видимо самое интересное свойство формул для $\chi^{n,m}_{\lambda,\nu,\mu}(q)$ это то, что они по структуре очень напоминают известные формулы для характеров тензорных представлений супералгебры Ли $\mathfrak{gl}_{m|n}$. Алгебраическое объяснение этому такое. В конформном пределе алгебры $U_{\vec{q}}(\ddot{\mathfrak{gl}}_1)$ в этих представлениях получается некоторая вертексная алгебра (W алгебра). Категория представлений этой W алгебры должна быть эквивалентна категории представлений произведения трех квантовых групп $U_q\mathfrak{gl}_{n|m} \otimes U_{q'}\mathfrak{gl}_n \otimes U_{q''}\mathfrak{gl}_m$ для некоторых q, q', q''. Наверное должна быть какая-то более элементарная связь между комбинаторикой таких трехмерных диаграмм и комбинаторикой супер полиномов Шура, но этого мы не знаем.

Еще одним указанием на наличие связи с супералгебрами является гипотеза Молева-Мухина. Эта гипотеза утверждает, что характер центра вертексной алгебры построенной по аффинной супералгебре $\widehat{\mathfrak{gl}}_{m|n}$ на критическом уровне равен $\chi^{n,m}_{\varnothing,\varnothing,\varnothing}(q)$. Для случая $m = 0$ это утверждение доказано Фейгиным и Френкелем 25 лет назад, Молев и Мухин доказали его для случая $n = m = 1$. У нас есть некоторые частичные результаты по доказательству в случае произвольных m, n.

1.2. Связь между конформной теорией и изомонодромными деформациями

В 2011 году Гамаюн, Иоргов, Лисовой предложили формулу выражающую тау функцию уравнения Пенлеве VI в виде суммы конформных блоков алгебры Вирасоро. Сейчас это понимается более общо как связь между тау функцией задачи изомонодромной деформации и конформными блоками. Для дальнейшего достаточно самого простого случая который связывает беспараметрическую форму уравнения Пенлеве III и Уиттекеровский предел конформных блоков. Соответствующая формула имеет вид

$$\tau(\sigma, s|z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C(\sigma+n) s^n \mathcal{F}((\sigma+n)^2|z), \tag{1}$$

где s, σ — константы интегрирования, функция $\mathcal{F}(\Delta|z)$ обозначает Уиттекеровский предел конформного блока для алгебры Вирасоро в модуле со старшим весом Δ и центральным зарядом $c = 1$ и функция $C(\sigma) = 1/(\mathsf{G}(1-2\sigma)\mathsf{G}(1+2\sigma))$, где G обозначает G функцию Барнса. Эта формула была доказана разными способами, для дальнейшего важно, что один из них основан на том, что формула (1) подставляется в билинейную формул уравнения Пенлеве. После подстановки получается билинейное соотношение на конформные блоки которое доказывается при помощи вложения суммы двух алгебр Вирасоро в супералгебру (Наша совместная работа с Антоном Щечкиным 2014 года).

Работа [2] посвящена некоторой вариации этого доказательства. В отличии от работы 2014 года мы используем не одну тау функцию, а две τ и τ_1. Эти две тау функции связаны единственным преобразования Бэклунда для уравнения Пенлеве III. Интересно, что есть два способа писать систему билинейных уравнений связывающую τ, τ_1:

$$\begin{cases} D^2_{[\log z]}(\tau,\tau_1) - \dfrac{1}{2}\left(z\dfrac{d}{dz} - \dfrac{1}{8}\right)(\tau\tau_1) = 0, \\ D^3_{[\log z]}(\tau,\tau_1) - \dfrac{1}{2}\left(z\dfrac{d}{dz} - \dfrac{1}{8}\right)D^1_{[\log z]}(\tau,\tau_1) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} D^2_{[\log z]}(\tau,\tau) = 2z^{1/2}\tau_1^2, \\ D^2_{[\log z]}(\tau_1,\tau_1) = 2z^{1/2}\tau^2, \end{cases} \tag{2}$$

Первая форма выше может быть названо системой уравнений Окамото, а вторая системой уравнений Тоды. Через $D^k_{[\log z]}$ здесь обозначен k-й дифференциальный оператор Хироты.

