Итоговый отчет
по гранту конкурса «Молодая математика России»

Никита Н. Сеник

1 Результаты, полученные в 2018 году

В прошлом году была изучена задача усреднения для локально периодического оператора во всём пространстве, получены различные приближения по операторным нормам и установлены, когда это было возможно, квалифицированные оценки соответствующих погрешностей. В этом году мы перешли к аналогичным задачам в области. Приведем постановку задачи Дирихле в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ с границей класса $C^{1,1}$.

Пусть $\varepsilon > 0$, и пусть $\mathcal{A}^\varepsilon$ — матричный оператор, который задан формулой

$$\mathcal{A}^\varepsilon = -\operatorname{div} A(x, x/\varepsilon)\nabla \tag{1}$$

и действует из комплексного пространства Соболева $\mathring{H}^1(\Omega)^n$ в двойственное к нему пространство $H^{-1}(\Omega)^n$. Функция A в операторе считается липшицевой по первой переменной и периодической и равномерно ограниченной — по второй. Грубо говоря, коэффициенты $\mathcal{A}^\varepsilon$ при малых значениях параметра ε быстро осциллируют (вдоль всех направлений $\mathbb{R}^d$) с медленно меняющейся амплитудой, так что представляют собой локально периодические функции. Обратим внимание на то, что, хотя от A и требуется некоторая гладкость по одной из переменных, само отображение $x \mapsto A(x, x/\varepsilon)$, входящее в $\mathcal{A}^\varepsilon$, может быть разрывным.

Оператор $\mathcal{A}^\varepsilon$ равномерно ограничен относительно ε, и если еще предположить, что $\mathcal{A}^\varepsilon$ равномерно *слабо коэрцитивен* по ε при достаточно малых ε, то он станет «равномерно» секториальным. Тогда для каждого μ вне соответствующего сектора $\mathcal{S}$ сильно эллиптическая система

$$\mathcal{A}^\varepsilon u_\varepsilon - \mu u_\varepsilon = f$$

с $f \in L_2(\Omega)^n$ однозначно разрешима сразу при всех достаточно малых ε, а соответствующая последовательность решений u_ε равномерно ограничена в пространстве $H^1(\Omega)^n$. Тем самым некоторая ее подпоследовательность u_{ε_k} при $\varepsilon_k \to 0$ имеет в $\mathring{H}^1(\Omega)^n$ слабый предел u_0. Согласно классическим результатам, функция u_0 также является решением сильно эллиптической системы

$$\mathcal{A}^0 u_0 - \mu u_0 = f,$$

в которой $\mathcal{A}^0$ — эффективный оператор, имеющий тот же вид, что и $\mathcal{A}^\varepsilon$, но с медленно меняющимися (неосциллирующими) коэффициентами:

$$\mathcal{A}^0 = -\operatorname{div} A^0(x)\,\nabla.$$

На операторном языке это значит, что при $\varepsilon_k \to 0$ резольвента исходного оператора сходится к резольвенте эффективного оператора в слабой операторной топологии $(L_2(\Omega)^n \to H^1(\Omega)^n)$, а следовательно, и в сильной операторной топологии на $L_2(\Omega)^n$.

Знание операторных аппроксимаций позволяет не только собственно приближать решение u_ε (равномерно по правой части f), но и судить о спектре оператора $\mathcal{A}^\varepsilon$ при малых ε (например, о наличии лакун, если в спектре $\mathcal{A}^0$ они есть), а потому подобные аппроксимации представляют немалый интерес, в том числе и для приложений.

Мы установили точную по порядку скорость сходимости в равномерной операторной топологии на $L_2(\Omega)^n$:

$$\|(\mathcal{A}^\varepsilon-\mu)^{-1}f-(\mathcal{A}^0-\mu)^{-1}f\|_{L_2(\Omega)^n} \leqslant C_1\varepsilon\|f\|_{L_2(\Omega)^n}. \tag{2}$$

Кроме того, было найдено приближение в равномерной операторной топологии $(L_2(\Omega)^n \to H^1(\Omega)^n)$ и доказана оценка погрешности

$$\|(\mathcal{A}^\varepsilon-\mu)^{-1}f-(\mathcal{A}^0-\mu)^{-1}f-\varepsilon\mathcal{K}^\varepsilon_\mu f\|_{H^1(\Omega)^n} \leqslant C_2\varepsilon^{1/2}\|f\|_{L_2(\Omega)^n}. \tag{3}$$

Отметим, что сходимости по этой «энергетической» операторной норме, вообще говоря, нет, однако при $r \in (0,1)$

$$\|(\mathcal{A}^\varepsilon-\mu)^{-1}f-(\mathcal{A}^0-\mu)^{-1}f\|_{H^r(\Omega)^n} \leqslant C_3\varepsilon^{(1/2)\wedge(1-r)}\|f\|_{L_2(\Omega)^n} \tag{4}$$

