Отчет о научной и педагогической деятельности в 2018 году
Иванова-Погодаева Ильи Анатольевича

Научная деятельность в 2016-2018 годах

В 2018 году моя научная деятельность продолжала планы предыдущих лет, по некоторым вопросам были получены продвижения, статьи, написанные в 2016 и 2017 году финализировались и были опубликованы. Ниже перечислены основные направления деятельности и полученные результаты.

1. Значительное время в 2018 году я посвятил работе над будущей докторской диссертацией, в основе которой лежит результат о построении конечно определенной нильполугруппы. Речь идет о вопросе, поставленном Л.Н.Шевриным и М.В.Сапиром в Свердловской тетради 3.61б: *Существует ли бесконечная конечно определенная полугруппа с нулем, каждый элемент которой в некоторой степени равен нулю?*

Такая полугруппа реализуется как полугруппа кратчайших путей на семействе специальных геометрических комплексов (графов). При этом ребра и вершины всех комплексов семейства кодируются с помощью конечного множества букв (определенного для всего семейства комплексов сразу). Определяющие соотношения реализуются пары слов, являющихся кодировками пар эквивалентных путей длины 2 с общими концами, обходящих с разных сторон минимальный 4-цикл. Нулевыми путями объявляются кодировки некратчайших путей длины 2, а также слова, не кодирующие никаких путей.

Каждый комплекс обладает набором геометрических и комбинаторных свойств:

a) Эллиптичность: для любых двух точек на комплексе существует пара кратчайших путей, соединяющих эти точки, при этом являющихся далекими друг от друга относительно некоторой естественной метрики на путях.

b) Локальная преобразуемость: Два пути с общими концами, могут быть преобразованы друг в друга несколькими локальными заменами, каждая из которых меняет два ребра базового квадрата на другие два ребра.

c) Детерминированность: Цвета (буквы) трех вершин, лежащих в одном из квадратов комплекса определяют цвет (букву) четвертой вершины.

d) Непериодичность: Если путь является кратчайшим, то последовательность цветов вершин и ребер вдоль него не содержит более восьми одинаковых слов подряд.

При этом все не кратчайшие пути могут быть локально преобразованы к пути, содержащему не кратчайший участок длины 2 (путь по ребру туда-обратно), то есть к нулю. На комплексе нет путей содержащих девятую степень любого слова из цветов вершин и ребер. С помощью свойств выше можно показать, что любое периодическое слово с достаточно большим периодом (большим или равным 9) может быть локально преобразовано к форме, содержащей кодировку короткого невозможного или не кратчайшего пути, то есть может быть приведено к нулю.

Основным элементом построения является доказательство детерминированности. В настоящее время его доказательство занимает около 100 страниц текста из общих 160.

В тексте диссертации доказательство планируется изложить в более лаконичной форме.

Базовая работа с изложением этого результата находится на рецензии в Известиях Академии Наук. В ноябре 2018 года поступил отзыв рецензента, содержащий набор технических правок, которые были внесены в текст работы.

2. Применение описанной выше техники для построения конечно определенного нилькольца. В кольцах и алгебрах есть похожий вопрос, поставленный В.Н.Латышевым (Днестровская тетрадь, 1.92): *Будет ли нильпотентной ассоциативная конечно определенная нильалгебра?*

В настоящее время я реализую следующий план построения. Аналогом ниль-свойства и периодичности в кольцевом случае является нулевая симметризация любого слова: если слово разбить на части $a_1, a_2, \dots a_k$, то нулевой будет сумма S всех различных слов вида $b_1 b_2 \dots b_k$, где b_i суть некоторое a_j. Для реализации этого свойства, помимо цветовой кодировки, задающей геометрическую структуру пути, вводится информационная цветовая составляющая (оттенок) для каждой вершины.

В этом случае, рассматриваются слова из суммы S, являющиеся реализациями путей на комплексе. Для каждого такого пути применимы как геометрические преобразования, так информационные, изменяющие лишь оттенки, но не геометрическую структуру пути. В данные момент мы изучаем возможность контроля над информационным наполнением слова для произвольной геометрии пути. Общие принципы такого контроля схожи с принципами организации квантового компьютера.

3. Оказалось, что изложенная выше геометрическая техника может быть применена также при построении групп. В течение 2017 и 2018 годов, совместно с Анной Эршлер, мы работали над построением негиперболической группы с неположительной кривизной, не содержащую подгруппы, изоморфной Z^2.

