Отчет лауреата конкурса «Молодая математика России» за 2018 г.

А. В. Фонарёв

Большая часть современной алгебраической геометрии (как коммутативной так и некоммутативной) строится на фундаменте триангулированных категорий. В частности, гладкому проективному многообразию X можно сопоставить ограниченную производную категорию когерентных пучков на нем $D(X) = D^b(\operatorname{Coh} X)$. Для иллюстрации важности данного понятия достаточно заметить, что наиболее строгая формулировка гипотезы зеркальной симметрии непосредственно утверждает эквивалентность $D(X)$ и соответствующе определенной категории Фукаи зеркала. Кроме того, для многообразий с обильным или антиобильным каноническим расслоением производная категория является полным инвариантом.

Определить категорию $D(X)$ достаточно легко: объекты — это ограниченные комплексы векторных расслоений на X, а морфизмы — морфизмы комплексов, к которым добавлены формально обращенные квазиизоморфизмы. Работать с производными категориями сложно. Основная задача проекта состояла в том, чтобы найти стуктуру, которая значительно упростила бы работу с многообразием $\mathrm{IGr}(3,7)$: а именно, полный исключительный набор. Напомним, что объект называется иключительным, если $\operatorname{Hom}(E,E) = \mathrm{k}$ и $\operatorname{Ext}^i(E,E) = 0$ при $i \neq 0$. Полный исключительный набор — это упорядоченный набор исключительных объектов $E_1, E_2, \ldots, E_n$, который порождает категорию и удовлетворяет условию $\operatorname{Ext}^\bullet(E_j, E_i) = 0$ при всех $n \geq j > i \geq 1$. Иначе говоря, справа налево морфизмы запрещены. Категория с полным исключительным набором более или менее эквивалентна производной категории представление колчана с n вершинами и некоторыми соотношениями. Таким образом, наличие полного исключительного набора позволяет свести многие задачи о векторных расслоениях/когерентных пучках к задачам линейной алгебры.

В отченом году была подготовлена статья с основным заявленным ожидаемым результатом проекта. Напомним, что многообразие $\mathrm{IGr}(3,7)$ параметризует изотропные подпространства размерности 3 в фиксированном семимерном векторном пространстве, наделенном кососимметрической формой максимального ранга (из-за нечетной размерности такая форма всегда имеет одномерное ядро). В частности, $\mathrm{IGr}(3,7)$ является замкнутым подмноогообразием в классическом грассманиане $\mathrm{Gr}(3,7)$. Нами был построен полный исключиетльный набор в производной категории $\mathrm{IGr}(3,7)$. Напомним, что на классическом грассманиане $\mathrm{Gr}(3,7)$ имеется «тавтологическая» короткая точная последовательность векторных расслоений

$$0 \to \mathcal{U} \to \mathcal{O}^{\oplus 7} \to \mathcal{Q} \to 0.$$

Ограничения $\mathcal{U}$ и $\mathcal{Q}$ на $\mathrm{IGr}(3,7)$ мы будем обозначать теми же символами.

Теорема 1. *В ограниченной производной категории $D^b(\mathrm{IGr}(3,7))$ имеется полный минимальный лефшецев исключительный набор:*

$$D^b(\mathrm{IGr}(3,7)) = \begin{pmatrix} \Lambda^2\mathcal{Q} & \Lambda^2\mathcal{Q}(1) & \Lambda^2\mathcal{Q}(2) & \Lambda^2\mathcal{Q}(3) & \Lambda^2\mathcal{Q}(4) \\ \mathcal{U}^* & \mathcal{U}^*(1) & \mathcal{U}^*(2) & \mathcal{U}^*(3) & \mathcal{U}^*(4) \\ \mathcal{O} & \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(2) & \mathcal{O}(3) & \mathcal{O}(4) \\ \mathcal{U} & \mathcal{U}(1) & \mathcal{U}(2) & \mathcal{U}(3) & \mathcal{U}(4) \end{pmatrix}.$$

Итоги

Попробуем кратко описать, чего мы хотели, почему мы этого хотели и что мы получили. Основным объектом изучения во время проекта была производная категория многообразия $\mathrm{IGr}(3,7)$. Напомним, что многообразия Фано в размерности 3 были классифицированы Исковских. Их производные категории были детально изучены в работах Орлова, Кузнецова и многих других авторов. С многообразиями Фано размерности 4 дела обстоят гораздо хуже. Один из способов построения таких многообразий — взять рациональное однородное пространство (грассмаиан или многообразие Фано) и посмотреть на нули сечений эквивариантных векторных расслоений. Многообразия подобного рода были построены в работе Кюхле. В частности, среди них можно найти интригующее многообразие X размерности 4 с числом Пикара равным 1, которое получается из $\mathrm{Gr}(3,7)$, если рассмотреть сечения $\Lambda^2\mathcal{U}^*$, $\mathcal{Q}^*(1)$ и $\mathcal{O}(1)$. Ожидается, что в производной категории данного многообразия можно найти кусок, который очень похож на производную категорию поверхности типа K3 (такие категории принято считать некоммутативными K3 поверхностями). Для того, чтобы построить некоммутативную K3, достаточно найти в производной категории данного многообразия 6 исключительных объектов. Ожидается, что данные объекты спускаются с пятимерного многообразия Y, которое получается взятием нулей сечений только первых двух расслоений: $\Lambda^2\mathcal{U}^*$ и $\mathcal{Q}^*(1)$. Более того, в производной категории последнего они образуют базис первого блока минимального лефшецева полного исключительного набора. Разумным шагом к решению данной большой задачи нам показалось построение минимального лефшецева исключительного набора в производной категории многообразия, которое получается взятием нулей сечения только первого расслоения. Данное многообразие — есть в точности $\mathrm{IGr}(3,7)$.

С одной стороны, мы полностью справились с поставленной задачей: построили минимальный полный лефшецев иключительный набор в производной категории $\mathrm{IGr}(3,7)$. Помимо полноты и лефшецевости, набор замечателен тем, что он состоит из эквивариантных векторных расслоений. С другой стороны, мы мало продвинулись вглубь (по направлению к построению некоммутативной поверхности K3). Тем не менее, мы верим, что данный результат поможет в будущем.

Публикации

1. *Derived categories of curves as components of Fano manifolds*, joint with A. Kuznetsov, Journal of the London Mathematical Society, **97**:1 (2018), 24–46.

2. *On the bounded derived category of* $\mathrm{IGr}(3,7)$, arXiv preprint arXiv:1804.06946.

Участие в конференциях и школах

1. Доклад *Derived categories of algebraic varieties for a working mathematician* (Университет Женевы, Швейцария, 21 февраля 2018).

2. Доклад *Embedding derived categories of curves into derived categories of moduli of stable vector bundles* (Университет Женевы, Швейцария, 26 февраля 2018).

3. Доклад *Generalized staircase complexes* (МИАН, Москва, 20 марта 2018).

4. Доклад *On the generalised Dubrovin's conjecture for Grassmannians* (IPMU, Япония, 13 ноября 2018).

Работа в научных центрах и международных группах

1. Визит в университет Женевы для совместной работы с А. Сенежем, Швейцария, февраль 2018.

2. Визит в IPMU, University of Tokyo для совместной работы с Ф. Сала, Япония, ноябрь 2018.

Педагогическая деятельность

1. Семестровый курс *Basic Algebraic Geometry*, в рамках программы «Math in Moscow», весна 2018.

2. Семестровый курс *Basic Algebraic Geometry*, в рамках программы «Math in Moscow», осень 2018.