Михаил Берштейн, Отчет за 2018 год

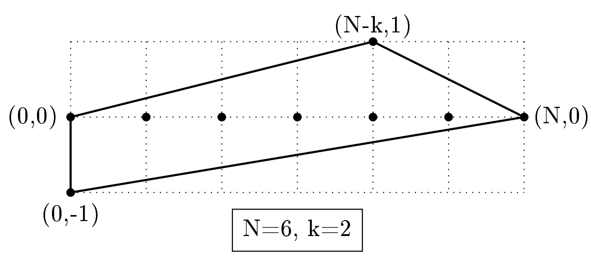
1 Полученные результаты за 2018 года

Моя деятельность в этом году лежит на стыке теории представлений, интегрируемых систем и изомонодромных деформация (а для мотивации также используются двумерная конформная теория поля и четырехмерные суперсимметричные калибровочне теории).

1.1. Деавтномизация кластерных интегрируемых систем

Совместная с П. Гавриленко и А. Маршаковым работа [2] является развитием прошлогодней работы [3]. Основная гипотеза там состояла в следующем. Во-первых, каждому *многоугольнику Ньютона* Δ можно сопоставить кластерную интегрируемую систему (по Гончарову-Кеньону и Фоку-Маршакову) Фазовое пространство этой системы является *X-кластерным* многообразием $\mathcal{X}_\mathcal{Q}$ со скобкой Пуассона, определённой колчаном $\mathcal{Q}$. Группа $\mathcal{G}_\mathcal{Q}$ дискретных автоморфизмов действует на $\mathcal{X}_\mathcal{Q}$, сохраняя интегралы движения кластерной интегрируемой системы. После *деавтономизации* действие $\mathcal{G}_\mathcal{Q}$ приводит к q-разностным уравнениям, являющимися уравнениями q-изомонодромных деформаций. Наконец, эти уравнения могут быть явно решены с помощью функций Некрасова в пятимерной суперсимметричной калибровочной теории, или же с помощью амплитуд топологических струн на многообразии Калаби-Яу CY_Δ. Кривая Зайберга-Виттена для суперсимметричной калибровочной теории и соответствующее многообразие Калаби-Яу строятся по тому же самому многоугольнику Ньютона Δ. Утверждение о решениях q-разностных уравнений является, на самом деле, обобщением (q-деформированного) соответствия между CFT и изомонодромными деформациями (работы Лисового, Иоргова и других)

В прошлогодней работе [3] это все изучалась для случая двумерного фазового пространства. Условие интегрируемости при этом тривиально выполнено, но зато есть большая группа $G_\mathcal{Q}$ которая после деавтономизации приводит к уравнениям Пенлеве. В новой работе изучается другой пример, когда интегрируемая система является релятивистской замкнутой системой Тоды. Соответствующий многоугольник Ньютона обозначается $\Delta^{N,k}$, с $0 \leq k \leq N$ и имеет вид:



После деавтномизации дискретный поток приводит к уравнению

$$\tau_{(n,m+1)}\tau_{(n,m-1)} = \tau_{(n,m)}^2 + z_0^{1/N} q^{\frac{kn-Nm}{N^2}} \tau_{(n+1,m)}\tau_{(n-1,m)} \qquad (1)$$

с граничными условиями $\tau_{(n+k,m+N)} = \tau_{(n,m)}$. Можно также переписать уравения(1) как систему разностных уравнений на N тау функций $\{\tau_j(z) | j \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\}$ от переменной $z = z_0 q^{\frac{kn-Nm}{N}}$

$$\tau_j(qz)\tau_j(q^{-1}z) = \tau_j(z)^2 + z^{1/N}\tau_{j+1}(q^{k/N}z)\tau_{j-1}(q^{-k/N}z)\,. \qquad (2)$$

Основная гипотеза заключается в том, что общее решение системы (2) имеет вид ряда Фурье состоящего из Некрасовских статсумм

$$\tau_j^{N,k}(\vec{u},\vec{s};q|z) = \sum_{\vec{\Lambda}\in Q_{N-1}+\omega_j} s^\Lambda \mathcal{Z}^{N,k}(\vec{u}q^{\vec{\Lambda}};q^{-1},q|z), \qquad j \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\,. \qquad (3)$$

В автономной ситуации решение дается через тета функции построенные по кривой $\mathcal{C}^{N,k}$ заданной уравнением

$$\lambda^{-1}+\mu^{N-k}\lambda+\mu^{N}+c_{N-1}\mu^{N-1}+\ldots+c_0=0 \tag{4}$$

Этот многочлен имеет многоугольник Ньютона как выше.

