Отчет луареата конкурса «Молодая математика России» за 2017 г.

А. В. Фонарёв

Ограниченная производная категория когерентных пучков — один из важнейших инвариантов гладкого проективного многообразия в современной алгебраической геометрии. Чаще всего производныя категория устроена очень сложно. Однако, во многих случаях удается выделить кусок, который особенно хорошо себя ведет, и свести задачу описания всех категории к его дополнению. Наиболее приятная ситуация — когда вся категория порождается так называемым полным исключительным набором.

Идея полного исключительного набора довольно проста и естественна. Простейшее возможное многообразие над полем (для простоты мы будем работать над алгебраически замкнутым полем характеристики 0) — это точка. Производная категория точки довольно естественно отождествляется с категорие конечномерных градуированных векторных пространств над базовым полем (все морфизмы векторных пространств расщипляются). Напомним, что нам хочется описывать производные категории общих многообразий. Зададимся вопросом: когда производная категория точки строго полно в производную категорию $D^b(X)$ или, более общо, в некоторую триангулированную категорию $\mathcal{T}$. Ответ на данный вопрос дать легко. А именно, все такие вложения характеризуются так называемыми исключительными объектами в $\mathcal{T}$. Объект E в k-линейной триангулированной категории $\mathcal{T}$ — называется исключительным, если $\mathrm{Hom}^\bullet(E, E) = k$. В частности, по вложению исключительный объект восстанавливается как образ одномерного пространства, сосредоточенного во всех нулевых градуировках.

Сами по себе исключительные объекты не столь редки. На многообразиях Фано все линейные расслоения являются исключительными (по теореме Кодаиры об обращении в нуль). Однако, наиболее приятная ситуация — когда в производной категории многообразия можно найти полный исключительный набор. Понятие полного исключительного набора, опять же, довольно естественно и аналогично понятию полуортонормированного базиса в векторном пространстве, наделенном не обязательно симметрической билинейной формой. Полный исключительный набор в k-линейной триангулированной категории $\mathcal{T}$ — это упорядоченный набор исключительных объектов $E_1, E_2, \ldots, E_n$, который порождает $\mathcal{T}$, и удовлетворяется условию $\mathrm{Hom}^\bullet(E_j, E_i) = 0$ при всех $n \geq j > i \geq 1$. Иначе говоря, справа налево морфизмы запрещены. Категория с полным исключительным набором более или менее эквивалентна производной категории представление колчана с n

вершинами и некоторыми соотношениями. Таким образом, наличие полного исключительного набора позволяет свести многие задачи о векторных расслоениях/когерентных пучках к задачам линейной алгебры.

Давняя гипотеза гласит, что производная категория когерентных пучков на рациональном однородном пространстве допускает полный исключительный набор, состоящий из эквивариантных векторных расслоений. Данная гипотеза доказана лишь в ограниченном числе случаев: Бейлинсоном для проективных пространств, Капрановым для групп GL_n и квадрик, а также разными людьми для некоторых многообразий малой размерности.

Одновременно, можно задаться вопросом нахождения полного исключительного набора, обладающего дополнительными хорошими свойствами. Так, с точки зрения изучения производных категорий гиперплоских сечений многообразия особенно полезным оказывается понятия лефшецева набора. В наиболее приятном, прямоугольном случае, лефшецев набор для многообразия с линейным расслоением $\mathcal{O}(1)$ — это набор вида

$$E_1, E_2 \dots, E_k, E_1(1), E_2(1), \dots, E_k(1), \dots, E_1(t), E_2(t), \dots, E_k(t).$$

Напомним, что основным пунктом программы исследования автора было изучение производной категории грассманиана $\mathrm{IGr}(3,7)$. Данное многообразие — первый нетривиальный пример нечетного симплектического грассманана, многообразия, параметризующего подпространства фиксированной размерности в фиксированном нечетномерном векторном пространстве, наделенном кососимметрической формой полного ранга. Помимо того, что производные категории нечетных изотропных грассманианов должны быть связаны с четными, данное конкретное многообразие тесно связано с одним четырехмерным многообразием Фано, построенным Кюхлей.

В отчетном году удалось полностью закрыть основной пункт программы. А именно, был построен минимальный полный лефшецев набор в производной категории $\mathrm{IGr}(3,7)$. Для формулировки основного результата, напомним, что на классическом грассманиане $\mathrm{Gr}(3,7)$ имеется «тавтологическая» короткая точная последовательность векторных расслоений

$$0 \to \mathcal{U} \to \mathcal{O}^{\oplus 7} \to \mathcal{Q} \to 0.$$

Теорема 1. *В ограниченной производной категории* $D^b(\mathrm{IGr}(3,7))$ *имеется полный минимальный лефшецев исключительный набор:*

$$D^b(\mathrm{IGr}(3,7)) = \begin{pmatrix} \Lambda^2\mathcal{Q} & \Lambda^2\mathcal{Q}(1) & \Lambda^2\mathcal{Q}(2) & \Lambda^2\mathcal{Q}(3) & \Lambda^2\mathcal{Q}(4) \\ \mathcal{U}^* & \mathcal{U}^*(1) & \mathcal{U}^*(2) & \mathcal{U}^*(3) & \mathcal{U}^*(4) \\ \mathcal{O} & \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(2) & \mathcal{O}(3) & \mathcal{O}(4) \\ \mathcal{U} & \mathcal{U}(1) & \mathcal{U}(2) & \mathcal{U}(3) & \mathcal{U}(4) \end{pmatrix}.$$

Публикации

[1] *Derived categories of curves as components of Fano manifolds*, joint with A. Kuznetsov, accepted for publication in the Journal of the London Mathematical Society.

[2] *On the bounded derived category of* $\mathrm{IGr}(3,7)$, in preparation.

Участие в конференциях и школах

[1] Приглашенный доклад *Introduction to the derived categrory of sheaves*, семинар «Séminaire de la Tortue» (Университет Женевы, Швейцария, март 2017).

[2] Приглашенный доклад *Derived categories of Grassmannians*, конференция «Around the Gamma Conjectures» (Швейцария, март 2017).

Работа в научных центрах и международных группах

[1] Визит в университет Женевы для совместной работы с А. Сенежем, Швейцария, март 2017.

Педагогическая деятельность

[1] Семестровый курс *Combinatorics*, в рамках программы «Math in Moscow», осень 2017.