ОТЧЕТ О НАУЧНОЙ И ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ РАБОТЕ ЗА 2016 ГОД СТИПЕНДИАТА КОНКУРСА «МОЛОДАЯ МАТЕМАТИКА РОССИИ»

ПЕНСКОЙ А. В.

Введение

Главной темой моих исследований 2016 года, как и последние несколько лет, являлось описание метрик на замкнутых поверхностях, экстремальных для собственных значений оператора Лапласа-Бельтрами. Более конкретно, в 2016 году я продолжал начатое во время моей трёхмесячной работы летом 2015 года в Institut de Mathématique de Marseille (UMR 7373) совместно с Н. С. Надирашвили исследование максимальных метрик на вещественной проективной плоскости. Подробное описание полученных результатов вместе с введением в данную проблематику следует ниже, краткое же резюме такое:

- Было доказано изопериметрическое неравенство для второго ненулевого собственноо числа оператора Лапласа-Бельтрами на вещественной проективной плоскости. Для метрики площади 1 это собственное число не больше, чем 20π. Это значение может быть достигнуто как предел на последовательности метрик площади 1 на проективной плосткости, сходящейся к сингулярной метрике на проективной плоскости и сфере со стандартными метриками, касающимися в одной точке, такими, что площади проективной плоскости и сферы относятся как $3 : 2$. Также доказано, что кратность второго ненулевого собственного числа на вещественной проективной плоскости не больше, чем 6. (Результат, полученный совместно с Н. С. Надирашвили).
- Были улучшены верхние оценки для кратностей собственных чисел с чётными номерами оператора Лапласа-Бельтрами на вещественной проективной плоскости. Также были предложены новые оценки для кратностей собственных чисел Дирихле, Неймана и Стеклова вещественной проективной плоскости с дырами. (Результат, полученный совместно с А. С. Бердниковым и Н. С. Надирашвили).

В 2016 году продолжалась педагогическая деятельность, как чтение лекций и ведение семинаров, так и научное руководство учениками, в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова, в Национальном исследовательском университете - Высшей школе экономики и в Независимом московском университете.

1. Научные результаты, полученные в 2016 году

1.1. История задачи. Проблема геометрической оптимизации собственных значений оператора Лапласа восходит к лорду Рэлею.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ограниченная область в евклидовом пространстве. Рассмотрим спектральную задачу для оператора Лапласа Δ в области Ω с граничным условием Дирихле

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = \lambda u, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{array} \right. \tag{1}$$

Известно, см., например, [3], что спектр является положительным, дискретным, с конечной кратностью и стремящимся к бесконечности. Будем обозначать спектр задачи (1) через $0 < \lambda_1(\Omega) < \lambda_2(\Omega) \leqslant \lambda_3(\Omega) \leqslant \lambda_4(\Omega) \leqslant \dots$, причем каждое собственное число в этой последовательности встречается столько раз, какова его кратность. Величины $\lambda_i(\Omega)$ называются собственными числами Дирихле области Ω и образуют спектр Дирихле области Ω.

В изданной в 1877-1878 годах знаменитой книге [15] лорд Рэлей поставил следующую задачу: найти область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ заданной площади, для которой первое собственное число $\lambda_1(\Omega)$ минимально. Без условия фиксированной площади задача тривиальна: при гомотетии плоской области Ω с коэффициентом растяжения μ спектр Ω будет делиться на μ^2, а потому $\lambda_1(\Omega)$ может быть легко сделано сколь угодно малым. Задача Рэлея явилась первой в истории задачей о геометрической оптимизации собственных значений оператора Лапласа. Рэлей дал правильный ответ: минимум первого собственного числа Дирихле достигается на диске, но доказательство использовало физические соображения и не являлось строгим. Физически ответ может быть проинтерпретирован следующим образом: среди всех барабанов с заданной площадью мембраны самый низкий звук издает барабан с круглой мембраной. Строгое доказательство результата Рэлея и его обобщение на случай $\mathbb{R}^n$ было дано в двадцатых прошлого века независимо Фабером [2] и Краном [6].

