Михаил Берштейн, Отчет за 2017 год

1 Полученные результаты

Моя деятельность в этом году лежит на стыке теории представлений, интегрируемых систем и изомонодромных деформация (а для мотивации также используются двумерная конформная теория поля и четырехмерные суперсимметричные калибровочне теории).

Начальной точкой всех задач которые обсуждаются ниже, можно считать соответствие между изомонодромными деформациями и конформной теорией поля. В простейшем случае оно пишется как

$$\tau(z)=\sum_{m\in\mathbb{Z}} s^m \mathsf{F}(\vec{\theta},\sigma+m|Z), \tag{1}$$

здесь $\tau(z)$ это тау функция задачи изомонодромной деформации для линейного уравнения $\Phi'(z)=A(z)\Phi(z)$, где $A(z)=\sum\frac{A_i}{z-z_i}$, $A_i\in\mathfrak{gl}(2)$, с четырьмя особыми точками; $\mathsf{F}(\vec{\theta},\sigma+\Lambda|Z)$ — четырехточечный конформный блок для алгебры Вирасоро с центральным зарядом равным 1. Данный случай изомонодромной деформации эквивалентен уравнению Пенлеве VI. Формула аналогичная (1) существует и для других изомонодромных деформаций, просто меняется или число точек или алгебра симметрии, вместо алгебры Вирасоро получается так называемая $W(\widehat{\mathfrak{gl}}(N))$ на уровне N.

Формула (1) доказана (причем разными способами), имеет много обобщений (некоторые из которых я и упомяну ниже). С точки зрения конформной теории поля ее интерпретация заключается в том, что в правая часть целиком интерпретируется как конформный блок для некой теории с симметрией $GL(2)$ или $GL(N)$ если $A_i\in\mathfrak{gl}(N)$. Поля этой теории собственно нумеруются элементами алгебры Ли $A\in\mathfrak{gl}(N)$. Каждое такое поле можно бозонизировать в терминах картановской подалгебры в которой лежит A, но для разных точек единой картановской подалгебры нет, единой бозонизации нет, поэтому вычисление конформных блоков в этой теории по сути сводится к задаче Римана-Гильберта.

1.1. Твистованные представления алгебр Каца-Муди и твист поля для W алгебр

В работе [3] мы изучали специальные поля (представления) для этой теории, экспоненты которых лежат в нормализаторе Картана $N(H)\subset GL(N)$, так же мы рассматривали случай группы $SO(n)$. В этом случае можно построить единую бозонизацию (или фермионизацию) для конформных блоков в формуле вида (1), однако она уже будет определена на накрытии исходной сферы, накрытие будет ветвиться в точках z_i, и тип ветвления будет зависить от $M_i=\exp(2\pi i A_i)$. Например если M_i это просто матрица перестановки, то при обходе вокруг z_i переставляются листы накрытия.

Один из результатов работы — это формулы для конформных блоков таких полей (они называются твист-полями). Ответ выражается через геометрические данные римановой поверхности накрытия. Другой результат — это нахождение характеров твистованных представлений. Бывает что элементы A соответствующие твист полям могут быть сопряжены при помощи группы G, но не при помощи $N(H)$. Такие сопряженные элементы дают эквивалентные представления, но их характеры получаются посчитанными разными способами, что влечет нетривиальные тождества, такие как тождества Макдональда. Для группы $GL(N)$ тождество имеет вид:

$$\frac{\sum_{\alpha\in Q_{\mathfrak{sl}(N)}} q^{\frac12(\alpha+\frac1N\overline{\rho},\alpha+\frac1N\overline{\rho})}}{\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)^N}=\frac{q^{\frac{1}{2N^2}(\overline{\rho},\overline{\rho})}}{\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{k/N})}. \tag{2}$$

1.2. Изонодромные деформации и $c=-2$ В совместной (и пока незавершенной) работе с Антоном Щечкиным мы изучаем другую теорию у которой есть симметрия группы

Ли. А именно алгебру Вирасоро с центральным зарядом -2, или, точнее, ее расширение W-триплетную теорию. Общие аргументы говорят, что конформные блоки для такой теории также должны быть связаны с изомонодромной деформацией. Отличие от случая формулы (1) в частности в том, что теперь пространство конформных блоков не одномерное, даже в случае Пенлеве оно двумерное. Это означает, что теперь будет две тау функции τ_1, τ_2 заданные формулами типа (1).