1.2. $c=-2$ тау функции

В работе с А. Щечкиным [1] изучается аналог формулы (3). А именно, в правой части формулы (3) стоит ряд Фурье из Некрасовских статсумм с параметрами $(q_1,q_2)=(q,q^{-1})$. В конформном пределе это соответствует центральному заряду $c=N-1$ для W алгебры $\mathfrak{sl}_N$, в частности $c=1$ для алгебры Вирасоро. В правой части стоит тау функция деавтономизации интегрируемой системы, в данных примерах тау функция изомонодромной деформации дифференциального (или q-разностного) уравнения.

Есть целый ряд причин ожидать подобный ряд Фурье должен быть какой-то тау функций и для других соотношений на параметры q_1,q_2. В работе [1] изучается первый пример такого ряда, для случая соотношения $q_1^2q_2=1$. Вводятся соответствующие тау функции

$$\tau^{\pm}(a,s|z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}s^{n/2}\mathcal{Z}(a+2n\epsilon;\mp\epsilon,\pm2\epsilon|z), \tag{5}$$

здесь $q_i=\exp(R\epsilon_i)$, $\mathcal{Z}$ — Некрасовская статсумма. В случае $N=2$ эти тау функции связываются с тау функциями беспараметрических уравнений Пенлеве — дифференциального $III(D_8)^{(1)}$ и q-разностного $A_7^{(1)}$.

Доказательства основаны на уравнениях раздутия Накаджимы-Ёшиоки. Символически эти уравнения имеют вид

$$\beta_D\mathcal{Z}(a,\epsilon_1,\epsilon_2|z)=\sum_n \mathrm{D}\Big(\mathcal{Z}(a+n\epsilon_1,\epsilon_1,-\epsilon_1+\epsilon_2|z),\mathcal{Z}(a+n\epsilon_2,\epsilon_1-\epsilon_2,\epsilon_2|z)\Big), \tag{6}$$

где D — некоторый дифференциальный (или разностный) оператор и β_D некоторая (возможно равная нулю) функция. После подстановки $-\epsilon_1=\epsilon_2=\epsilon$ и суммирования эти уравнения приводят к соотношениям на тау функции

$$\tau^{+}\tau^{-}=\tau,\quad D^1_{[\log z]}(\tau^+,\tau^-)=z^{1/4}\tau_1,\quad D^2_{[\log z]}(\tau^+,\tau^-)=0, \tag{7}$$

$$D^3_{[\log z]}(\tau^+,\tau^-)=z^{1/4}\left(z\frac{d}{dz}\right)\tau_1,\quad D^4_{[\log z]}(\tau^+,\tau^-)=-2z\tau, \tag{8}$$

в дифференциальном случае и

$$\tau^{+}\tau^{-}=\tau,\quad \overline{\tau^+}\underline{\tau^-}+\underline{\tau^+}\overline{\tau^-}=2\tau,\quad \overline{\tau^+}\underline{\tau^-}-\underline{\tau^+}\overline{\tau^-}=-2z^{1/4}\tau_1. \tag{9}$$

в разностном случае. Здесь $D^k_{[\log z]}$ обозначает дифференциальный оператор Хироты, $\overline{f(z)}=f(qz)$, $\underline{f(z)}=f(q^{-1}z)$ для любой функции f. Из этих уравнений в частности легко вытекает доказательство гипотезы из прошлой статьи, а именно формулы (3) для случая $N=2$. Правда обобщение на случай большего N пока остается неясным.

Морально это обобщение от $c=1$ к $c=-2$ тау функции похоже на переход от $\beta=2$ к $\beta=1$ или $\beta=4$ в матричной модели или от КП к БКП тау функции.

1.3. Твистованные представления

В еще недописанной работе с Р. Гониным изучаются представления $\mathfrak{gl}_1$ тороидальной алгебры. В работе изучается только случай $q=t$, ($q_1q_2=1$ в обозначениях выше) поэтому речь идет о представлениях алгебры q-разностных операторов $\mathfrak{Diff}_q$. Группа $SL(2,\mathbb{Z})$

действует на этой алгебре автоморфизмам. Основный результат — это явная конструкция Фоковских представлений $\mathcal{F}_u$ подкрученных на элемент $\sigma = \begin{pmatrix} m' & m \\ n' & n \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$.

Есть два доказательства, одно основано на полубесконечной конструкции представления $\mathcal{F}_u$, другое основано на переходу к подалгебре в $\mathfrak{Diff}_q$ связанной с подрешеткой $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$.