Теорема 1.1 (Фабер, Кран)**.** *Пусть $c > 0$ и $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ шар в $\mathbb{R}^n$ объема c. Тогда* $\lambda_1(\mathbb{B}^n) = \min\{\lambda_1(\Omega) | \Omega \subset \mathbb{R}^n, \mathrm{Vol}(\Omega) = c\}$.

Наиболее естественным обобщением задачи Рэлея является вопрос о минимизации второго собственного числа Дирихле $\lambda_2(\Omega)$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с фиксированным объемом. Ответ на данный вопрос был дан в не очень явной форме в работе Крана [7] 1926 года, и поэтому иногда приписывается П. Сегё, см. работу Пойа [14].

Теорема 1.2 (Кран, П. Сегё)**.** *Пусть $c > 0$ и $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ шар в $\mathbb{R}^n$ объема $c/2$. Тогда минимум достигается на объединении двух шаров,* $\lambda_2(\mathbb{B}^n \sqcup \mathbb{B}^n) = \min\{\lambda_2(\Omega) | \Omega \subset \mathbb{R}^n, \mathrm{Vol}(\Omega) = c\}$.

Проблема минимизации следующих собственных чисел Дирихле области является открытой и известны лишь частичные результаты, которые описаны в книге [3, глава 5]. В частности, существует гипотеза о том, что для третьего собственного числа Дирихле минимум в размерности 2 и 3 достигается на шаре, а в размерности $n \geqslant 4$ на объединении трех шаров равного радиуса. Компьютерное моделирование показывает, что в плоском случае для $\lambda_4(\Omega)$ минимум достигается на объединении двух дисков неравного радиуса, для λ_k, $k \geqslant 5$, полученные компьютерными методами экстремальные области довольно причудливы, см. [3, рис. 5.1], и не сформулированы даже гипотезы, описывающие ответ. Вместо спектральной задачи с граничным условием Дирихле (1) можно рассматривать спектральную задачу для ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с граничным условием Неймана. В этом случае также имеются некоторые результаты.

У описанной задачи геометрической оптимизации собственных чисел оператора Лапласа евклидовых областей есть естественные обобщения на случай римановых многообразий. Можно рассматривать задачи Дирихле и Неймана на многообразиях с краем, но совершенно новым является случай многообразий без края.

1.2. **Постановка основной задачи.** Пусть M замкнутая поверхность, и g риманова метрика на M. Спектр оператора Лапласа-Бельтрами на замкнутой поверхности неотрицателен, дискретен, имеет конечные кратности и возрастает к бесконечности. Так как оператор Лапласа-Бельтрами Δ зависит от метрики g, то и собственные числа (обратим внимание на использование нумерации собственных чисел!)

$$0 = \lambda_0(M, g) < \lambda_1(M, g) \leqslant \lambda_2(M, g) \leqslant \lambda_3(M, g) \leqslant \dots \tag{2}$$

зависят от метрики g. Хорошо известно, что собственные числа оператора Лапласа-Бельтрами Δ обладают следующим свойством масштабирования, $\forall t > 0 \quad \lambda_i(M, tg) = \frac{\lambda_i(M,g)}{t}$. Поэтому вместо $\lambda_i(M, g)$ лучше рассматривать функционалы

$$\Lambda_i(M, g) = \lambda_i(M, g)\,\mathrm{Area}(M, g), \tag{3}$$

где $\mathrm{Area}(M, g)$ обозначает площадь, которые инвариантны при преобразованиях $g \mapsto tg$.

Итак, **рассмотрим задачу нахождения при фиксированном i супремума $\sup \Lambda_i(M, g)$ функционала $\Lambda_i(M, g)$ на пространстве всех римановых метрик g на фиксированной поверхности M. Эта задача эквивалентна задаче нахождения супремума $\sup \lambda_i(M, g)$ на пространстве всех римановых метрик g на фиксированной поверхности M, таких, что площадь M равна** 1.

Оказывается, что вопрос о нахождении при фиксированном i супремума $\sup \Lambda_i(M, g)$ является очень трудным, и к настоящему времени получено сравнительно мало результатов.

