

**Отчёт по гранту  
«Молодая математика России»  
за 2016 год  
Андрей Трепалин**

1. РЕЗУЛЬТАТЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ В ЭТОМ ГОДУ

В 2016 году продолжают исследования факторов рациональных поверхностей по конечным группам автоморфизмов над полями характеристики 0. По критерию Кастельнуово для алгебраически замкнутого поля характеристики 0 всякий фактор рациональной поверхности является рациональным. Для алгебраически незамкнутого поля это не так. Таким образом, в первую очередь нас интересуют, какие есть возможности для действия конечных групп на рациональных поверхностях, для которых фактор-поверхность не будет рациональна.

Применяя программу минимальных моделей, получаем, что для размерности 2 всякий фактор геометрически рациональной поверхности по конечной группе является, либо фактором по этой группе минимального расслоения на коники над проективной прямой, либо фактором по этой группе минимальной гладкой поверхности дель Пеццо (поверхности, для которой антиканонический класс очень обилен). Текущие исследования позволяют получить полную классификацию случаев минимального действия группы на рациональной поверхности, для которого фактор не является рациональным.

В этом году опубликована работа «Quotients of conic bundles», в которой исследован случай действия конечной группы на расслоениях на коники. Если основное поле содержит хотя бы один элемент, не являющийся квадратом, то для конечных групп чётного порядка, нетривиально действующих на базе расслоения, показано, что класс нерациональных факторов рациональных поверхностей является бирационально неограниченным, то есть для любого алгебраического семейства поверхностей найдётся фактор рациональной поверхности, не эквивалентный ни одной поверхности из семейства. Таким образом, в этом случае для каждой группы, нетривиально действующей на базе расслоения, имеется бесконечное количество нерациональных факторов.

Ожидать подобного результата для поверхностей дель Пеццо не стоит, поскольку они сами по себе образуют ограниченное семейство. В работе «Quotients of del Pezzo surfaces of high degree», принятой в печать в журнал «Transactions of the American Mathematical Society» в этом году, показано, что всякий фактор поверхности дель Пеццо степени 5 и выше является рациональным, если на нём есть точка, определённая над основным полем. В этой же работе для поверхностей дель Пеццо степени 4, на которых есть точка, показано, что фактор может быть нерациональным только для групп порядка 1, 2 или 4, все нетривиальные элементы которых не имеют кривых, состоящих из неподвижных точек. Для каждой из этих групп (кроме тривиальной) явно построены примеры нерациональных факторов рациональных поверхностей.

В статье «Quotients of cubic surfaces», опубликованной в этом году, исследуются факторы кубических поверхностей. Показано, что фактор может быть нерациональным, только если группа тривиальна или является циклической группой порядка 3, не имеющей кривых, состоящих из неподвижных точек. Для последнего случая построены примеры нерациональных факторов рациональных поверхностей.

Продолжается работа над статьёй «Quotients of del Pezzo surfaces of low degree», где рассмотрены два оставшихся случая поверхностей дель Пеццо: степени 2 и 1. Для поверхностей дель Пеццо степени 2 получается довольно большой список групп и их минимальных действий, для которых фактор может быть нерациональным. В первую очередь это связано с тем, что для одной из инволюций фактор бирационально эквивалентен *поверхности Исковских* — расслоению на коники с четырьмя вырожденными слоями и двумя сечениями с индексом самопересечения  $-2$ . Такое расслоение может быть минимальным, а следовательно нерациональным. Кроме того, оно имеет обширную группу автоморфизмов, для подгрупп которой факторы также бирационально эквивалентны поверхности Исковских.

Для поверхностей дель Пеццо степени 1 список групп, для которых фактор нерационален значительно уже. Основная идея состоит в том, что большинство конечных групп автоморфизмов содержат либо инволюцию Бертини, либо специфический элемент порядка 3. В обоих случаях порождённая этими элементами циклическая подгруппа является нормальной, а фактор по ней является рациональным. Таким образом, рациональность фактора сводится к рациональности факторов поверхностей дель Пеццо степени 5 и больше, которая доказана ранее. Если конечная группа автоморфизмов не содержит таких элементов, то остаётся небольшой список (10 групп, включая тривиальную) возможностей для такой группы. В большинстве случаев несложно непосредственно показать, что фактор является рациональным. Для остальных (пяти) случаев фактор может быть нерациональным.

## 2. ОПУБЛИКОВАННЫЕ И ПОДАННЫЕ В ПЕЧАТЬ РАБОТЫ

A. Trepalin, Quotients of conic bundles, Transformation Groups, 2016, 21(1), 275–295

A. Trepalin, Quotients of cubic surfaces, European Journal of Mathematics, 2016, 2, 333–359

A. Trepalin, Quotients of del Pezzo surfaces of high degree, Препринт, доступен по адресу <http://arxiv.org/abs/1312.6904>, статья принята к публикации в журнал Transactions of the American Mathematical Society

## 3. УЧАСТИЕ В КОНФЕРЕНЦИЯХ И ШКОЛАХ

Международная школа-конференция «Surfaces in positive characteristic», Москва, Россия, апрель 4–8, 2016. (Два доклада: «Zeta functions of cubic surfaces» и «Zeta functions of del Pezzo surfaces of degree 2»)

Международная конференция по алгебраической геометрии, комплексному анализу и компьютерной алгебре, август 3–9, Коряжма, Архангельская область, Россия, 2016. Организатор. (Доклад «Минимальные поверхности дель Пеццо над конечными полями»)

Международная конференция «Zeta functions 6», декабрь 5–9, Москва, Россия, 2016. (Доклад «Zeta functions of del Pezzo surfaces»)

## 4. РАБОТА В НАУЧНЫХ ЦЕНТРАХ И МЕЖДУНАРОДНЫХ ГРУППАХ

В международных группах не работал. Помимо работы в ИППИ и ЛАГ ВШЭ принимал активное участие в семинаре отдела алгебре и отдела алгебраической геометрии (семинаре И.Р. Шафаревича) и семинаре им. В.А. Исковских в МИАН им. Стеклова.

## 5. ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

С 27 по 31 января преподавал на сборах команды Республики Дагестан для подготовки к третьему туру Всероссийской Олимпиады Школьников по Математике. По итогам третьего тура двое школьников из Республики Дагестан прошли в заключительный этап Всероссийской Олимпиады Школьников по Математике.

С 21 по 30 июля преподавал в Республиканской Математической Школе в с. Агвали Цумадинского района Республики Дагестан. Школа проводилась с 10 по 30 июля.