Отчёт по гранту "Молодая математика России" за 2018 год

Гавриленко Павел

15.12.2018
(upd: 31.01.2019 — добавлены две ссылки на ArXiv)

1 Полученные результаты

В течение третьего года были доделаны некоторые задачи, касающиеся изомонодромных деформаций старшего ранга на сфере. Также продолжено изучение q-разностнных уравнений в направлении к системам с большим числом степеней свободы, но с единственным дискретным потоком. Из новых задач начато изучение изомонодромных задач на торе и их связи с торическими конформными блоками. Также была придумана новая конструкция, позволяющая строить некоторый класс кроссинг-инвариантных корреляционных функций в $c = 1$ конформных теориях с помощью изомонодромных тау-функций.

Напомним для начала, в чём заключается связь конформной теории поля (CFT) с изомонодромными деформациями. В большинсве случаев она подразумевает наличие явной формулы для тау-функции $N\times N$ изомонодромных дефорормаций в виде ряда Фурье по по конформным блокам:

$$\tau(\boldsymbol{z}) = \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^n} e^{i(\vec{\beta},\vec{n})}\mathcal{B}(\vec{\sigma}+\vec{n}|\boldsymbol{z}), \tag{1}$$

где $\vec{\beta}$ и $\vec{\sigma}$ параметризуют данные монодромии, а на стороне конформной теории $\vec{\sigma}+\vec{n}$ параметризует промежуточные заряды в конформном блоке.

Кроме того, из соответствия между CFT и изомонодромными деформациями в работах с О. Лисовым и А. Маршаковым возникла новая формула для изомонодромной тау-функции через детерминант Фредгольма от некоторого оператора с матричными интегрируемым ядром:

$$\tau(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z}^{\#}\cdot\det(1+A) \tag{2}$$

В работе [6] мы переосмысливаем эту формулу и даём для неё новое более простое доказательство. Оказывается, что (2) можно переписать как детерминант от произведения двух блочных матриц Тёплица:

$$\det(1+A) = \det(T[J]T[J^{-1}]). \tag{3}$$

Такое выражение узвестно под названием константы Видома и замечательно тем, что для него известна явная формула дифференцирования. С применением этой формулы доказательство (2) становится элементарным. Для случая четырёх особых точек на сфере явный вид оператора $J(z)$ даётся формулой $J(z) = \Psi_{in}(z)^{-1}\Psi_{out}(z)$, в которой $\Psi_{in/out}(z)$ это решения вспомогательных трёхточечных задач.

В изначальной работе с О. Лисовым формула (2) была доказана, но явное разложение в ряд детерминанта было посчитано только для случая $N = 2$. В работе [3] мы заполняем этот пробел и явно вычисляем матричные элементы оператора A в тех случаях, когда вспомогательные линейные задачи решаются старшими гипергеометрическими функциями. Как и нужно ожидать, разложение детерминанта Фредгольма в ряд по главным минорам воспроизводит выражение (2), в котором в качестве $\mathcal{B}$ выступают функции Некрасова. Ещё в этой статье написан пример редукции матричного детерминанта Фредгольма кдетерминанту скалярного оператора с ядром на отрезке, выражающимся через ${}_NF_{N-1}$.

Работа [5] является прямым обобщением конструкции Н. Иоргова, О. Лисового и Й. Тешнера на случай старшего ранга. В ней мы вычисляем монодромии W_N конформных блоков с одним вырожденным полем, двумя полями общего типа (в 0 и ∞) и остальными полувырожденными. Оказывается, что при правильном выборе нормировки вершинных операторов эти монодромии оказываются операторнозначными матрицами, содержащими операторы дискретного сдвига переменной $\vec{\sigma}$: $\nabla_{\vec{\sigma}}$, а также периодические функции от $\vec{\sigma}$. С помощью преобразования Фурье типа (1) мы диагонализуем операторы сдвига, превращая все матрицы монодромии в числовые, и таким образом строим решение линейной задачи, а вместе с ним — тау-функцию в виде ряда по конформным блокам (1). Ещё в этой статье попутно доказано несколько фольклорных утверждений о W-алгебре при специальном значении центрального заряда.