Из результатов Янга и Яу [16] и Кореваара [5] следует, что при всех i значения $\sup \Lambda_i(M, g)$ конечны, так как функционалы $\Lambda_i(M, g)$ ограничены. Необходимо заметить, что Кольбуа и Додзюк доказали [1], что для многообразия M размерности $\dim M \geqslant 3$ функционал $\lambda_i(M, g)$ не ограничен на пространстве римановых метрик g на M объема 1. Именно поэтому мы рассматриваем геометрическую оптимизацию собственных чисел оператора Лапласа-Бельтрами только на поверхностях.

Определение 1.3. *Метрика g_0 на фиксированной поверхности M называется максимальной для функционала $\Lambda_i(M, g)$, если $\sup \Lambda_i(M, g) = \Lambda_i(M, g_0)$, где супремум берется по пространству всех римановых метрик g на фиксированной поверхности M.*

К настоящему времени мы знаем удивительно мало максимальных метрик.

Теорема 1.4 (Херш [4])**.** *Стандартная метрика на сфере является единственной максимальной метрикой для $\Lambda_1(\mathbb{S}^2, g)$.*

Теорема 1.5 (Ли, Яу [8])**.** *Стандартная метрика на проективной плоскости является единственной максимальной метрикой для $\Lambda_1(\mathbb{RP}^2, g)$.*

Теорема 1.6 (Надирашвили [9])**.** *Единственной максимальной метрикой для $\Lambda_1(\mathbb{T}^2, g)$ является метрика на равностороннем торе, то есть на торе, который является фактором евклидовой плоскости по решетке из параллелограммов, составленных из двух равносторонних треугольников.*

Недавние результаты указали на значительную роль метрик с особенностями.

Теорема 1.7 (Надирашвили [10], Петридес [12])**.** *Имеет место равенство $\sup \Lambda_2(\mathbb{S}^2, g) = 16\pi$, и этот супремум достигается как предел значений $\Lambda_2(\mathbb{S}^2, g)$ на последовательности гладких метрик, сходящейся к сингулярной метрике, получающейся на объединении двух сфер равного радиуса со стандартной метрикой, касающихся друг друга в одной точке.*

Теорема 1.8 (Петридес [13]). *Пусть Σ_γ обозначает ориентируемую замкнутую поверхность рода γ. Если $\sup \Lambda_1(\Sigma_\gamma, g) > \sup \Lambda_1(\Sigma_{\gamma-1}, g)$, то $\sup \Lambda_1(\Sigma_\gamma, g)$ достигается на метрике, которая является гладкой, за исключением конечного числа конических особенностей.*

Теорема 1.9 (Надирашвили, Сир [11]). *Верно равенство $\sup \Lambda_3(\mathbb{S}^2, g) = 24\pi$, и этот супремум достигается как предел значений $\Lambda_3(\mathbb{S}^2, g)$ на последовательности гладких метрик, сходящейся к сингулярной метрике, получающейся на объединении трёх касающихся сфер равного радиуса со стандартной метрикой.*

Оказывается, что решение задачи геометрической оптимизации на поверхностях тесно связана с задачей нахождения верхних оценок на кратности собственных чисел, поэтому этот вспомогательный вопрос также необходимо рассматривать.

1.3. **Результаты, полученные в 2016 году.** Полученные результаты касаются вещественной проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$. Первый результат — полное решение задачи геометрической оптимизации для второго ненулевого собственного числа оператора Лапласа-Бельтрами на $\mathbb{RP}^2$.

Теорема 1.10 (Надирашвили, Пенской). *Верно равенство*

$$\sup \Lambda_2(\mathbb{RP}^2, g) = 20\pi,$$

причём это значение может быть достигнуто как предел на последовательности метрик площади 1 *на проективной плосткости, сходящейся к сингулярной метрике на проективной плоскости и сфере со стандартными метриками, касающимися в одной точке, такими, что площади проективной плоскости и сферы относятся как* $3 : 2$.

Кратность второго ненулевого собственного числа на вещественной проективной плоскости не больше, чем 6.

Второй результат касается верхней оценки кратностей собственных чисел оператора Лапласа-Бельтрами на вещественной проективной плоскости — как уже сказано выше, эта задача является вспомогательной для решения задачи геометрической оптимизации, но имеет и самостоятельный интерес. Обозначим через $m(\Sigma, g, \lambda_i)$ кратность собственного числа λ_i на замкнутой поверхности Σ с метрикой g.

