ОТЧЕТ О НАУЧНОЙ И ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ РАБОТЕ ЗА 2018 ГОД, А ТАКЖЕ СУММАРНЫЙ НАУЧНЫЙ ОТЧЕТ ЗА 2016-2018 ГОДЫ СТИПЕНДИАТА КОНКУРСА «МОЛОДАЯ МАТЕМАТИКА РОССИИ»

ПЕНСКОЙ А. В.

Введение

Главной темой моих исследований 2018 года оказались минимальные поверхности со свободной границей в шаре, что на самом деле является естественным продолжением проводившегося в предыдущие два года изучения метрик на замкнутых поверхностях, экстремальных для собственных значений оператора Лапласа-Бельтрами. Результаты этой совместной с Н. С. Надирашвили (CNRS) деятельности в 2018 году написаны в тексте [22], который появится на `arxiv.org` до конца этого года и предназначается в Journal d'Analyse Mathématique.

Подробное описание полученного результата вместе с введением в данную проблематику следует ниже, краткое же резюме такое:

- Доказано, что гомеоморфная кольцу минимальная поверхность со свободной границей в трехмерном шаре является катеноидом. Также установлена связь между минимальными поверхностями со свободной границей в шаре и конусами со свободной границей, возникающими в однофазной задаче.

В 2018 году продолжалась педагогическая деятельность, как чтение лекций и ведение семинаров, так и научное руководство учениками, в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова, в Национальном исследовательском университете - Высшей школе экономики и в Независимом московском университете.

1. Краткое описание научных результатов за 2016-2018 годы

Краткая сводка полученных за 2016-2018 годы научных результатов включает кроме уже упомянутого выше результата про минимальные поверхности со свободной границей в шаре такжи и следующие результаты.

- Было доказано изопериметрическое неравенство для второго ненулевого собственноо числа оператора Лапласа-Бельтрами на вещественной проективной плоскости. Для метрики площади 1 это собственное число не больше, чем 20π. Это значение может быть достигнуто как предел на последовательности метрик площади 1 на проективной плостности, сходящейся к сингулярной метрике на проективной плоскости и сфере со стандартными метриками, касающимися в одной точке, такими, что площади проективной плоскости и сферы относятся как $3 : 2$. Также доказано, что кратность второго ненулевого собственного числа на вещественной проективной плоскости не больше, чем 6. (Результат, полученный совместно с Н. С. Надирашвили, [21]).
- Были улучшены верхние оценки для кратностей собственных чисел с чётными номерами оператора Лапласа-Бельтрами на вещественной

проективной плоскости. Также были предложены новые оценки для кратностей собственных чисел Дирихле, Неймана и Стеклова вещественной проективной плоскости с дырами. (Результат, полученный совместно с А. С. Бердниковым и Н. С. Надирашвили, [2].).

- Было доказано изопериметрическое неравенство *для всех* собственных чисел оператора Лапласа-Бельтрами на двумерной сфере: для любого натурального k собственное число λ_k оператора Лапласа-Бельтрами на двумерной сфере с римановой метрикой площади 1 максимизируется в пределе последовательности метрик, сходящейся к особой метрике на объединении k идентичных касающихся сфер со стандартной метрикой.

  Это доказывает гипотезу, высказанную Надирашвили в 2002 году, и дает строгое изопериметрическое неравенство для всех ненулевых собственных чисел оператора Лапласа-Бельтрами на сфере. Ранее этот результат был известен только для $k = 1$ (J. Hersch [13], 1970), $k = 2$ (N. Nadirashvili [20], 2002 and R. Petrides [26], 2014) and $k = 3$ (N. Nadirashvili and Y. Sire [23], 2015). В частности, это значит, что для $k \geqslant 2$ супремум k-го собственного числа на сфере единичного объема не можем быть достигнут на римановой метрике, гладкой за исключением конечного числа конических особенностей. Доказательство использует свойства гармонических отображений между сферами. (Результат, полученный совместно с М. А. Карпухиным, Н. С. Надирашвили и И. В. Полтеровичем, [14]).

Отметим, что *впервые задача геометрической оптимизации собственных чисел на поверхности была решена для всех собственных чисел: до этого эта задача решалась лишь для некоторых собственных чисел.*

Заметим, что это намного больше самых смелых надежд, которые были в начале реализации данного исследовательского проекта в рамках гранта «Молодая математика России».

2. Развернутое изложение научных результатов

2.1. **История задачи.** Проблема геометрической оптимизации собственных значений оператора Лапласа восходит к лорду Рэлею.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ограниченная область в евклидовом пространстве. Рассмотрим спектральную задачу для оператора Лапласа Δ в области Ω с граничным условием Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda u, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Известно, см., например, [12], что спектр является положительным, дискретным, с конечной кратностью и стремящимся к бесконечности. Будем обозначать спектр задачи (1) через $0 < \lambda_1(\Omega) < \lambda_2(\Omega) \leqslant \lambda_3(\Omega) \leqslant \lambda_4(\Omega) \leqslant \dots$, причем каждое собственное число в этой последовательности встречается столько раз, какова его кратность. Величины $\lambda_i(\Omega)$ называются собственными числами Дирихле области Ω и образуют спектр Дирихле области Ω.