Вместе результаты статей [3] и [5] дают две формулы для изомонодромной тау-функции: одну — через конформные блоки, другую — через функции Некрасова. Равенство конформных блоков функциям Некрасова хорошо известно и называется АГТ соответствием. Таким образом из статей [3] и [5] вместе можно получить ещё одно доказательство АГТ для специального значения центрального заряда.

В работе [2] мы изучаем самый простой пример изомонодромных деформаций на торе, который описывается уравнением

$$(2\pi i)^2 \frac{d^2Q}{d\tau^2} = m^2 \wp'(2Q|\tau). \tag{4}$$

Это уравнение, на самом деле, является частным случаем хорошо изученного уравнения Пенлеве 6. Интересно оно больше с точки зрения изучения различий между случаями тора и сферы. И действительно, оказывается что на торе происходят два явления. Во-первых, двухфермионные корреляторы не просто выражаются через решение линейной системы Y, а содержат дополнительную диагональную матрицу Ξ, зависящую от $Q(\tau)$, через которую можно перемножать сечения разных расслоений (Q имеет смысл модуля расслоения на торе):

$$\frac{\langle V_m(0)\bar{\psi}(z_0) \otimes \psi(z)\rangle}{\langle V_m(0)\rangle} = Y^{-1}(z_0)\Xi(z-z_0)Y(z). \tag{5}$$

Во-вторых, имеется две формулы для связи с изомонодромной тау-функцией $\mathcal{T}(\tau)$:

$$\begin{aligned} \eta(\tau)^{-1}\theta_3(2Q|\tau)\mathcal{T}(\tau) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{in\beta}\mathcal{B}(\sigma+n|q) \\ -\eta(\tau)^{-1}\theta_2(2Q|\tau)\mathcal{T}(\tau) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i(n+\frac{1}{2})\beta}\mathcal{B}(\sigma+n+\frac{1}{2}|q) \end{aligned} \tag{6}$$

Беря их отношение, можно получить неявное уравнение, определяющее Пенлеве-трансцендент $Q(\tau)$. По сравнению (1) новыми здесь являются тэта-функциональные префакторы.

В работе [2] эксплуатируется результат статьи Н. Иоргова, О. Лисового и Ю. Тихого, которые вычислили константу связи для изомонодромной тау-функции. Константой связи называется префактор, который возникает в результате её аналитического продолжения. Оказывается, что у этой константы связи есть замечательное свойство, благодаря которому выражение

$$\tau\tau(\sigma,\beta|t,\bar{t}) = \tau(\sigma,\beta|t)\tau(\iota(\sigma,\beta)|\bar{t}), \tag{7}$$

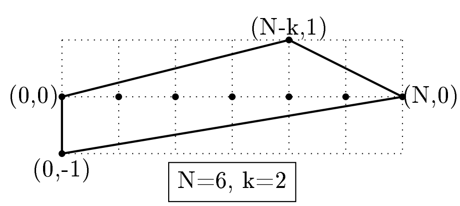
(в котором ι — некоторая явная инволюция на данных монодромии), при аналитическом продолжении переходит в себя же, но с другими значениями монодромий: $\tau\tau(\sigma,\beta|\gamma.t) = \tau(\gamma(\sigma,\beta)|t)$. Благодаря этому свойству можно строить корреляционные функции в виде интегралов от $\tau\tau$ по пространтву данных монодромии с некоторым распределением μ, (слабо) инвариантным относительно действия группы кос на данных монодромии:

$$\mathcal{F}(\mu|t,\bar{t}) = \int \tau\tau(\sigma,\beta|t,\bar{t})\mu(\sigma,\beta) \tag{8}$$

С помощью этой конструкции мы доказали кроссинг-инвариантность корреляционной функции в аналитической теории Лиувилля, а также воспроизвели корреляционную функцию в теории Рункеля-Воттса и некоторые функции в теории Ашкина-Теллера.

Работа [4] является продолжением нашего изучения деавтономизации кластерных интегрируемых систем. Общая конструкция выглядит следующим образом. Любая изучаемая система задаётся некоторым многоугольником Ньютона Δ. С помощью обратного алгоритма Гончарова-Кеньона по Δ строится некоторый колчан Q, после чего изучается его группа автоморфизмов, и дальше в ней находится дискретные потоки. Каждый дискретный поток определяет некоторое q-разностное уравнение. Ранг коммутативной подгруппы в группе автоморфизмов Q всегда оказывается равен количеству внешних точек Δ минус 3. Количество динамических переменных в системе равно удвоенному количеству внутренних точек Δ.