Вопрос о существовании такой группы обсуждается М. Громовым в известной монографии «Гиперболические группы» (4.7A). Громов выражает уверенность, что можно построить компактное полугиперболическое (неположительной кривизны) пространство, в которое можно отобразить R^2, но, фундаментальная группа которого не содержит Z^2.

В рамках этой работы состоялись мои визиты в Ecole Normale Superieure в апреле-мае и сентябре-октябре 2017 года, а также в мае 2018 года.

Общий план состоит в следующем. Сначала конструируется апериодический набор квадратов, стороны которых раскрашены в конечный набор цветов, разбитых на пары взаимно дополняющих (обратных). Свойство детерминированности на таком наборе означает, что существует не более одного квадрата с заданной парой цветов соседних ребер. Детерминированность на наборе плиток естественным образом связана с детерминированностью на комплексе из квадратов, который использовался при построении конечно определенной нильполугруппы.

Каждый квадрат в наборе соответствует определяющему соотношению в группе. При этом детерминированный набор ведет к группе с $(4) - T(4)$ свойством. Если набор допускает замощение плоскости, полученная группа не может быть гиперболической. Кроме того, можно показать, что в группе, построенной по апериодическому набору, не может быть подгруппы, изоморфной Z^2.

Основным элементом построения является конструкция апериодического набора квадратов. Он должен обладать свойствами:

a) Детерминированность: пара цветов на соседних ребрах определяет квадрат

b) Полнота: вместе с любым квадратом набор содержит и повернутые и перевернутые квадраты.

c) Апериодичность: Если рядом нельзя ставить перевернутые (взаимно-обратные) квадраты, то набор допускает замощения плоскости, причем только непериодичные.

В 1999 году Кари и Папасоглу построили набор, удовлетворяющий свойствами a и c.

Планировалось завершить конструкцию набора, обладающего всеми тремя свойствами, в этом году. Но, возможно, удастся сделать это уже в 2019 году.

4. Конструкции, изложенные выше идейно близки теореме Мозеса – Гудмана-Штраусса из теории плиточных замощений.

Теорема Мозеса-Гудмана-Штраусса заключается в следующем: допустим, есть подстановочная система из конечного числа геометрических многоугольников-плиток, с заданным правилом разбиения каждой плитки на гомотетичные плитки меньшего размера. Тогда по такой подстановочной системе можно осуществить декорирование: разбить плитки каждого типа на конечное число подтипов и раскрасить стороны плиток каждого подтипа в конечное число цветов. После этого можно рассмотреть все замощения плоскости плитками полученных типов, с условием, что прикладывать друг к другу плитки можно только одинаковыми сторонами. Теорема утверждает, что декорирование можно осуществить таким образом, что замощениями, удовлетворяющими таким краевым условиям будут только замощения, генерируемые изначальной подстановочной системой.

Мозес доказал этот факт в 1988 году для плиток прямоугольного типа (комбинаторных подстановок). Гудман-Штраусс доказал это для геометрических подстановок в 1998 году. Оба доказательства являются технически сложными, в настоящее время не известно относительно простого способа доказать это утверждения.

В теореме Мозеса-Гудмана-Штраусса и при построении нильполугруппы используются похожие построения. В связи с этим, можно рассчитывать получить альтернативное доказательство или обобщение теоремы Мозеса-Гудмана-Штраусса.

На этом пути в 2018 году был сделан проект на Летней Конференции Турнира Городов (совместно с Иваном Митрофановым и Пьером Гийоном).

5. В 2018 году были опубликованы написанные в 2016 и 2017 годах статьи:

Ivanov-Pogodaev, I.; Malev, S. Finite Gröbner Basis Algebra With Unsolvable Problems Of Nilpotency and Zero Divisors J. Algebra 508 (2018), 575−588.

Ivanov-Pogodaev, I.; Malev, S.; Sapir, O. A construction of a finitely presented semigroup containing an infinite square-free ideal with zero multiplication International Journal of Algebra and Computation, 2018, 7 pages. (online ready).

6. Также в 2018 году в 10 номере журнала Квант вышла написанная в 2017 году статья.

И.Иванов-Погодаев, А.Малистов "Задача о завистливых разбойниках"Квант, 2018, vol 10, 6-14.