В изданной в 1877-1878 годах знаменитой книге [29] лорд Рэлей поставил следующую задачу: найти область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ заданной площади, для которой первое собственное число $\lambda_1(\Omega)$ минимально. Без условия фиксированной площади задача тривиальна: при гомотетии плоской области Ω с коэффициентом растяжения μ спектр Ω будет делиться на μ^2, а потому $\lambda_1(\Omega)$ может быть легко сделано сколь угодно малым. Задача Рэлея явилась первой в истории задачей о геометрической оптимизации собственных значений оператора Лапласа. Рэлей дал правильный ответ:

минимум первого собственного числа Дирихле достигается на диске, но доказательство использовало физические соображения и не являлось строгим. Физически ответ может быть проинтерпретирован следующим образом: среди всех барабанов с заданной площадью мембраны самый низкий звук издает барабан с круглой мембраной. Строгое доказательство результата Рэлея и его обобщение на случай $\mathbb{R}^n$ было дано в двадцатых прошлого века независимо Фабером [5] и Краном [16].

Теорема 2.1 (Фабер, Кран)**.** *Пусть $c > 0$ и $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ шар в $\mathbb{R}^n$ объема c. Тогда* $\lambda_1(\mathbb{B}^n) = \min\{\lambda_1(\Omega) | \Omega \subset \mathbb{R}^n, \mathrm{Vol}(\Omega) = c\}$.

Наиболее естественным обобщением задачи Рэлея является вопрос о минимизации второго собственного числа Дирихле $\lambda_2(\Omega)$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с фиксированным объемом. Ответ на данный вопрос был дан в не очень явной форме в работе Крана [17] 1926 года, и поэтому иногда приписывается П. Сегё, см. работу Пойа [28].

Теорема 2.2 (Кран, П. Сегё)**.** *Пусть $c > 0$ и $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ шар в $\mathbb{R}^n$ объема $c/2$. Тогда минимум достигается на объединении двух шаров,* $\lambda_2(\mathbb{B}^n \sqcup \mathbb{B}^n) = \min\{\lambda_2(\Omega) | \Omega \subset \mathbb{R}^n, \mathrm{Vol}(\Omega) = c\}$.

Проблема минимизации следующих собственных чисел Дирихле области является открытой и известны лишь частичные результаты, которые описаны в книге [12, глава 5]. В частности, существует гипотеза о том, что для третьего собственного числа Дирихле минимум в размерности 2 и 3 достигается на шаре, а в размерности $n \geqslant 4$ на объединении трех шаров равного радиуса. Компьютерное моделирование показывает, что в плоском случае для $\lambda_4(\Omega)$ минимум достигается на объединении двух дисков неравного радиуса, для λ_k, $k \geqslant 5$, полученные компьютерными методами экстремальные области довольно причудливы, см. [12, рис. 5.1], и не сформулированы даже гипотезы, описывающие ответ. Вместо спектральной задачи с граничным условием Дирихле (1) можно рассматривать спектральную задачу для ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с граничным условием Неймана. В этом случае также имеются некоторые результаты.

У описанной задачи геометрической оптимизации собственных чисел оператора Лапласа евклидовых областей есть естественные обобщения на случай римановых многообразий. Можно рассматривать задачи Дирихле и Неймана на многообразиях с краем, но совершенно новым является случай многообразий без края.

2.2. **Постановка основной задачи.** Пусть M замкнутая поверхность, и g риманова метрика на M. Спектр оператора Лапласа-Бельтрами на замкнутой поверхности неотрицателен, дискретен, имеет конечные кратности и возрастает к бесконечности. Так как оператор Лапласа-Бельтрами Δ зависит от метрики g, то и собственные числа (обратим внимание на использование нумерации собственных чисел!)

$$0 = \lambda_0(M, g) < \lambda_1(M, g) \leqslant \lambda_2(M, g) \leqslant \lambda_3(M, g) \leqslant \dots \tag{2}$$

зависят от метрики g. Хорошо известно, что собственные числа оператора Лапласа-Бельтрами Δ обладают следующим свойством масштабирования, $\forall t > 0 \quad \lambda_i(M, tg) = \frac{\lambda_i(M,g)}{t}$. Поэтому вместо $\lambda_i(M, g)$ лучше рассматривать функционалы

$$\Lambda_i(M, g) = \lambda_i(M, g)\,\mathrm{Area}(M, g), \tag{3}$$

где $\mathrm{Area}(M, g)$ обозначает площадь, которые инвариантны при преобразованиях $g \mapsto tg$.

Итак, **рассмотрим задачу нахождения при фиксированном i супремума $\sup \Lambda_i(M,g)$ функционала $\Lambda_i(M,g)$ на пространстве всех римановых метрик g на фиксированной поверхности M. Эта задача эквивалентна задаче нахождения супремума $\sup \lambda_i(M,g)$ на пространстве всех римановых метрик g на фиксированной поверхности M, таких, что площадь M равна** 1.

Оказывается, что вопрос о нахождении при фиксированном i супремума $\sup \Lambda_i(M,g)$ является очень трудным, и к настоящему времени получено сравнительно мало результатов.