В статье [4] мы рассмотрели класс многоугольников Ньютона, отвечающих гиперэллиптическим кривым, которые к тому же имеют только 4 точки на границе. Этот случай является родственным случаю обыкновенной замкнутой релятивистской цепочки Тоды. Наиболее интересными и понятными многоугольниками является двупараметрическое семейство, которое мы называем $Y^{N,k}$ (кроме него есть только одно менее понятное однопараметрическое семейство). Ниже пример такого многоугольника:



Уравнения, которые получаются в этом случае, если записать их в билинейной форме, имеют вид

$$\mathcal{T}_j^{N,k}(qz)\mathcal{T}_j^{N,k}(q^{-1}z) = \mathcal{T}_j^{N,k}(z)^2 - z^{1/N}\mathcal{T}_{j+1}^{N,k}(q^{k/N}z)\mathcal{T}_{j-1}^{N,k}(q^{-k/N}z), \qquad j\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\,, \tag{9}$$

т.е., являются неавтономной версией билинейного уравнения Хироты. Их решение записывается в терминах пятимерных (q-деформированных) статсумм Некрасова для чистой $SU(N)$

калибровочной теории с членом Черна-Саймонса на уровне k, которые мы обозначаем $Z^{N,k}$:

$$\mathcal{T}_j^{N,k}(\vec{u},\vec{s};q|z) = \sum_{\vec{\Lambda}\in Q_{N-1}+\omega_j} s^{\Lambda} Z^{N,k}(\vec{u}q^{\vec{\Lambda}};q^{-1},q|z), \qquad j \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\,. \tag{10}$$

Суммирование происходит по решётке корней алгебры $sl(N)$, сдвинутой для каждой тау-функции на свой фундаментальный вес ω_j (при этом $\omega_0 = 0$).

2 Опубликованные работы

1. Giulio Bonelli, Fabrizio Del Monte, Pavlo Gavrylenko, Alessandro Tanzini, *$\mathcal{N} = 2^*$ gauge theory, free fermions on the torus and Painlevé VI*, arXiv:1901.10497 [hep-th]

2. Pavlo Gavrylenko, Raoul Santachiara, *Crossing invariant correlation functions at $c = 1$ from isomonodromic τ functions*, arXiv:1812.10362 [math-ph]

3. P. Gavrylenko, N. Iorgov, O. Lisovyy, *On solutions of the Fuji-Suzuki-Tsuda system*, SIGMA 14 (2018), 123, `https://doi.org/10.3842/SIGMA.2018.123`, arXiv:1806.08650 [math-ph]

4. M. Bershtein, P. Gavrylenko, A. Marshakov, *Cluster Toda chains and Nekrasov functions (Кластерные цепочки тоды и функции Некрасова)*, arXiv:1804.10145 [math-ph], (принята к публикации в ТМФ)

5. P. Gavrylenko, N. Iorgov, O. Lisovyy, *Higher rank isomonodromic deformations and W-algebras*, arXiv:1801.09608 [math-ph], (принята к публикации в Letters in Mathematical Physics)

6. M. Cafasso, P. Gavrylenko, O. Lisovyy, *Tau functions as Widom constants*, Commun. Math. Phys. (2018). https://doi.org/10.1007/s00220-018-3230-9, arXiv:1712.08546 [math-ph]

3 Доклады на семинарах и конференциях

1. *Deautonomization of cluster integrable systems* , Symmetries and integrability of difference equations 13 (Fukuoka, Japan, November 11-17, 2018,) `https://side13conference.net/program.html`

2. *Combinatorial expansion of the Fredholm determinant representation for isomonodromic tau function and conformal field theory* (video), Tau Functions of Integrable Systems and Their Applications (Banff, Canada, September 2-7, 2018), `https://www.birs.ca/events/2018/5-day-workshops/18w5025/`

3. *Crossing invariance of Liouville correlation functions at c = 1 from Painlevé VI*, Workshop and School "Topological Field Theories, String theory and Matrix Models - 2018" (Moscow, August 20 - August 25, 2018), `http://wwwth.itep.ru/mathphys/conf/moscow-2018/`

