Отчет за 2017 год
по гранту конкурса «Молодая математика России»

Никита Н. Сеник

1 Полученные результаты

В этом году было продолжено изучение локально периодических задач усреднения. Рассмотрим матричный оператор вида

$$\mathcal{A}^{\varepsilon} = -\operatorname{div} A(x, x/\varepsilon)\nabla,$$

действующий из комплексного пространства Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)^n$ в двойственное к нему пространство $H^{-1}(\mathbb{R}^d)^n$. Тензорнозначная (ограниченная) функция A предполагается гёльдеровой с показателем $s \in [0,1]$ (при $s = 0$ подразумевается равномерная непрерывность) по первой переменной и периодической — по второй; отображение $x \mapsto A(x, x/\varepsilon)$ тем самым оказывается локально периодическим. Отметим, что при малых ε коэффициенты оператора быстро осциллируют вдоль любых направлений в пространстве.

Мы считаем, что $\mathcal{A}^{\varepsilon}$ слабо коэрцитивен равномерно относительно $\varepsilon > 0$ из некоторой окрестности $\mathscr{E}$ нуля, так что при $f \in L_2(\mathbb{R}^d)^n$ сильно эллиптическая система уравнений

$$\mathcal{A}^{\varepsilon} u_{\varepsilon} - \mu u_{\varepsilon} = f$$

имеет единственное решение для каждого $\mu \in \mathbb{C}$ вне фиксированного сектора $\mathcal{S}$ и сразу для всех $\varepsilon \in \mathscr{E}$. Более того, последовательность решений $\{u_{\varepsilon}\}_{\varepsilon \in \mathscr{E}}$ оказывается равномерно ограниченной в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)^n$, а значит, ее подпоследовательность имеет в $L_2(\mathbb{R}^d)^n$ слабый предел u_0. Как хорошо известно, функция u_0 сама является решением сильно эллиптической системы

$$\mathcal{A}^0 u_0 - \mu u_0 = f,$$

в которой $\mathcal{A}^0$ — эффективный оператор, имеющий тот же вид, что и $\mathcal{A}^{\varepsilon}$, но с медленно меняющимися коэффициентами:

$$\mathcal{A}^0 = -\operatorname{div} A^0(x)\nabla.$$

Это означает, что резольвента исходного оператора сходится при $\varepsilon_k \to 0$ к резольвенте эффективного оператора в слабой операторной топологии на $L_2(\mathbb{R}^d)^n$.

Мы доказали, что резольвента на самом деле имеет предел по операторной норме. Кроме того, при $s > 0$ удалось определить и скорость сходимости:

$$\|(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1} f - (\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1} f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)^n} \leqslant C\varepsilon^s \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)^n}. \tag{1}$$

Далее, мы выяснили, что если $r \in (0,1)$, то композиция $(-\Delta)^{r/2}(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1}$ также сходится к $(-\Delta)^{r/2}(\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1}$, причем при $s > 0$

$$\|(-\Delta)^{r/2}((\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1} f - (\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1} f)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)^n} \leqslant C\varepsilon^{s\wedge(1-r)} \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)^n} \tag{2}$$

(под $s\wedge(1-r)$ понимается наименьшее из чисел s и $1-r$). Для $r = s$ данное приближение может быть улучшено, если принять во внимание так называемый корректор $\mathcal{K}_\mu^\varepsilon$:

$$\|(-\Delta)^{s/2}((\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1} f - (\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1} f - \varepsilon\mathcal{K}_\mu^\varepsilon f)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)^n} \leqslant C\varepsilon^s \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)^n}. \tag{3}$$

Еще один корректор — $\mathcal{C}_\mu^\varepsilon(s)$ — используется, чтобы усилить приближение (1):

$$\|(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1} f - (\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1} f - \varepsilon\mathcal{C}_\mu^\varepsilon(s) f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)^n} \leqslant C\varepsilon^{2s/(2-s)} \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)^n}. \tag{4}$$

Если $s = 1$, то оценки (1), (3) и (4) точны по порядку ε.

Большая часть результатов для случая $s = 1$ была установлена годом ранее, теперь этот материал подготовлен к публикации [Se17$_1$]. Для $s \in [0,1)$ результаты были анонсированы в статье [Se17$_2$]; сейчас идет работа над подробным изложением.

Помимо локально периодических операторов во всём пространстве, исследовались также и периодические операторы в бесконечном цилиндре $\mathbb{R}^{d_1} \times \Omega$, сечением которого является компактная область в $\mathbb{R}^{d_2}$ с достаточно гладкой границей. Коэффициенты оператора предполагались периодическими вдоль оси цилиндра и липшицевыми — по переменной на сечении Ω. На границе цилиндра ставились или условия типа Дирихле, или условия типа Неймана. Для резольвенты такого оператора получены приближения по операторным нормам, однако, за исключением оценки вида (1), порядок соответствующих погрешностей стал хуже, чем для задачи во всём пространстве, — из-за влияния границы.

Цитированная литература

[Se17$_1$] *Senik N. N.* Homogenization for non-self-adjoint locally periodic elliptic operators. — 2017. — arXiv:1703.02023 [math.AP].

[Se17$_2$] *Сеник Н. Н.* Об усреднении несамосопряженных локально периодических эллиптических операторов // *Функц. анализ и его прил.* — 2017. — Т. 51, № 2. — С. 92–96.

2 Опубликованные и поданные в печать работы

- *Senik N. N.* Homogenization for non-self-adjoint periodic elliptic operators on an infinite cylinder // *SIAM J. Math. Anal.* — 2017. — Vol. 49, no. 2. — Pp. 874–898.
- *Сеник Н. Н.* Об усреднении несамосопряженных локально периодических эллиптических операторов // *Функц. анализ и его прил.* — 2017. — Т. 51, № 2. — С. 92–96.
- *Senik N. N.* Homogenization for non-self-adjoint locally periodic elliptic operators. — 2017. — arXiv:1703.02023 [math.AP].

3 Участие в конференциях и школах

- Устный доклад на конференции *8th International Conference on Differential and Functional Differential Equations,* Москва.

- Устный доклад на конференции *9th St. Petersburg Conference in Spectral Theory Dedicated to the Memory of M. Sh. Birman,* Санкт-Петербург.

- Устный доклад на конференции *Days on Diffraction,* Санкт-Петербург.

- Устный доклад на конференции *Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis,* Ростов-на-Дону.

4 Работа в научных центрах и международных группах

Являюсь научным сотрудником на кафедре высшей математики и математической физики СПбГУ.