Из результатов Янга и Яу [32] и Кореваара [15] следует, что при всех i значения $\sup \Lambda_i(M,g)$ конечны, так как функционалы $\Lambda_i(M,g)$ ограничены. Необходимо заметить, что Кольбуа и Додзюк доказали [4], что для многообразия M размерности $\dim M \geqslant 3$ функционал $\lambda_i(M,g)$ не ограничен на пространстве римановых метрик g на M объема 1. Именно поэтому мы рассматриваем геометрическую оптимизацию собственных чисел оператора Лапласа-Бельтрами только на поверхностях.

Определение 2.3. *Метрика g_0 на фиксированной поверхности M называется максимальной для функционала $\Lambda_i(M,g)$, если $\sup \Lambda_i(M,g) = \Lambda_i(M,g_0)$, где супремум берется по пространству всех римановых метрик g на фиксированной поверхности M.*

До недавнего времени мы знали удивительно мало максимальных метрик.

Теорема 2.4 (Херш [13]). *Стандартная метрика на сфере является единственной максимальной метрикой для $\Lambda_1(\mathbb{S}^2,g)$.*

Теорема 2.5 (Ли, Яу [18]). *Стандартная метрика на проективной плоскости является единственной максимальной метрикой для $\Lambda_1(\mathbb{RP}^2,g)$.*

Теорема 2.6 (Надирашвили [19]). *Единственной максимальной метрикой для $\Lambda_1(\mathbb{T}^2,g)$ является метрика на равностороннем торе, то есть на торе, который является фактором евклидовой плоскости по решетке из параллелограммов, составленных из двух равносторонних треугольников.*

Недавние результаты указали на значительную роль метрик с особенностями.

Теорема 2.7 (Надирашвили [20], Петридес [26]). *Имеет место равенство $\sup \Lambda_2(\mathbb{S}^2,g) = 16\pi$, и этот супремум достигается как предел значений $\Lambda_2(\mathbb{S}^2,g)$ на последовательности гладких метрик, сходящейся к сингулярной метрике, получающейся на объединении двух сфер равного радиуса со стандартной метрикой, касающихся друг друга в одной точке.*

Теорема 2.8 (Петридес [27]). *Пусть Σ_γ обозначает ориентируемую замкнутую поверхность рода γ. Если $\sup \Lambda_1(\Sigma_\gamma,g) > \sup \Lambda_1(\Sigma_{\gamma-1},g)$, то $\sup \Lambda_1(\Sigma_\gamma,g)$ достигается на метрике, которая является гладкой, за исключением конечного числа конических особенностей.*

Теорема 2.9 (Надирашвили, Сир [23]). *Верно равенство $\sup \Lambda_3(\mathbb{S}^2,g) = 24\pi$, и этот супремум достигается как предел значений $\Lambda_3(\mathbb{S}^2,g)$ на последовательности гладких метрик, сходящейся к сингулярной метрике, получающейся на объединении трёх касающихся сфер равного радиуса со стандартной метрикой.*

Первым результатом, касающимся не первых собственных значений на поверхности, отличной от сферы, стал следующий результат, полученный в рамках данного гранта.

Теорема 2.10 (Надирашвили, Пенской [21])**.** *Верно равенство*

$$\sup \Lambda_2(\mathbb{RP}^2, g) = 20\pi,$$

причём это значение может быть достигнуто как предел на последовательности метрик площади 1 *на проективной плосткости, сходящейся к сингулярной метрике на проективной плоскости и сфере со стандартными метриками, касающимися в одной точке, такими, что площади проективной плоскости и сферы относятся как* 3 : 2.

Далее, в работе, сделанной в рамках данного гранта, впервые задача геометрической оптимизации собственных чисел на поверхности была решена для *всех* собственных чисел: до этого эта задача решалась лишь для некоторых собственных чисел.

Теорема 2.11 (Карпухин, Надирашвили, Пенской, Полтерович [14])**.** *Верно равенство*

$$\sup \Lambda_k(\mathbb{S}^2, g) = 8\pi k,$$

причём это значение может быть достигнуто как предел на последовательности метрик площади 1 *на сфере, сходящейся к сингулярной метрике на* k *идентичных сферах со стандартными метриками одинаковой площади, касающимися в точках.*

2.3. **Научные результаты за 2018 год.** Оказывается, что задача нахождения максимальных метрик для собственных чисел оператора Лапласа-Бельтрами тесно связана с минимальными поверхностями.

Если мы хотим найти максимум функции нескольких переменных, то обычно мы начинаем с поиска экстремумов этой функции. Подобный подход разумен и для функционалов $\sup \Lambda_i(M, g)$. Тем не менее, данный подход требует осторожности. Дело в том, что функционал $\Lambda_i(M, g)$ непрерывно зависит от метрики g, но не является дифференцируемым. Тем не менее, для аналитических деформаций g_t правая и левая производные функционала $\Lambda_i(M, g_t)$ по отношению к t существуют, см. работы Берже [3], Бандо и Уракавы [1], Эль Суфи и Илиаса [6]. Это приводит к следующему определению, см. работу Надирашвили [19] и работы Эль Суфи и Илиаса [7, 6].