Обозначим через $\mathbb{R}P^2_h$ проективную плоскость с конечным числом дырок. На ней мы рассматриваем спектральную задачу с граничными условиями Дирихле или Неймана с кратностями собственных чисел $m(\mathbb{R}P^2_h, g, \lambda_i)$.

Можно рассмотреть и задачу Стеклова (хотя не будем тут писать, что это, текст и так уже длинноват). Пусть s — абсолютно непрерывная мера Радона на $\partial\Sigma$. Обозначим через $m(\mathbb{R}P^2_h, g, s, \sigma_l)$ кратности соответствующих собственных чисел Стеклова σ_l.

Теорема 1.11 (Бердников, Надирашвили, Пенской). *Для любого натурального l и метрики g верна оценка*

$$m(\mathbb{R}P^2, g, \lambda_{2l}) \leqslant 4l + 1.$$

Для любого натурального числа l, любой метрики g и любой абсолютно непрерывной меры Радона s на $\partial\mathbb{R}P^2_h$ верны неравенства

$$m(\mathbb{R}P^2_h, g, \lambda_{2l}) \leqslant 4l + 2, \tag{4}$$

$$m(\mathbb{R}P^2_h, g, s, \sigma_{2l}) \leqslant 4l + 2. \tag{5}$$

2. Публикации за 2016 год

[1] N. S. Nadirashvili, A. V. Penskoi, Isoperimetric inequality for the second non-zero eigenvalue of the Laplace-Beltrami operator on the projective plane. Preprint `arXiv:1608.07334`, submitted to *Duke Mathematical Journal*.

[2] A. S. Berdnikov, N. S. Nadirashvili, A. V. Penskoi, Bounds on Multiplicities of Laplace-Beltrami Operator Eigenvalues on the Real Projective Plane, Preprint `arXiv:1612.04805`.

3. Доклады, сделанные в 2016 году

[1] Конференция “Doppler Institute-CRM Workshop on the occasion of 80th birthdays of Jiři Patera and Pavel Winternitz”, Prague, Czech Republic, 30 мая - 3 июня 2016 года. Доклад “Spectral geometry and symmetry reduction”.

[2] Визит в Weizmann Institute of Science, Rehovot, Israel, март 2016 года. Доклад “Recent advances in geometric optimization of eigenvalues of the Laplace-Beltrami operator on closed surfaces” at the Joint session of Seminar in Geometric functional analysis and probability & Geometry and Topology seminar, 3 марта 2016 года.

[3] Заседание Московского математического общества 19 апреля 2016 года. Доклад "Спектральная геометрия: слышать форму, видеть звук".

4. Работа в научных центрах и международных группах

Проводившиеся в 2016 год научные исследования проводились в тесном сотрудничестве с Н. С. Надирашвили из Institut de Mathématique de Marseille (UMR 7373), которое стало возможным благодаря тому, что я являюсь исследователем в русско-французской Laboratoire J.-V. Poncelet (UMI 2615). Также соавтором нашей второй статьи был мой аспирант из НМУ А. С. Бердников, обучающийся сейчас в MIT. Также поддерживается тесное научное общение с Иосифом Полтеровичем (Université de Montréal).

5. Педагогическая деятельность (включая научное руководство)

5.1. **Преподавание.** В 2016 году я преподавал в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова, в Национальном исследовательском университете - Высшей школе экономики и в Независимом московском университете.

- Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
  - Классическая дифференциальная геометрия (для студентов 2 курса), февраль-май 2016 года, 2 часа семинаров в неделю.
  - Аналитическая геометрия (для студентов 1 курса), сентябрь-декабрь 2016 года, 4 часа семинаров в неделю.
- Национальный исследовательский университет - Высшая школа экономики
  - Riemannian Geometry, совместный курс НИУ ВШЭ и программы “Math in Moscow” НМУ, февраль-май 2016 года, 4 часа в неделю (2 часа лекций + 2 часа семинаров).
  - Анализ-1 (для студентов 1 курса), сентябрь-декабрь 2016 года, 2 часа семинаров в неделю.
- Независимый московский университет
  - Дифференциальная геометрия (для студентов 2 курса), февраль-май 2016 года, 4 часа в неделю (2 часа лекций + 2 часа семинаров).