В работе [2] мы показываем как получить обе эти системы при помощи теории представлений. То есть мы подставляем формулу (1) в уравнения систем и доказываем получающиеся билинейные соотношения на конформные блоки. Идея доказательства та же, что и раньше — вложение суммы двух алгебр Вирасоро в некоторую супер興алгебру. Соотношения которые получаются в случае системы Тоды на самом деле уже были доказаны в нашей работе 2014 года. Для системы Окамото получаются новые соотношения, они доказываются при помощи той же супералгебры, но другого ее сектора в котором фермионы разложены не по полуцелым, а по целым степеням (так называемый Рамоновский, а не Невьё-Шварцевский сектор).

У беспараметрической версии уравнения Пенлеве III есть пара алгебраических решений, соответствующие тау функции равны $\tau(z) = z^{1/16}e^{\mp 4\sqrt{z}}$. Мы получаем эту же формулу при помощи теории представлений алгебры Вирасоро, оказывается, что такие тау функции соответствуют представлениям со старшим весом $(n+1/4)^2$. Такие представления иногда называются твистованными потому, что их можно реализовать при помощи алгебры Гейзенберга живущей на двулистном накрытии $\mathbb{C}$ разветвленном в нуле.

Основным результатом другой работы [3] является гипотетическая q-деформация формулы (1). Из чего должна быть составлена правая часть q-деформации было понятно — из так называемых конформных блоков q-деформированной алгебры Вирасоро. При помощи АГТ соответствия эти конформные блоки равны пятимерным Некрасовским статсуммам, которые в свою очередь как известно равны статсуммам топологической теории струн на некоторых торических трехмерных многообразиях Калаби-Яу. Эти объекты сейчас активно изучаются, поэтому и q-деформация формулы (1) интересует многих специалистов.

Слева должна стоять тау функция q-разностного уравнения Пенлеве. Нужно уравнение можно найти в классификации таких уравнений данной Сакаи и после некоторой работы оно имеет простую тау форму:

$$\begin{cases} Z^{1/4}\mathcal{T}_1(qZ)\mathcal{T}_1(q^{-1}Z) = \mathcal{T}_1(Z)^2 + Z^{1/2}\mathcal{T}_3(Z)\mathcal{T}_3(Z), \\ Z^{1/4}\mathcal{T}_3(qZ)\mathcal{T}_3(q^{-1}Z) = \mathcal{T}_3(Z)^2 + Z^{1/2}\mathcal{T}_1(Z)\mathcal{T}_1(Z). \end{cases} \tag{3}$$

Эта система является q-деформацией билинейной системы уравнений Тоды в (2). В результате мы приходим к гипотезе, что общее решение системы (3) может быть записано при помощи функции

$$\mathcal{T}(u,s;q|Z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} s^n C(uq^{2n};q|Z)\frac{\mathcal{F}(uq^{2n};q^{-1},q|Z)}{(uq^{2n+1};q,q)_\infty(u^{-1}q^{-2n+1};q,q)_\infty} \tag{4}$$

где $\mathcal{F}(u;q^{-1},q|Z)$ — обозначает q-деформированный конформный блок, а $C(u;q|Z)$ — это произвольная функция удовлетворяющая системе уравнений

$$\frac{C(uq;q|Z)C(uq^{-1};q|Z)}{C(u;q|Z)^2} = -Z^{1/2} \quad (5)$$

$$\frac{C(uq;q|qZ)C(uq^{-1};q|q^{-1}Z)}{C(u;q|Z)^2} = -uZ^{1/4} \quad (6)$$

$$\frac{C(u;q|qZ)C(u;q|q^{-1}Z)}{C(u;q|Z)^2} = Z^{-1/4}. \quad (7)$$

В работе мы приводим ряд аргументов в пользу данной гипотезы, (проверка в первых порядках, проверка предела $q \to \infty$, вид как соотношения на q-деформированные конформные блоки).