Определение 2.12. *Риманова метрика* g_0 *на замкнутой поверхности* M *называется экстремальной метрикой для функционала* $\Lambda_i(M, g)$*, если для любой аналитической деформации* g_t *выполняется неравенство*

$$\frac{d}{dt}\Lambda_i(M, g_t)\Big|_{t=0+} \cdot \frac{d}{dt}\Lambda_i(M, g_t)\Big|_{t=0-} \leqslant 0.$$

В последние годы развитие в теории экстремальных метрик основано на приведенной ниже теореме 2.16 Надирашвили, Эль Суфи и Илиаса, связывающей экстремальные метрики с минимальными погружениями в сферы и с подсчитывающей собственные числа функцией Вейля

$$N(\lambda) = \#\{\lambda_i | \lambda_i < \lambda\}. \tag{4}$$

Напомним хорошо известный результат об описании минимальных поверхностей в $\mathbb{R}^n$ в терминах гармонических функций.

Предложение 2.13. *Подмногообразие* $M \looparrowright \mathbb{R}^n$ *минимально тогда и только тогда, когда ограничения* $x^1|_M, \dots x^n|_M$ *на* M *координатных функций в* $\mathbb{R}^n$ *являются гармоническими по отношению к оператору Лапласа-Бельтрами* Δ^M *на* M*, снабженном индуцированной погружением метрикой,*

$$\Delta^M x^i|_M = 0.$$

Нам полезно переписать это предложение в терминах изометрических погружений.

Предложение 2.14. *Изометрическое погружение риманова многообразия* $f : M \looparrowright \mathbb{R}^n$ *минимально тогда и только тогда, когда компоненты погружения* $f = (f^1, \dots, f^n)$ *являются гармоническими относительно оператора Лапласа-Бельтрами* Δ *на* M,

$$\Delta f^i = 0.$$

Если изометрическое погружение гармоническими функциями (то есть собственными функциями оператора Δ с собственным числом 0) минимально в $\mathbb{R}^n$, то что мы можем сказать об изометрических погружениях собственными функциями оператора Δ с общим собственным числом $\lambda > 0$? Ответ дан в теореме Такахаси.

Теорема 2.15 (Такахаси [30])**.** *Изометрическое погружение риманова многообразия* $f : M \looparrowright \mathbb{R}^{n+1}$, *где* $f = (f^1, \dots, f^{n+1})$, *определенное собственными функциями* f^i *оператора Лапласа-Бельтрами* Δ *с общим собственным числом* $\lambda > 0$,

$$\Delta f^i = \lambda f^i,$$

обладает следующими свойствами:

- *образ* $f(M)$ *лежит на сфере* $\mathbb{S}^n_R$ *радиуса* R *с центром в начале координат, причем*

(5)
$$\lambda = \frac{\dim M}{R^2},$$

- *погружение* $f : M \looparrowright \mathbb{S}^n_R$ *минимально.*

Если $f : M \looparrowright \mathbb{S}^n_R$, *где* $f = (f^1, \dots, f^{n+1})$, *является минимальным изометрическим погружением риманова многообразия* M *в сферу* $\mathbb{S}^n_R$ *радиуса* R *с центром в нуле, то* f^i *являются собственными функциями оператора Лапласа-Бельтрами* Δ,

$$\Delta f^i = \lambda f^i,$$

с одним и тем же собственным числом λ, *таким, что выполняется равенство* (5).

Теорема Такахаси 2.15 говорит, что если $f : M \looparrowright \mathbb{S}^n_R$ является минимальным изометрическим вложением римановых многообразия M в сферу $\mathbb{S}^n_R$, то в спектре M есть собственное значение $\lambda = \frac{\dim M}{R^2}$, причем с кратностью как минимум $n+1$. Так как мы пишем собственные числа (2) с учетом кратности, то среди собственных чисел тогда есть участок из как минимум $n+1$ собственного числа, равного $\frac{\dim M}{R^2}$. Легко сообразить, что номера этих собственных чисел начинаются с $N\left(\frac{\dim M}{R^2}\right)$, где $N(\cdot)$ функция Вейля (4). Этот номер оказывается чрезвычайно важным для нас в силу следующей теоремы. В первоначальном варианте она возникла в работе Надирашвили [19] 1996 года, а ее современный расширенный вариант был доказан Эль Суфи и Илиасом в работе [6] 2008 года.

Теорема 2.16 (Надирашвили, Эль Суфи и Илиас)**.** *Пусть* $M \looparrowright \mathbb{S}^n_R$ *минимальное (погруженное) подмногообразие. Тогда метрика, индуцированная на* M *с помощью этого погружения является экстремальной для функционала* $\Lambda_{N\left(\frac{\dim M}{R^2}\right)}(M, g)$.

Верно и обратное утверждение: если метрика экстремальна, то существует минимальное погружение в сферу $M \looparrowright \mathbb{S}^n_R$ *с помощью собственных функций отвечающего этой метрике оператора Лапласа-Бельтрами с собственным числом* $\frac{\dim M}{R^2}$.

Так как нам интересны только поверхности, то есть случай $\dim M = 2$, а радиус сферы после масштабирования можно считать равным 1, то на самом деле нас интересует только величина $N\left(\frac{\dim M}{R^2}\right) = N(2)$.