– Спектральная геометрия (для студентов 3-5 курса, аспирантов), сентябрь-декабрь 2016 года, 2 часа лекций в неделю.
– Topology-I, программа "Math in Moscow" НМУ, февраль-май 2016 года, 4 часа в неделю (2 часа лекций + 2 часа семинаров).
– Topology-I, программа "Math in Moscow" НМУ, сентябрь-декабрь 2016 года, 4 часа в неделю (2 часа лекций + 2 часа семинаров).

5.2. **Научные семинары.** В 2016 году успешно продолжал работу основанный мной семинар "Спектральная геометрия". Это совместный учебно-исследовательский семинар Независимого московского университета и российско-французской Laboratoire J.-V. Poncelet (UMI 2615).

Также я являюсь регулярным участником семинара по геометрии, топологии и матфизике кафедры Высшей геометрии и топологии мехмата МГУ (семинар С. П. Новикова).

5.3. **Научное руководсто.** В 2016 году я руководил следующими студентами и аспирантами.

- Александр Бердников, аспирант НМУ (также MIT, научный руководитель Emmy Murphy).
- Равиль Габдурахманов, аспирант НИУ ВШЭ и НМУ.
- Михаил Карпухин, аспирант МГУ и НМУ (также McGill University, научные руководители Дмитрий Якобсон, Иосиф Полтерович).
- Владимир Медведев, аспирант НМУ (также Université de Montréal, научный руководитель Иосиф Полтерович).
- Арсений Райко, студент МГУ.
- Иван Салтыков, студент МГУ.
- Артём Филановский, закончил в 2016 году бакалавриат НИУ ВШЭ.

Список литературы

[1] B. Colbois, J. Dodziuk, "Riemannian metrics with large λ_1", *Proc. Amer. Math. Soc.,* **122**:3 (1994), 905—906.
[2] G. Faber, "Beweis, dass unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt", *Sitz. Ber. Bayer. Akad. Wiss.,* (1923), 169-172.
[3] A. Henrot, *Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators*, Basel: Birkhäuser, 2006.
[4] J. Hersch, "Quatre propriétés isopérimétriques de membranes sphériques homogènes", *C. R. Acad. Sci. Paris Sér A-B,* **270** (1970), A1645—A1648.
[5] N. Korevaar, "Upper bounds for eigenvalues of conformal metrics", *J. Differential Geom.,* **37**:1 (1993), 73–93.
[6] E. Krahn, "Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises", *Math. Ann.* **94**:1 (1925), 97–100.
[7] E. Krahn, "Über Minimaleigenschaften der Kugel in drei und mehr Dimensionen", *Acta Comm. Univ. Dorpat.*, **A9** (1926), 1-44.
[8] P. Li, S.-T. Yau, "A new conformal invariant and its applications to the Willmore conjecture and the first eigenvalue of compact surfaces", *Invent. Math.,* **69**:2 (1982), 269—291.
[9] N. Nadirashvili, "Berger's isometric problem and minimal immersions of surfaces", *Geom. Funct. Anal.,* **6**:5 (1996), 877—897.
[10] N. Nadirashvili, "Isoperimetric inequality for the second eigenvalue of a sphere", *J. Differential Geom.,* **61**:2 (2002), 335—340.
[11] N. Nadirashvili, Y. Sire, Isoperimetric inequality for the third eigenvalue of the Laplace-Beltrami operator on $\mathbb{S}^2$, Preprint `arXiv:1506.07017`.
[12] R. Petrides, "Maximization of the second conformal eigenvalue of spheres", Preprint `arXiv:1206.0229`.
[13] R. Petrides, "Existence and regularity of maximal metrics for the first laplace eigenvalue on surfaces", Preprint `arXiv:1310.4697`.
[14] G. Pólya, "On the characteristic frequencies of a symmetric membrane", *Math. Z.*, **63** (1955), 331–337.

[15] J. W. Strutt, baron Rayleigh, *The Theory of Sound,* Vol. I, II, London, London : Macmillan, 1877, 1878.

[16] P. C. Yang, S.-T. Yau, “Eigenvalues of the laplacian of compact Riemann surfaces and minimal submanifolds”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.,* **7**:1 (1980), 55–63.