2 Опубликованные и поданные в печать работы

Список литературы

[1] M. Bershtein, B. Feigin, G. Merzon, *Plane partitions with a "pit": generating functions and representation theory*, Submitted to, Sel. Math. New Ser [`arXiv:1512.08779`].

[2] M. Bershtein, A. Shchechkin *Backlund transformation of Painlevé III(D_8) tau function*, Submitted to J. Phys. A: Math. Theor. [`arXiv:1608.02568`].

[3] M. Bershtein, A. Shchechkin *q-deformed Painlevé τ function and q-deformed conformal blocks*, Accepted in J. Phys. A: Math. Theor. [`arXiv:1608.02566`].

3 Участие в конференциях и школах

- Школа-конференция по теории струн, интегрируемым моделям и теории представлений, Москва 28 января—3 февраля 2016. (организатор) Всего было около 100 участников из России и Украины, в 2017 году мы организовываем вторую школу.
- String-Math 2016 conference , Париж 27 июня – 2 июля 2016 (докладчик).
- Workshop on Classical and Quantum Integrable Systems , Санкт-Петербург 11–15 июля 2016 (докладчик).
- Workshop Quantum Geometry, Duality and Matrix Models , Москва 22–28 августа 2016 (докладчик).
- School and Workshop on Geometric Correspondence of Gauge Theories, Триест 12–16 сентября 2016 (докладчик).
- Random Geometry and Physics, Париж 17–21 октября 2016 (докладчик).
- New trends in integrable models, Натал 13–21 ноября 2016 (докладчик).

4 Работа в научных центрах и международных группах;

С 12 по 18 июня был неделю с научным визитом в Международную школу перспективных исследований (SISSA). В прошлом году у меня была совместная работа с сотрудниками SISSA (G. Bonelli, A. Tanzini. M. Ronzani), в этом году мы обсуждали вещи связанные с работой [3] и их последней, работой *Seiberg-Witten theory as a Fermi gas* G. Bonelli, A. Grassi, A. Tanzini arXiv:1603.01174. Они тоже придумали некоторую q-деформацию формулы (1) и видимо из результатов нашей работы следует, что она тоже удовлетворяет q-разностному уравнению Пенлеве в тау форме (3).

С 10 по 15 октября был в Туре, Франция где совместно с Олегом Лисовым, Николаем Иорговым, Павлом Гавриленко обсуждали последние работы о связи между конформной теорией и изомонодромными деформациями.

5 Преподавание

В весенном семестре читал курс «Введение в теорию групп» для студентов второго курса ФОПФ МФТИ. В этот раз пришлось перестраивать курс примерно на треть так как оказалось, что конечные группы и их представления студентам уже что-то рассказали на первом курсе. Видимо в этом году я опять буду читать этот курс и опять придется перестраивать.

В осеннем семестре я (вместе с А. Маршаковым и П. Гавриленко) читал курс «введение в теорию струн и конформную теорию поля» на математическом факультете НИУ ВШЭ. Немного упрощенно, я на курсе занимался конформной теорие поля. Фактически помимо магистрантов Вышки на курс ходили довольно много старшекурсников МФТИ.

Руководил магистрантом математического факультета НИУ ВШЭ Антоном Щечкиным, он защитил диплом и поступил там же в аспирантуру. Результаты нашей деятельности вошли в два препринта этого года [2],[3]. Также руковожу магистрантами математического факультета НИУ ВШЭ Романом Гониным и (с сентября 2016) Юрием Журавлевым.

Ассистировал на занятиях кружка по математике для школьников 6-9 класса в Черноголовке.