$$\tau_i(z) = \sum_{m \in 2\mathbb{Z}+i} s^n \mathsf{F}_{-2}(\vec{\theta}, \sigma + m|z), \tag{3}$$

здесь $\mathsf{F}_{-2}(\vec{\theta}, \sigma + m|z)$ это конформные блок при $c = -2$. Изомонодромная тау функция выражается через них по формуле

$$\tau(z) = \tau_1(z)^2 + \tau_2(z)^2. \tag{4}$$

Существуют (должны существовать) и другие уравнения на τ_i которые определяют их в терминах изомонодромной задачи. Как было написано выше — работа пока не завершена.

1.3. q-разностные уравнения как деавтономизация кластерных интегрируемых систем Работы [4],[5] посвящены q-деформации соответствия между изомонодромными деформациями и конформной теорией поля. Теперь это соответствие между изомонодромными деформациями q-разностных уравнений и конформными блоками для q-деформированных вертексных алгебр, алгебраически более удобно думать о неких квантовых группах, вроде квантовой тороидальной $\mathfrak{gl}(1)$.

В работе [4] есть три основных положения. Во первых, многие (но не все) такие уравнения изомонодромной деформации можно получить как деавтономизацию кластерных интегрируемых систем. Во вторых, решения полученных после деавтономизации уравнений пишутся рядами типа (1). И в третьих, если мы проквантуем начальную, кластерную интегрируемую систему, то решения деавтономизации будут писать рядами типа (1), но только теперь центральный заряд будет не равным 1, а общим.

Кластерные интегрируемые системы пишутся по выпуклому целочисленному многоугольнику — многоугольнику Ньютона спектральной кривой. В работе [3] приведенный выше план изучается для случая многоугольник с одной целой точкой внутри, таких многоугольников (с точностью до действия группы $SA(2,\mathbb{Z})$) существует 16, см. рис 1.

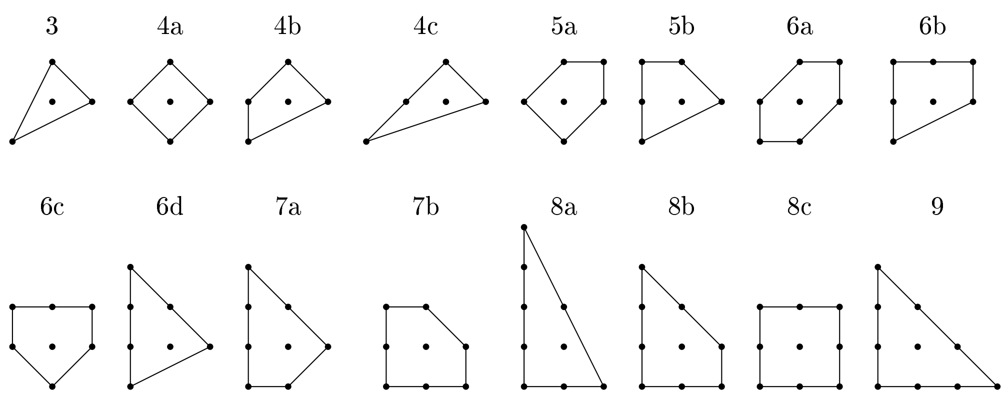

Рис. 1: Многоугольники Ньютона с одной целой точкой внутри и $3 \leq B \leq 9$ точек на границе.

Оказывается, что после деавтономизации соответствующих интегрируемых систем получаются q-разностные уравнения Пенлеве (все, кроме трех из классификации Сакаи), соответственно получаются формулы для решения q-уравнений Пенлеве и квантовых q-уравнений Пенлеве.

В недописанной работе [5] приведенная выше программа применяется к случаю интегрируемых систем типа Тоды.

1.4. Твистованные представление тороидальной алгебры Надо сказать, что в q-деформированной ситуации, формулы типа (1), о которых шла речь в прошлом пункте пока не доказаны.