Таким образом, исследование (гладких) экстремальных метрик может быть осуществлено по следующему сценарию:

1) найти минимальную поверхность в сфере,
2) найти $N(2)$,
3) тогда метрика, индуцированная на минимальной поверхности в сфере, является экстремальной для функционала $\Lambda_{N(2)}$.

Оказывается, что если минимальные поверхности в сферах дают экстремальные метрики для оператора Лапласа-Бельтрами, то минимальные поверхности со свободной границей в шаре связаны с экстремальными метриками в задаче Стеклова.

Задачей Стеклова называется задача

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{в } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \sigma u & \text{на } \partial\Omega, \end{cases} \tag{6}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ евклидова область с регулярной границей. В качестве достаточного условия регулярности можно взять, например, условие липшицевости. Величина σ называется собственным числом задачи Стеклова для области Ω. Как и в случае задач Дирихле и Неймана, спектр задачи Стеклова (6) дискретен

$$0 = \sigma_0(\Omega) \leqslant \sigma_1(\Omega) \leqslant \sigma_2(\Omega) \leqslant \sigma_3(\Omega) \leqslant \dots,$$

где нулевое собственное число нулевое, так как константы являются решением задачи (6). Стоит обратить внимание на нумерацию собственных чисел — в некоторых работах нумеруют с нулевого, в некоторых с первого: мы придерживаемся нумерации с нулевого. Величины $\sigma_i(\Omega)$ называют собственными числами Стеклова области Ω, они образуют спектр Стеклова области Ω.

Собственные числа Стеклова и соответствующие собственные функции совпадают с собственными числами и собственными функциями оператора Дирихле-Неймана

$$\Gamma : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega),$$

определенного формулой

$$\Gamma f = \frac{\partial}{\partial n}(\mathcal{H} f),$$

где $\mathcal{H} f$ обозначает единственное гармоническое продолжение $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ на Ω.

Как и в случае задачи Неймана, интерес представляет задача о максимизации собственных чисел Стеклова среди всех областей данного объема.

Задача Стеклова может рассматриваться и на поверхности Σ с краем. В подобной постановке задача активно изучалась в последнее время, что привело к интересным результатам. Введем аналог нормализованных собственных значений (3) для задачи Стеклова,

$$\bar{\sigma}_k(\Sigma) = \sigma_k(\Sigma) L(\partial\Omega),$$

где $L(\partial\Omega)$ обозначает периметр Σ.

Приведем в качестве примера несколько недавних результатов. В работе 2011 года Фрейзер и Шейн [8] обобщили оценку Вейнстока [31], опубликованную еще в 1954 году.

Теорема 2.17 (Вейнсток (при $\gamma = 0$, $k = 1$), Фрейзер и Шейн)**.** *Пусть Σ компактная поверхность рода γ с k компонентами связности границы. Тогда*

$$\bar{\sigma}_1(\Sigma) \leqslant 2(\gamma + k)\pi.$$

Результат Фрейзер и Шейна опирается на интересную связь между собственными числами Стеклова и минимальными погружениями в шар, это аналог теоремы 2.13 для задачи Стеклова на поверхности с краем.

Предложение 2.18 (Фрейзер, Шейн [8])**.** *Пусть $M \looparrowright \mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ собственное погруженное k-мерное подмногообразие с краем единичного $\mathbb{B}^n$ радиуса 1. Тогда M является минимальным подмногообразием $\mathbb{B}^n$, ортогональным граничной сфере $\mathbb{S}^{n-1} = \partial\mathbb{B}^n$, тогда и только тогда, когда ограничения координатных функций $x^1|_M, \dots, x^n|_M$ на M являются собственными числами Стеклова M с собственным числом 1.*

Следующее определение является естественным аналогом определения 2.3 для случая задачи Стеклова.

Определение 2.19. *Метрика g_0 называется максимальной метрикой для k-го собственного числа Стеклова на поверхности M, если*

$$\bar{\sigma}(g_0) = \sup_g \bar{\sigma}_k(g),$$

где супремум ищется среди всех гладких метрик на M.

Вопрос о максимальных метриках в задаче Стеклова является крайне сложным. В настоящее время известны ответы для первых собственных чисел Стеклова для кольца и ленты Мебиуса. Эти результаты были получены Фрейзер и Шейном в недавней работе [10] с помощью установленной ими связи между максимальными метриками и минимальными погружениями в шар. По сути, это аналог теоремы Надирашвили, Эль Суфи и Илиаса для задачи Стеклова. Обозначим через $\bar{\sigma}_k(g)$ нормализованное k-ое собственное число Стеклова для метрики g на поверхности.

Теорема 2.20 (Фрейзер, Шейн [10, 11])**.** *Пусть M компактная поверхность с границей и g_0 максимальная метрика для k-го собственного числа Стеклова M. Тогда существуют независимые собственные функции $u_1, \dots, u_n$, отвечающие k-му собственному числу, которые дают конформное минимальное погружение $u = (u_1, \dots, u_n) : M \looparrowright \mathbb{B}^n$, такое, что образ M ортогонален граничной сфере $\mathbb{S}^{n-1} = \partial\mathbb{B}^n$, а отображение u является изометрией на ∂M с точностью до умножения метрики на константу.*

Минимальные поверхности, ортогонально подходящие к границе области Ω, называются минимальными поверхностями со свободной границей в Ω. Всё вышесказанное приводит нас от изучения максимальных и экстремальных метрик в задаче Стеклова к изучению минимальных поверхностей со свободной границей.