(здесь $\alpha\wedge\beta=\min\{\alpha,\beta\}$). По сравнению с задачами во всём пространстве порядок погрешностей в приближениях (3) и (4) оказывается хуже: в $\mathbb{R}^d$, напомним, было ε и ε^{1-r} соответственно. Это объясняется влиянием так называемого пограничного слоя, который «компенсирует» отсутствие правильной локально периодической структуры на границе области. Если же «сузить» приближение на строго внутреннюю подобласть $\Sigma \subset\subset \Omega$, то в (3) можно получить точную по порядку оценку:

$$\|(\mathcal{A}^\varepsilon-\mu)^{-1}f-(\mathcal{A}^0-\mu)^{-1}f-\varepsilon\mathcal{K}^\varepsilon_\mu f\|_{H^1(\Sigma)^n} \leqslant C_4\varepsilon\|f\|_{L_2(\Omega)^n}. \tag{5}$$

То же верно и для «сужения» оценки (4). Из-за пограничного слоя нам пока не удалось уточнить приближение по операторной норме в $L_2(\Omega)^n$ и выписать второй член.

Заметим, что при довольно естественных условиях на оператор $\mathcal{A}^\varepsilon$, все результаты переносятся из гильбертовых пространств L_2 и H^1 в негильберовые L_p и W_p^1 при подходящих p.

Для доказательства этих оценок мы развивали подход, который ранее позволил нам получить аналогичные результаты для периодических и локально периодических задач во всём пространстве. Он объединяет идеи операторного характера и классические результаты теории усреднения, а в его основе лежит некоторое операторное равенство, похожее на стандартное резольвентное тождество.

Из такого «резольвентного» тождества получилось еще извлечь зависимость правых частей (2)–(5) от параметра μ и установить уже двупараметрические оценки. Например, если выполнено $\alpha \leqslant d_\mu$ и $d_\mu^{-1}|\mu| \leqslant \beta$, где $d_\mu = \operatorname{dist}(\mu, \mathcal{S})$, а $\alpha > 0$ и $\beta < \infty$ — фиксированные постоянные, то $C_1 \leqslant (d_\mu^{-1/2} + \varepsilon)\hat{C}_1$ и $C_2 \leqslant \leqslant (d_\mu^{-1/4} + \varepsilon^{1/2})\hat{C}_2$, причем $\hat{C}_1$ и $\hat{C}_2$ оцениваются равномерно по ε и μ. С помощью представления операторной экспоненты в виде контурного интеграла от резольвенты это позволяет перейти от приближений для резольвенты эллиптического оператора к приближениям для соответствующей параболической операторной полугруппы. Так, для равномерно *сильно коэрцитивого* оператора $\mathcal{A}^\varepsilon$ мы установили, что при $t \geqslant 0$

$$\|e^{-t\mathcal{A}^\varepsilon} f - e^{-t\mathcal{A}^0} f\|_{L_2(\Omega)^n} \leqslant \tilde{C}_1 \varepsilon (t + \varepsilon^2)^{-1/2} e^{-ct} \|f\|_{L_2(\Omega)^n},$$

а при $t > 0$

$$\|e^{-t\mathcal{A}^\varepsilon} f - e^{-t\mathcal{A}^0} f - \varepsilon \mathcal{K}_\mu^{\varepsilon,t} f\|_{H^1(\Omega)^n} \leqslant \tilde{C}_2 \varepsilon^{1/2} t^{-1} (t^{1/4} + \varepsilon^{1/2}) e^{-ct} \|f\|_{L_2(\Omega)^n},$$

где $c > 0$.

2 Сравнение достигнутых за 3 года результатов с проектом исследований

Мы планировали изучить задачи усреднения для общих периодических (включая периодические лишь по некоторым переменным) эллиптических операторов в $\mathbb{R}^d$ и в области вида $\mathbb{R}^{d_1} \times \Omega_2$ (Ω_2 — гладкая ограниченная область в $\mathbb{R}^{d_2}$) с условиями Дирихле или Неймана на границе, от них перейти к задачам усреднения для локально периодических эллиптических операторов в $\mathbb{R}^d$, затем обобщить всё на случай матричных операторов, и наконец, попробовать перенести результаты на эллиптические операторы высокого порядка.

Для общих периодических задач план выполнен в полном объеме. Локально периодические операторы исследованы более подробно, чем планировалось изначально: во-первых, мы рассмотрели операторы вида (1) в $\mathbb{R}^d$ не только с липшицевой по первому аргументу функцией A, но также и с просто равномерно непрерывной и выяснили, как оценки погрешностей зависят от модуля непрерывности; во-вторых, мы изучили эллиптическую и параболическую задачу усреднения в области с условием Дирихле на границе.

Операторы высокого порядка не рассматривались.

3 Участие в конференциях и школах

- Устный доклад на конференции *Days on Diffraction*, Санкт-Петербург.
- Устный доклад на конференции *The International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems*, Суздаль.

4 Работа в научных центрах и международных группах

Научный сотрудник, позже — ассистент на кафедре высшей математики и математической физики СПбГУ.

5 Педагогическая деятельность

Осень 2018: семинарские занятия по линейной алгебре в СПбГУ.