Существует однако случай когда доказательство получается провести. В недописанной работе с Ромой Гониным мы доказали соотношение

$$(z^{1/2}; q^{1/2}, q^{1/2})_\infty = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \mathsf{F}_q(q^{m+\frac{1}{4}}|z). \tag{5}$$

Двойной Покгаммер в левой части — это на самом деле пример тау функции для некоторого q-Пенлеве соответствующей твистованным полям. Функции $F_q(u|z)$ — это q-деформирован-ные конформные блоки. Доказательство формулы (5) основано на конструкции q-деформированной алгебры Вирасоро при помощи твистованного Гейзенберга (или твистованной q-деформированной алгебры Вирасоро).

2 Опубликованные и поданные в печать работы

Работы [1],[2] были написаны в прошлом году, вышли в журналах уже в этом.

Список литературы

[1] M. Bershtein, A. Shchechkin *Backlund transformation of Painlevé III(D_8) tau function*, Submitted to J. Phys. A: Math. Theor. [`arXiv:1608.02568`].

[2] M. Bershtein, A. Shchechkin *q-deformed Painlevé τ function and q-deformed conformal blocks*, Accepted in J. Phys. A: Math. Theor. [`arXiv:1608.02566`].

[3] M. Bershtein, P. Gavrylenko, A. Marshakov *Twist-field representations of W-algebras, exact conformal blocks and character identities*, Submitted to Comm. Math. Phys; `arXiv:1705.00957`.

[4] M. Bershtein, P. Gavrylenko, A. Marshakov *Cluster integrable systems, q-Painlevé equations and quantization* Submitted to JHEP; `arXiv:1711.02063`.

[5] M. Bershtein, P. Gavrylenko, A. Marshakov *Cluster Toda chains and Nekrasov functions*, to appear.

3 Участие в конференциях и школах

- Рождественские математические встречи, Москва НМУ, 4-6 января. Доклад *Плоские разбиения с ямой и W алгебры*

- Вторая школа-конференция по теории струн, интегрируемым моделям и теории представлений, Москва 21 января–– 22 февраля 2017. (организатор) Всего было около 100 участников из России и Украины, в 2018 году мы организовываем третью школу.

- Шестая школа-конференция Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов , Москва 30 января – 4 февраля 2017. Доклад *плоские разбиения с "ямой": производящие функции и теория представлений*

- Workshop Representation Theory and Integrable Systems, Амстердам 16–24 мая 2017. Доклад *Discrete Painlevé equations and cluster transformations.*
- International Conference on Integrable Systems and Quantum symmetries , Прага 6–10 июня 2017. Доклад *q-deformed Painlevé tau function and q-deformed conformal blocks*
- Workshop on Geometric Correspondence of Gauge Theories, Триест 10–14 июля 2017. Доклад *Algebraic solutions of Painleve equations and twisted representations of Virasoro and q-Virasoro algebras*
- Workshop on Classical and Quantum Integrable Systems, Дубна 24–29 июля 2017. Вводная лекция для студентов *Изомонодромные деформации и конформная теория поля.*
- Workshop and School "Topological Field Theories, String theory and Matrix Models Москва 25–31 августа 2017, доклад *Cluster varieties, integrable systems and q-Painleve equations II*

4 Работа в научных центрах и международных группах;

С 11 по 25 июня был с научным визитом в Международной школе перспективных исследований (SISSA). Проводил научные обсуждения с А. Танзини, Дж. Бонелли, А. Грасси, связанные с работами [1],[2] и готовящийся в тот момент [4] и их работами.

5 Преподавание

В весенном семестре читал курс «Введение в теорию групп» для студентов второго курса ФОПФ МФТИ. В этоv году курс проходил в НМУ.

В осеннем семестре я читал курс «Теория струн и конформную теорию поля» в Сколтехе. Курс посвящен конформной теории поля и связанным математическим сюжетам.

Руковожу магистрантом математического факультета НИУ ВШЭ Романом Гониным, он защитил диплом и поступил там же в аспирантуру. Также руковожу аспирантом первого года НИУ ВШЭ и Сколтеха Антоном Щечкиным и студентом магистратуры НИУ ВШЭ Юрием Журавлевым.

Ассистировал на занятиях кружка по математике для школьников 6-9 класса в Черноголовке.