4. *Isomonodromic deformations, conformal blocks and Fredholm determinants*, VIII Workshop on Geometric Correspondences of Gauge Theories (SISSA - Trieste, June, 11-15 2018), `https://people.sissa.it/~bonelli/workshops/ws18/programme.html`

5. *Deautonomization of cluster integrable systems, II* (video), 6th Workshop on Combinatorics of Moduli Spaces, Cluster Algebras, and Topological Recursion (Moscowl, June 4-9, 2018), `https://crei.skoltech.ru/cas/calendar/conf180604/program/`

4 Научные поездки

Вместе с А. Маршаковым и М. Берштейном с 29 апреля по 12 мая ездили во Флоренцию на конференцию "Supersymmetric Quantum Field Theories in the Non-perturbative Regime" и мероприятие вокруг неё, `https://www.ggi.infn.it/showevent.pl?id=273`.

Вместе со студентами, аспирантами и научными сотрудниками из ВШЭ и Сколтеха ездили в Киото с 1 по 11 ноября на Research meeting "Infinite dimensional algebras, geometry and integrable systems", `https://mf.hse.ru/kyoto_infindimsalggeom`

С 16 по 24 июня был в Триесте с научным визитом к Д. Бонелли, Ф. Дель Монте и А. Танзини. Кроме этого участвовал в конференциях из списка выше.

5 Другая деятельность

Занимаюсь организацией аспирантского семинара с Сколтехе.

Был организатором секции по конформной теории поля на летней школе Pre-CQIS (Протвино, 25-30 июня 2018 г.), `https://crei.skoltech.ru/cas/ru/calendar-ru/conf180625ru/`

6 Итоги трёх лет

Изначальный план исследований выглядел следующим образом:

- Исследование известных решений трёхточечных линейных задач (алгебраического и гипергеометрического) и описание квазигрупповых операторов, на самом деле, являющихся примарными полями W-алгебры. Сделано частично. Для гипергеометрического случая вычислены все матричные элементы в факторизованном виде. Для квазиперестановочного случая построены обобщения точных конформных блоков на B- и D-серии, но часть вопрсов остались открытыми.

- Сворачивание явных выражений для тау-функций в детерминанты Фредгольма, что уже частично сделано. Сделано для общего случая изомонодромной задачи на сфере.

- Доказательство детерминантной формулы непосредственно, без знания явного разложения тау-функции. Это важно в связи с тем, что для общего случая мы этого явного разложения не имеем. Таким образом будет доказана формула, выражающая тау-функцию n-точечной задачи через решения трёхточечных линейных задач. Сделано.

- В рамках свободнофермионного описания логично рассматривать произвольные матричные элементы произведения квазигрупповых операторов, а не только вакуумные. Это приводит к тау-функциям N-компонентной иерархии Тоды, которые раньше были получены Бертолой со значительно большими усилиями без свободнофермионного формализма. Также имеется нетривиальное наблюдение о том, что эта тау-функция решает, на самом деле, дополнительное бесконечное количество билинейных соотношений, что было упущено изначально и требует дополнительного осмысления. Кроме того, такая деформация соответствует векторам Уиттэкера на стороне CFT, с которыми тоже есть проблемы, в то время как здесь они довольно понятны. Не сделано. В процессе исследований интересы сместились в другие области, но к этим вопросам позже нужно будет вернуться.

- Отождествление изомоноднромных решений N-компонентной иерархии Тоды с уже известными науке. Не сдалано по той же причине, что и предыдущий пункт

- После того, как будет получено удовлетворительное описание того, что такое общий вертексный оператор W_N-алгебры, нужно обязательно понять его отношение к объекту из топологической теории струн, т.н. статсумме T_N теории. Эта задача также интересна тем, что T_N теории являются составными частями теорий Зайберга-Виттена, не имеющих лагранжевого описания и пока ещё довольно плохо изученных. Что-то в этом направлении уже сделано в работах Ioana Coman, Elli Pomoni, Jörg Teschner, но до полного понимания, видимо, пока далеко.

В процессе появились и были решены новые задачи, которых изначально не предполагалось:

- Изучения q-разностного обобщения соответствия между CFT и изомонодромными деформациями, связанного с деавтономизацией кластерных интегрируемых системам.

- Изучение изомонодромной задачи на торе.

- Изучение кроссинг-инвариантности корреляционных функций в $c = 1$ теории.