Оказывается, данная область не может похвастаться большим количеством результатов. Классический результат Нитше [24] говорит, что минимальной поверхность со свободной границей в трехмерном шаре может быть только экваториальный диск.

Главным результатом исследовательской работы в рамках данного гранта за 2018 год является следующий результат, похожий внешне на результат Нитше, но касающийся областей, диффеоморфных кольцу, а не диску. Рассмотрим кольцо

$$A = \{z | \rho < |z| < 1\} \subset \mathbb{C}.$$

Теорема 2.21. *Пусть $u : \bar{A} \longrightarrow \bar{\mathbb{B}}^3_1 \subset \mathbb{R}^3$ собственное минимальное погружение с ветвлением, такое, что $u \in C^2(A) \cap C^1(\bar{A})$, $u(\partial A) \subset \mathbb{S}^2 = \partial\mathbb{B}^3_1$ и $u(A)$ подходит к $\mathbb{S}^2$ ортогонально. Тогда $u(A)$ является частью катеноида.*

Этот результат был ранее высказан Фрейзер и Ли как гипотеза в работе [9].

Этот результат, как оказалось, имеет также неожиданные приложения к однофазной задаче из уравнений с частными производными, описанные в тексте [22], но это уже совсем другая тематика, писать о которой было бы тут уже неуместно, а то мы уже и так на девятой странице.

3. Публикации

В рамках этого гранта были написаны тексты:

- [2], который еще препринт, так как, скорее всего, в него будут добавлены результаты.
- [21], который недавно вышел в Geometric and Functional Analysis.
- [14], который был подан к Journal of Differential Geometry, были получены положительные отзывы с некоторыми замечаниями, финальная версия была снова подана в журнал, ждём окончательного ответа.
- [22], который появится на `arxiv.org` до конца этого года и предназначается в Journal d'Analyse Mathématique.
- Также был написан обзор [25], который выйдет в Трудах МИАН в томе 305 в 2019 году.

4. Доклады, сделанные в 2018 году

[1] International conference "Algebraic Topology, Combinatorics, and Mathematical Physics" on occasion of Victor Buchstaber's 75th birthday, Moscow, May 24–30, 2018
Talk "Isoperimetric inequalities for Laplace eigenvalues on the sphere and the real projective plane"

[2] Visit to Montréal, Québec, Canada, September 2018
Talk "Free boundary minimal surfaces and overdetermined boundary value problems" at Spectral Geometry Seminar at the Université de Montréal, September 20, 2018

[3] Geometry, Topology and Mathematical Physics Seminar, Moscow State University & Steklov Mathematical Institute of RAS.
Talk "Isoperimetric inequalities for Laplace eigenvalues on the sphere", February 7, 2018.

[4] Seminar of the Laboratory of Algebraic Geometry and its Applications, NRU HSE, Moscow
Talk "Isoperimetric inequalities for Laplace eigenvalues on the sphere", March 2, 2018.

[5] Krasilshchik Seminar "Geometry of Differential Equations", IUM
Talk "Isoperimetric inequalities for Laplace eigenvalues on the sphere", March 14, 2018.

[6] Sabitov Seminar "Global Geometry", MSU
Talk "Isoperimetric inequalities for Laplace eigenvalues on the sphere", March 16, 2018.

[7] Spectral Geometry Seminar, IUM
Talk "Free boundary minimal surfaces and overdetermined boundary value problems", October 6, 2018

[8] Geometry and Topology Seminar, MSU
Talk "Free boundary minimal surfaces and overdetermined boundary value problems", November 20, 2018

5. Работа в научных центрах и международных группах

Проводившиеся в рамках гранта научные исследования проводились в тесном сотрудничестве с Н. С. Надирашвили из Institut de Mathématique de Marseille (UMR 7373), особенно во время трёхмесячных визитов в Марсель в 2015 и 2017 годах, которые стали возможным благодаря тому, что я являюсь исследователем российско-французского Междисциплинарного научного центра Понселе (Interdisciplinary Scientific Center J.-V. Poncelet, ISCP, UMI 2615). Также я тесно сотрудничаю с И. В. Полтеровичем (Université de Montréal) и М. А. Карпухиным (University of California, Irvine).

6. Педагогическая деятельность (включая научное руководство)

6.1. **Преподавание.** В 2018 году я преподавал в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова, в Национальном исследовательском университете - Высшей школе экономики и в Независимом московском университете.

[1] Complex analytic manifolds and holomorphic vector bundles-II, Independent University of Moscow, 3-6 year students, February-May 2018, 2 hours per week.

Program.

(1) Holomorphic linear bundles and divisors.
(2) Harmonic theory on compact manifolds.
(3) Hodge decomposition on compact Kähler manifolds.
(4) Hodge Riemann bilinear relations on compact Kähler manifolds.
(5) Hodge manifolds.
(6) Kodaira theorem.

[2] Advanced geometry, Independent University of Moscow, 3-6 year students, September-December 2018, 2 hours per week.

Program.