Статья посвящена доступному изложению вопроса о справедливом разделении добычи несколькими разбойниками, с учетом зависти. Несмотря на элементарную формулировку, результаты по этой теме получены относительно недавно (в 90е) и могут быть сложны для неподготовленного читателя. В вышедшей статье основной результат излагается в доступной для школьников форме. При этом мы следуем собственному независимому доказательству.

Сравнение с планом 2015 года.

Возможность применения геометрической техники для решения вопроса Громова о негиперболической группе с неположительной кривизной, не содержащей подгруппы, изоморфной Z^2, в значительной степени привела к отклонению от указанных планов. Фактически это направление работы стало одним из основных и по нему были получены продвижения (я рассчитываю на финализацию в 2019 году).

Ниже указано, что было сделано в рамках плана 2015 года.

1. Применение методов полугруппы для построения конечно определенного нилькольца. Было бы слишком оптимистично рассчитывать на конечный результат – построение конечно определенного нилькольца. Тем не менее, было получено продвижение. План указан выше. Также продвижением было бы построение конечно определенного кольца, содержащего бесконечный нильидеал. Полугруппа с аналогичным свойством строится гораздо проще, чем конечно определенная полугруппа. Это составляет результат опубликованной статьи, совместно с Сергеем Малевым и Ольгой Сапир "A construction of a finitely presented semigroup containing an infinite square-free ideal with zero multiplication".

2. Обобщение результата Гудмана-Штраусса. Выше я рассказал о ситуации по этому направлению.

3. и 4. Различные развития результата о нильполугруппе: 2-порожденная полугруппа с тождеством $x^3 = 0$ и 3-порожденная полугруппа с тождеством $x^2 = 0$; неограниченная степень нильпотентности.

Работа, в основном, строилась вокруг улучшения изложения результата. Тем не менее, в процессе улучшения изложения для диссертации, удалось понизить экспоненту в основном результате, вместо тождества $x^9 = 0$, будет тождество $x^4 = 0$.

5. Построения конечно-определенных полугрупп с размерностью Гельфанда-Кириллова 3.5 и 2.5 Это направление планировалось для возможных студентов и аспирантов, пока подходящего человека не нашлось.

Опубликованные и поданные в печать статьи, 2016-2018

1. И.Иванов-Погодаев, А.Канель-Белов. *Конструкция бесконечной конечно определенной нильполугруппы.* Известия Российской Академии Наук, находится на рецензии.

2. Ivanov-Pogodaev, I.; Malev, S. Finite Gröbner Basis Algebra With Unsolvable Problems Of Nilpotency and Zero Divisors J. Algebra 508 (2018), 575−588.

3. Ivanov-Pogodaev, I.; Malev, S.; Sapir, O. A construction of a finitely presented semigroup containing an infinite square-free ideal with zero multiplication International Journal of Algebra and Computation, 2018, 7 pages. (online ready).

4. И.Иванов-Погодаев, А.Малистов *Задача о завистливых разбойниках.* Квант, 2018, vol 10, 6-14.

Педагогическая деятельность

1. В 2018 году я начал (совместно с А.Я.Канелем-Беловым) работу над книгой "Идеи и методы решения олимпиадных задач". В этой работе планируется провести классификацию основных приемов при решении задач, причем в привязке к конкретным условиям: Графы, Клеточная комбинаторика, Комбинаторный подсчет, и так далее.

2. В 2018 году я (совместно с Иваном Митрофановым и Пьером Гийоном) вел проект по Апериодическим замощениям на Летней Конференции Турнира Городов. Удалось изложить в доступной форме некоторые содержательные случаи из результатов Мозеса и Гудмана-Штраусса по подстановочным замощениям.

3. В 2018 году я осуществлял научное руководство в рамках математического практикума для двух студентов ФИВТ МФТИ.

4. Уже много лет я веду математическую работу со школьниками в Жуковском. В 2016, 2017 и в 2018 году мои ученики были среди призеров Заключительного этапа Всероссийской олимпиады по математике. Команды из Жуковского последние три года выступают на всех Уральских Турнирах юных математиков, а также на Турнире им Савина. Девять моих учеников из Жуковского будут участвовать в январе 2019 года в смене Сириуса.

5. Также я провожу работу по популяризации математики среди школьников в Жуковском. В 2016, 2017 и 2018 годах мной была организована, проведена и проверена Открытая олимпиада по математике для 5-8 классов. Участвует каждый раз от 400 до 550 школьников города. Благодаря этой олимпиаде, проходящей в сентябре, удается выявить способных ребят для занятий в кружках.