Кроме того, показывается, что на таких твистованных представлениях возникает действие твистованной W алгебры, а именно $W(\mathfrak{sl}_n)$. Здесь твистованность выражается, в том, что последний ток $T_n(z)$ равен $z^{n'}$, в случае обычных W алгебр $n' = 0$. Другой способ выразить твистованность состоит в том, что токи $T_k(z)$ разложены по нецелым степеням.

В качестве применения доказывается тождество на конформные блоки, которые опять же происходит из формулы (3). А именно, для случая «алгебраических» решений левая часть (тау функция) известна и доказывается, что она действительно равна сумме конформных блоков.

2 Опубликованные и поданные в печать работы

Работы [4],[3] были написаны в прошлом году, вышли в журналах уже в этом.

Список литературы

[1] M. Bershtein, A. Shchechkin *Painlevé equations from Nakajima-Yoshioka blow-up relations*, [arXiv:1811.04050].

[2] M. Bershtein, P. Gavrylenko, A. Marshakov *Cluster Toda chains and Nekrasov functions*, to appear in Theor. Math. Phys., (2019) [arXiv:1804.10145].

[3] M. Bershtein, P. Gavrylenko, A. Marshakov *Cluster integrable systems, q-Painlevé equations and quantization*, JHEP **1802:077**, (2018); [arXiv:1711.02063].

[4] M. Bershtein, P. Gavrylenko, A. Marshakov *Twist-field representations of W-algebras, exact conformal blocks and character identities* JHEP **1808:108**, (2018); [arXiv:1705.00957].

3 Участие в конференциях и школах

- Infinite dimensional algebras, geometry and integrable systems, Киото 1–8 ноября 2018
- Tau Functions of Integrable Systems and Their Applications , Банф 2–7 сентября 2018
- Седьмая школа-конференция Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов, Самара 18–26 августа 2018
- Summer School on Geometric Representation Theory, Institute of Science and Technology, Austria 9–13 июля 2018
- Workshop on Classical and Quantum Integrable Systems, Протвино 2–6 июля 2018
- Pre-CQIS Summer School, Протвино 25–30 июня 2018 (организатор)
- 6th Workshop on Combinatorics of Moduli Spaces, Cluster Algebras, and Topological Recursion , Москва 4 – 9 июня 2018
- Workshop on Geometric Correspondence of Gauge Theories, Триест 11–15 июня 2018

- Workshop "Supersymmetric Quantum Field Theories in the Non-perturbative Regime Флоренция 30 апреля – 12 мая 2018
- Winter school "Partition Functions and Automorphic Forms Дубна 28 января – 2 февраля 2018
- Третья школа-конференция по теории струн, интегрируемым моделям и теории представлений , Москва 21–27 января 2018 (организатор)

4 Работа в научных центрах и международных группах;

В этом году, видимо, нет.

5 Преподавание

В весенном семестре читал курс «Введение в теорию групп» для студентов второго курса ФОПФ МФТИ.

В осеннем семестре я читаю курс «Аффинные алгебры Ли и конформная теория поля» в Сколтехе. Также в осень, совместно с Р. Гониным и А. Ильиным, организую студенческий семинар *Категория $\mathcal{O}$ и бимодули Зёргеля.*

Руковожу двумя аспирантами математического факультета НИУ ВШЭ и Сколтеха: Романом Гониным и Антоном Щечкиным. Также руковожу двумя студентами бакалавриата ФОПФ МФТИ.

Зимой организовывал *третью школу-конференцию "Теория струн, интегрируемые модели и теория представлений*, летом школу *Pre-CQIS по теоретической и математической физике.*

6 Итоги за три года

Задачи в заявке были разбиты на две части. Первая часть это соответствие между изомонодромными деформациями и конформной теорией поля. Вторая это теория представлений, прежде всего тороидальных алгебр.

По первой теме получено много результатов, всего написано 6 работ. Удалось обобщить соответствие на случай новых центральных зарядов, а также на случай q-разностных уравнений, связать его с кластерными интегрируемыми системами, в ряде случае строго доказать. При этом, конечно, пока полной ясности не достигнуто, в удовлетворительной общности соответствие еще не доказано, связь с тау функцими Аринкина-Бородина (которая ожидалась еще три года назад) также пока не установлена.

По второй теме получилось сделать меньше. Конкретные задачи указанные в заявке были сделаны еще в первый год, а потом прогресс остановился. Но в этом году, совместно с Р. Гониным мы опять занимались скорее представленческими вопросами, и там есть довольно большой прогресс. Отметим, еще, что некоторые, вопросы упомянутые в заявке были сделаны другими людьми. Например геометрическая реализация некоторых модулей МакМагона была предложенна в этом году Сойбельманом с соавторами используя, введенные Н. Некрасовым, пространства инстантонов с шипами.