(1) Vector bundles and Chern-Weil construction of characteristic classes.
(2) Elements of K-theory (Grotendieck group of an abelian monoid, K-group of a manifold, K_c-group, Chern character with compact support.
(3) Differential operators on sections of vector bundles. Symbol of a differential operator. Analytic and topological index. Atiyah-Singer theorem (without proof). Example: $d + d^*$ and Gauß-Bonnet theorem.
(4) Clifford algebra, spinors and spinor structure, Dirac operator.

[3] Differential Geometry. Math in Moscow program of the Independent University of Moscow for undergraduate students from the U.S. and Canada, February-May 2018, 4 hours per week (lecture 2 hours + exersise class 2 hours).

(1) Plane and space curves. Curvature, torsion, Frenet frame.
(2) Surfaces in 3-space. Metrics and the second quadratic form. Curvature.
(3) Connections in tangent and normal bundles to a k-surfaces in $\mathbf{R}^n$.
(4) Parallel translations.
(5) Geodesics.
(6) Gauß and Codazzi formulas. “Theorema egregium” of Gauß.
(7) Gauß-Bonnet theorem.
(8) Extremal properties of geodesics. Minimal surfaces.
(9) Levi-Civita connection.
(10) Exponential map.

[4] Calculus on manifolds. “Math in Moscow” program at the Independent University of Moscow for undergraduate students from the U.S. and Canada, September-December 2018, 4 hours per week (lecture 2 hours + exersise class 2 hours).

Program

(1) Definition and examples of smooth manifolds.
(2) Orientability and orientation.
(3) Tangent vectors and tangent space to a manifold at a point. Tangent bundles. Vector fields.
(4) Skew-symmetric forms on linear spaces. Wedge product.
(5) Differential forms on manifolds. Exterior differential.
(6) Smooth maps of manifolds. Diffeomorphisms. The transformation rule under coordinate change for functions, vector fields and differential forms.
(7) Integration. Coordinate change in the integral. Integration of differential forms. Stokes theorem. Green's formula, Gauss-Ostrogradskii divergence theorem, Stokes formula for a surface in $\mathbb{R}^3$.
(8) Closed and exact forms. The Poincare lemma. De Rham cohomology.

[5] Minimal surfaces, Moscow State University, September-December 2018, 2 hours per week

(1) Basics of differential geometry of surfaces.
(2) Area functional and its variation. Minimal surfaces.
(3) Conformal coordinates. Minimal surfaces in conformal coordinates.
(4) Hopf quadratic differential.
(5) Analytic propertis of minimal surfaces.
(6) Weierstrass representations of minimal surfaces.
(7) Branch points, their order.
(8) Boundary problems, Plateau and free boundary problems.

[6] Exercise classes for various courses at National Research University — Higher School of Economics: Topology-I, January-March 2018, 2 hours per week. Topology-I, September-December 2018, 3 hours per week.

6.2. **Научные семинары.** В 2018 году успешно продолжал работу основанный мной семинар "Спектральная геометрия". Это совместный учебно-исследовательский семинар Независимого московского университета и российско-французского Междисциплинарного научного центра Понселе (Interdisciplinary Scientific Center J.-V. Poncelet, ISCP, UMI 2615).

Также я являюсь регулярным участником семинара по геометрии, топологии и матфизике кафедры Высшей геометрии и топологии мехмата МГУ (семинар С. П. Новикова и В. М. Бухштабера).

6.3. **Научное руководство.** В 2018 году я руководил следующими студентами и аспирантами.

(1) Равиль Габдурахманов, аспирант НИУ ВШЭ и НМУ.
(2) Владимир Медведев, аспирант НМУ (также Université de Montréal, научный руководитель Иосиф Полтерович).
(3) Арсений Райко, студент МГУ.
(4) Иван Салтыков, студент МГУ.
(5) Александр Молокоедов, студент бакалавриата НИУ ВШЭ.
(6) Евгений Лурье, студент бакалавриата НИУ ВШЭ.
(7) Иван Солоненко, студент бакалавриата НИУ ВШЭ.
(8) Михаил Муравьев, студент бакалавриата НИУ ВШЭ.
(9) Владимир Уткин, студент бакалавриата НИУ ВШЭ.
(10) Павел Евсеев, студент бакалавриата НИУ ВШЭ.

Есть еще несколько студентов, не приписанных ко мне формально, но занимающихся со мной.

Список литературы

[1] S. Bando, H. Urakawa, “Generic properties of the eigenvalue of Laplacian for compact Riemannian manifolds”, *Tôhoku Math. J.,* **35**:2 (1983), 155–172.

[2] A. S. Berdnikov, N S. Nadirashvili, A. V. Penskoi, Bounds on Multiplicities of Laplace-Beltrami Operator Eigenvalues on the Real Projective Plane. Preprint `arXiv:1612.04805.`

[3] M. Berger, “Sur les premières valeurs propres des variétés Riemanniennes”, *Compositio Math.,* **26** (1973), 129—149.

[4] B. Colbois, J. Dodziuk, “Riemannian metrics with large λ_1”, *Proc. Amer. Math. Soc.,* **122**:3 (1994), 905—906.

[5] G. Faber, “Beweis, dass unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt”, *Sitz. Ber. Bayer. Akad. Wiss.,* (1923), 169-172.

[6] A. El Soufi, S. Ilias, “Laplacian eigenvalues functionals and metric deformations on compact manifolds”, *J. Geom. Phys.,* **58**:1 (2008), 89-104. Preprint `arXiv:math/0701777.`

[7] A. El Soufi, S. Ilias, “Riemannian manifolds admitting isometric immersions by their first eigenfunctions”, *Pacific J. Math.,* **195**:1 (2000), 91—99.

[8] A. Fraser, R. Schoen, “The first Steklov eigenvalue, conformal geometry, and minimal surfaces”, *Advances in Math,* **226**:5 (2011), 4011–4030. Preprint `arXiv:0912.5392.`

[9] Ailana Fraser and Martin Man-chun Li, *Compactness of the space of embedded minimal surfaces with free boundary in three-manifolds with nonnegative Ricci curvature and convex boundary*, J. Differential Geom. **96** (2014), no. 2, 183–200. MR 3178438

[10] A. Fraser, R. Schoen, “Sharp eigenvalue bounds and minimal surfaces in the ball”, Invent. Math., **203**:3, 823–890. Preprint `arXiv:1209.3789.`

[11] A. Fraser, R. Schoen, “Minimal surfaces and eigenvalue problems”, Contemp. Math., **599** (2013), 105–121. Preprint `arXiv:1304.0851.`

[12] A. Henrot, *Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators*, Basel: Birkhäuser, 2006.

[13] J. Hersch, “Quatre propriétés isopérimétriques de membranes sphériques homogènes”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér A-B,* **270** (1970), A1645—A1648.

[14] M. Karpukhin, N. Nadirashvili, A. Penskoi, I. Polterovich, An isoperimetric inequality for Laplace eigenvalues on the sphere. Submitted to Journal Diff. Geom. Preprint `arXiv:1706.05713.`

[15] N. Korevaar, “Upper bounds for eigenvalues of conformal metrics”, *J. Differential Geom.,* **37**:1 (1993), 73–93.

[16] E. Krahn, “Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises”, *Math. Ann.* **94**:1 (1925), 97–100.

[17] E. Krahn, “Über Minimaleigenschaften der Kugel in drei und mehr Dimensionen”, *Acta Comm. Univ. Dorpat.*, **A9** (1926), 1-44.

[18] P. Li, S.-T. Yau, “A new conformal invariant and its applications to the Willmore conjecture and the first eigenvalue of compact surfaces”, *Invent. Math.,* **69**:2 (1982), 269—291.

[19] N. Nadirashvili, “Berger’s isometric problem and minimal immersions of surfaces”, *Geom. Funct. Anal.,* **6**:5 (1996), 877—897.

[20] N. Nadirashvili, “Isoperimetric inequality for the second eigenvalue of a sphere”, *J. Differential Geom.,* **61**:2 (2002), 335—340.

[21] N. Nadirashvili, A. V. Penskoi, Isoperimetric inequality for the second non-zero eigenvalue of the Laplace-Beltrami operator on the projective plane. Geom. Funct. Anal., 2018, Vol. 28, no. 5, pp 1368–1393. Preprint `arXiv:1608.07334.`

[22] N. Nadirashvili, A. V. Penskoi, Free boundary minimal surfaces and overdetermined boundary value problems. In preparation.

[23] N. Nadirashvili, Y. Sire, "Isoperimetric inequality for the third eigenvalue of the Laplace-Beltrami operator on $\mathbb{S}^2$ J. Diff. Geom., **107**:3 (2017), 561–571. Preprint `arXiv:1506.07017.`

[24] Johannes C. C. Nitsche, *On the boundary regularity of surfaces of least area in Euclidean space*, Continuum mechanics and related problems of analysis (on the occasion of the eightieth birthday of Academician N. I. Muschelišvili) (Russian), Izdat. “Nauka”, Moscow, 1972, pp. 371–373. MR 0394393

[25] A. V. Penskoi. Isoperimetric inequalities for higher eigenvalues of Laplace-Beltrami operator on surfaces. To appear in Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2019, Vol. 305.

[26] R. Petrides, “Maximization of the second conformal eigenvalue of spheres”, Proc. Amer. Math. Soc., **142** (2014), 2385–2394. Preprint `arXiv:1206.0229.`

[27] R. Petrides, “Existence and regularity of maximal metrics for the first laplace eigenvalue on surfaces”, Geom. Funct. Anal., **24**:4, 1336–1376. Preprint `arXiv:1310.4697.`

[28] G. Pólya, "On the characteristic frequencies of a symmetric membrane", *Math. Z.*, **63** (1955), 331–337.
[29] J. W. Strutt, baron Rayleigh, *The Theory of Sound,* Vol. I, II, London, London : Macmillan, 1877, 1878.
[30] T. Takahashi, "Minimal immersions of Riemannian manifolds", *J. Math. Soc. Japan,* **18**:4 (1966), 380—385.
[31] R. Weinstock, "Inequalities for a classical eigenvalue problem", *J. Rational Mech. Anal.,* **3** (1954), 745–753.
[32] P. C. Yang, S.-T. Yau, "Eigenvalues of the laplacian of compact Riemann surfaces and minimal submanifolds", *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.,* **7**:1 (1980), 55–63.